CHAPITRE 25

CONVEXITÉ

I. DÉRIVÉES SUCCESSIVES

I. 1 DÉFINITIONS

Définition 1.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **deux fois dérivable** sur I lorsque f est dérivable sur I et f' est dérivable sur I.
  La fonction dérivée de f', c'est-à-dire $(f')'$, est alors appelée **la dérivée seconde de** f et elle est notée f'' ou $f^{(2)}$.
- On dit que f est **trois fois dérivable** sur I lorsque f est deux fois dérivable sur I et f'' est dérivable sur I.
  La fonction dérivée de f'', c'est-à-dire $(f'')'$, est alors appelée **la dérivée troisième de** f et elle est notée f''' ou $f^{(3)}$.
- On généralise ces notions par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ de la façon suivante :
  On dit que f est n **fois dérivable** sur I lorsque f est $(n-1)$ fois dérivable sur I et $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I. La fonction dérivée de $f^{(n-1)}$, c'est-à-dire $(f^{(n-1)})'$, est alors appelée **la dérivée n-ème de** f et elle est notée $f^{(n)}$.

Remarque :

La fonction f est n fois dérivable sur I si et seulement si $f', f'', \dots, f^{(n)}$ existent sur I.

Exemple :

La fonction exponentielle est n fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1

Montrer que la fonction inverse est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dérivée $n^{ième}$.

Définition 1.2

Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^n$ sur I lorsque f est n fois   sur I et que sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est   I. On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur I. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Exemple :

La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc elle appartient à l'ensemble :

Remarques :

R1 – Les fonctions usuelles (exceptées la fonction valeur absolue, la fonction partie entière et les fonctions racines) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les intervalles où elles sont définies.

R2 – On dit qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si f est continue sur I.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

I. 2 Espaces $\mathcal{C}^n(I)$ et opérations

Théorème 1.3

Soient $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- Les fonctions $f+g$, λf et fg sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Théorème 1.4

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J. On suppose que :

-
-
-

Alors la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Méthode :

On utilisera ces théorèmes pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque :

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ alors $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ et $(\lambda \cdot f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.

Exercice 3

Montrer que la fonction $x \mapsto x\sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

II. FONCTIONS CONVEXES

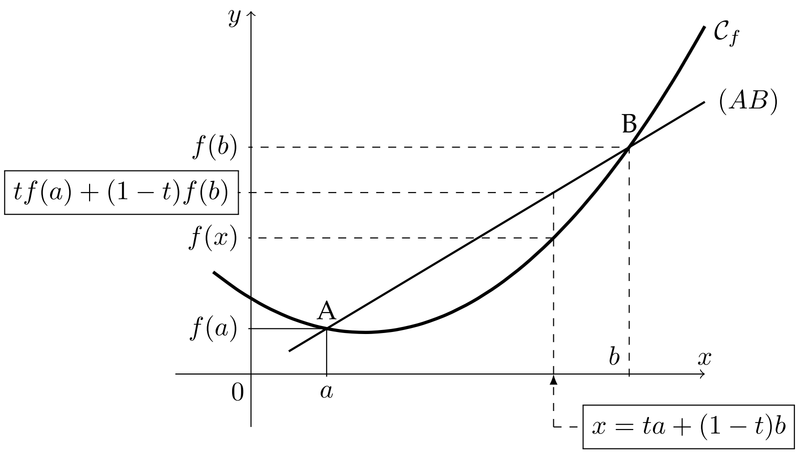
II. 1 DÉFINITION, GRAPHIQUE, INÉGALITÉ DE CONVEXITÉ

Définition 2.1

Soit I un **intervalle** et f une fonction définie sur I.

- On dit que f est **convexe** sur I si pour tout $(a, b) \in I^2$ et tout $t \in [0, 1]$:

- On dit que f est **concave** sur I si $-f$ est convexe sur I (autrement dit l'inégalité est dans l'autre sens).



Exemples 2.2 :

- ▷ Les fonctions affines ($x \longmapsto ax + b$) sont à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$.
- ▷ Si f convexe sur I et si $\alpha > 0$ alors αf convexe sur I.
- ▷ Si f convexe sur I et si $\alpha < 0$ alors αf concave sur I.
- ▷ La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.3 — Interprétation graphique

- Lorsque t parcourt l'intervalle $[0; 1]$, les réels $ta + (1-t)b$ parcourent le segment $[a; b]$.

- Si f est convexe sur I alors sa courbe $\mathcal{C}_f$ est « en dessous de ses cordes » (une corde est un segment reliant deux points de la courbe).

- A l'inverse, si f est concave sur I alors sa courbe $\mathcal{C}_f$ est « au dessus de ses cordes ».

Plus précisément : si f est convexe sur I alors pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$ et $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ deux points de $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $[AB]$ sur l'intervalle $[a, b]$.

II. 2 Lien entre convexité et dérivée

Théorème 2.4

- Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I. Alors f convexe sur I si et seulement si f'
- Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I. Alors f convexe sur I si et seulement si f''

Remarque :

> On en déduit les caractérisations similaires de concavité d'une application dérivable ou deux fois dérivable.

Exercice 4

Étudier la convexité des fonctions usuelles.

Proposition 2.5 — Interprétation graphique

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I. Alors f convexe sur I si et seulement $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes sur I.

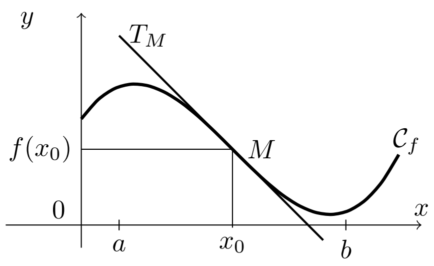
Exercice 5

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

II. 3 Point d'inflexion

Définition 2.6

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrémité de I.
On dit que le point $(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de la courbe $\mathcal{C}_f$ lorsque f change de convexité en x_0 (passe de convexe à concave ou inversement).



Interprétation graphique :
$f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [a, x_0]$ et $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [x_0, b]$, alors f est concave sur $[a, x_0]$ et convexe sur $[x_0; b]$. Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est sous la tangente T_M à gauche de M et au dessus de la tangente à droite de M.
Finalement, en M la courbe traverse la tangente.

Proposition 2.7

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrémité de I. Le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de f si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en x_0.