Exercice 1

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 1 \\ 2x_1 + 3x_3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2xy \\ 2(x+y) \\ -z \end{pmatrix} \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & 2x - y + 2 \end{array}$$

Exercice 2

On considère les applications linéaires suivantes.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a - 2b \\ 2a + b \\ a - b \\ b \end{pmatrix} \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 5x - 6z \\ 3x + y + 3z \\ 3x + 4z \end{pmatrix} \end{array}$$

Déterminer l'image et le noyau de chacune de ces applications. Sont-elles surjectives ? injectives ? bijectives ?

Exercice 3

Déterminer les matrices relativement aux bases canoniques des applications linéaires suivantes :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a - 2b \\ 2a + b \\ a - b \\ b \end{pmatrix} \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 5x - 6z \\ 3x + y + 3z \\ 3x + 4z \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, et f l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P(X)) = P'(X)$

1. Soit $P = aX^2 + bX + c$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $f(P(X))$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E puis donner sa matrice canoniquement associée.
3. Déterminer $Ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, et f l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P(X)) = P(X) - XP'(X)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E puis donner sa matrice canoniquement associée.
2. Déterminer $Ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) = AMA$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer $f(I_2)$ et $f(A)$.
3. Justifier que A est inversible et déterminer son inverse.
4. Déterminer $Ker(f)$. Que peut-on en déduire ?
5. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   ; $f(M) = M\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.
6. Donner matrice canoniquement associée à f.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $Ker(f)$. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 8

Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$, et f l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_4[X]$,

$$f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E puis donner sa matrice canoniquement associée.
2. Déterminer $Ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 9

Soit f l'application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans les bases canoniques est $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit matriciel AB.
2. Déterminer explicitement les applications f et g.
3. Déterminer l'application $f \circ g$.
4. Justifier que l'application $f \circ g$ est linéaire et déterminer sa matrice dans les bases canoniques. Que constate-t-on ?

Exercice 10

Soit $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -x+y \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est linéaire et déterminer M sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f est bijective.
3. Déterminer la bijection réciproque de f.
4. Montrer que f^{-1} est linéaire et déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
5. Calculer M^{-1}. Que remarque-t-on ?