## Exercice 1

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Etablir que $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$. ?
3. Prouver que $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

## Exercice 2

Soit $g \,:\, x \longmapsto \dfrac{1}{2}x\,|x|$. Montrer que $g$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 3

Justifier que la fonction $f : x \mapsto x^2e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$.

## Exercice 4

On considère l'application $f : [0; +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

1. Justifer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $f$ est continue en 0.
2. Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

## Exercice 5

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de $f$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$ et déterminer $f'$.
3. Étudier les variations de $f$. Déterminer les éventuelles limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition.
4. Sur quels intervalles la fonction $f$ est-elle convexe ? concave ?
5. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion. Donner l'équation de la tangente $T$ à $\mathcal{C}_f$ en ce point.
6. Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé, ainsi que sa tangente $T$.

## Exercice 6

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et calculer $f'(x)$ lorsque $x \neq 0$.

## Exercice 7

Montrer que la courbe du polynôme $P$ défini par $P(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 7x - 5$ admet deux points d'inflexions dont on précisera l'abscisse.

## Exercice 8

Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

## Exercice 9

Soit $f$ la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$.

1. Montrer que $f$ peut être prolongée par continuité en 0 et étudier la dérivabilité en 0 du prolongement.
2. Étudier les variations de $f$.
3. Étudier la convexité de $f$ et montrer que la courbe représentative de $f$ admet un point d'inflexion. Déterminer l'équation de la tangente en ce point.