CHAPITRE 26

APPLICATIONS LINÉAIRES

Dans tout ce chapitre, E et F désignent des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

I. APPLICATIONS LINÉAIRES

I. 1 DÉFINITION ET EXEMPLES

Définition 1.1

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une **application linéaire** si :
-
-

On appelle
- une application linéaire de E dans lui-même.
- une application linéaire bijective.
- un endomorphisme bijectif.

Notation : On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, et on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Exercice 1

1. Montrer que l'application f définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & -3X \end{array}$ est un endomorphisme.
2. Montrer que l'application f définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3) \end{array}$ est linéaire.

Exemples fondamentaux :

- L'**application nulle** définie par $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$ est linéaire.
- l'**application identité** de E définie par
$$Id_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$
est linéaire.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application définie par :
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \alpha x \end{array}$$
est linéaire.

I. 2 Propriétés des applications linéaires

Proposition 1.2

Soit $f : E \to F$ une application. L'application f est linéaire si et seulement si l'une des conditions suivantes est vraie :

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in E^2,$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2,$

Exercice 2

Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(x)\,dx \end{array}$ est linéaire.

Proposition 1.3

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- On a $f(0_E) =$
- Pour tout $x \in E$, $f(-x) =$
- Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ des vecteurs de E et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des scalaires. Alors :

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k) =$$

  Autrement dit, l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

Exercice 3

Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & P^2 + P' \end{array}$ n'est pas linéaire.

Proposition 1.4

Soient E, F et G trois espaces vectoriels.

- $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(\quad,\quad)$ alors $g \circ f \in$
- Si f est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$, alors f^{-1} est un isomorphisme de

Remarques :

R1 – La proposition précédente montre qu'une combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire, et que la composée d'une application linéaire est une application linéaire.

R2 – La réciproque d'une application linéaire bijective est une application linéaire bijective, et en particulier

$$f \circ f^{-1} = \qquad\qquad\qquad\qquad f^{-1} \circ f =$$

II. Image d'une application linéaire

Définition 2.1

Soit f une application linéaire de E dans F.
On appelle **image** de f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble des images par f des vecteurs de E, ou encore l'ensemble des vecteurs de F qui ont un antécédent par f c'est-à-dire :

$$\mathrm{Im}(f) =$$

ou encore :

$$\mathrm{Im}(f) =$$

Exercice 4

Déterminer l'image de l'application linéaire : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 3x_2, x_1)$$

Théorème 2.2

Soient f une application linéaire de de E dans F, et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\right)$$

En particulier, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de

Démonstration.

□

Théorème 2.3

Soit f une application linéaire de E dans F, alors f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$

III. Noyau d'une application linéaire

Définition 3.1

Soit f une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ On appelle **noyau de** f et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble des vecteurs de E qui ont une image nulle par f ou encore l'ensemble des antécédents par f du vecteur nul de F c'est-à-dire :

$$\mathrm{Ker}(f) =$$

Exercice 5

Déterminer le noyau de l'application linéaire suivante : $\begin{array}{rccc} g: & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$.

Remarque :

> Le noyau d'une application linéaire f est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé à la matrice de f.
> On en déduit le Théorème suivant :

Théorème 3.2

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de

Démonstration.

□

Théorème 3.3

Soit f une application linéaire de E dans F, alors f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_{n,1}\}$

Démonstration.

□

Exercice 6

Montrer que les application suivantes sont linéaires puis déterminer si elles sont injective :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$ $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$

IV. Théorème du rang

Définition 4.1

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** de f, et on note , la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 4.2

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$f \text{est surjective } \Leftrightarrow rg(f) = \dim(F)$$

Théorème 4.3

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

Attention:

C'est la dimension de l'espace de **départ** qui rentre en jeu.

Méthode :

Pour déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire :

1. On commence par déterminer celui qui parait le plus simple, ou demandé en premier.
2. Le théorème du rang donne la dimension de l'autre, que l'on cherche à déterminer ensuite.

Exercice 7

1. On pose $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ y-z \end{pmatrix}$ une application linéaire. Déterminer son image et son noyau.
2. On pose $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$ une application linéaire. Déterminer son noyau, puis le rang puis donner une base de son image.

Proposition 4.4 — Conséquennces importantes

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont des espaces vectoriels de **dimension finie**.

1. Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors
$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective } \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$
Autrement dit

2. Si f est bijective, alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Remarque :

Si f est un endomorphisme de E, avec $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$,
$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ bijective } \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

V. Applications linéaires et matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$$

est linéaire.

Attention:

Attention au tailles de matrices!!

On cherche à établir la réciproque, à savoir que si φ est linéaire de E dans F, où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, avec $\dim(E) = p$, $\dim(F) = n$, alors il existe un matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que φ puisse s'écrire sous la forme

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$$

Définition 5.1

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = p$, $\dim(F) = n$, et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E, et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de F. On appelle matrice de φ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et on note $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$, la matrice

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) =$$

La j-ème colonne est constitué des coordonnées de $\varphi(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Proposition 5.2

On reprend les notations précédentes. Soient $u \in E$, $v \in F$, dont les coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont X et Y. On note $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$. Alors

$$\varphi(u) = v \Leftrightarrow Y = AX$$

Sous forme de schéma :

Remarque :

Lorsque les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ correspondent aux bases canoniques de E et F, la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$ est appelée :

Exercice 8

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 3x_2, x_1)$ Donner la matrice canoniquement associée.

Exercice 9

1. Déterminer la matrice canoniquement associée à l'application : $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+3z \end{pmatrix} \end{array}$.

2. On admet que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donner $Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Exercice 10

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P(X)) = P(X) + (1-X)P'(X)$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer son noyau et son image.

V. 0 Noyau et image d'une matrice

D'après ce qu'on vient de voir, il y a une correspondance directe entre matrice et applications linéaires. En effet si on se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et on note

$$\varphi_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$$

alors

- $\mathrm{Ker}(\varphi_A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\ \ AX = 0_{n,1}\}$
- Si $(E_1, E_2, ..., E_p)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\mathrm{Im}(\varphi_A) = Vect\left(\varphi_A(E_1), \varphi_A(E_2), ..., \varphi_A(E_p)\right)$$

  et en notant $C_1, C_2, ...C_p$ les colonnes de A, comme $\varphi_A(E_j) = C_j$,

$$\mathrm{Im}(\varphi_A) = Vect(C_1, ..., C_p)$$

- $rg(\varphi_A) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi_A)) = \dim\left(Vect(C_1, ..., C_p)\right)$.

Ceci justifie les définitions suivantes :

Définition 5.3

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Le **noyau** de A, noté $\mathrm{Ker}(A)$ est défini par
- **L'image** de A, notée $\mathrm{Im}(A)$, est définie par

  où pour tout $j \in [|1;p|]$, C_j est
- Le **rang** de A, noté $rg(A)$, est la dimension de $\mathrm{Im}(A)$

Le théorème du rang s'énonce alors sous la forme :

Théorème 5.4 — Théorème du rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.