CHAPITRE 27

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans toute ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Définition 1.1

- On appelle **équation différentielle** toute équation mettant en relation une fonction y définie sur I(suffisamment régulière) et une ou plusieurs de ses dérivées.
- Toute fonction f, de classe suffisante sur I pour valider l'écriture, et vérifiant cette équation différentielle est appelée de l'équation différentielle.
- Résoudre une équation différentielle sur I, c'est trouver toutes les fonctions solutions sur I.

Exemple :

Les équations $y'(x) - 2y(x) = 0$ et $y''(t) + y(t) = e^t$ sont des équations différentielles.

Remarques :

R1 – Souvent la lettre f est utilisée pour désigner une fonction étudiée. Pour éviter toute ambiguïté, on notera y **la fonction inconnue** d'une équation différentielle.

R2 – ATTENTION!! Une équation différentielle est une égalité entre **fonctions**!

R3 – Par convention, on met dans le membre de gauche toutes les dérivées successives de l'inconnue et dans le second membre les fonctions qui n'en dépendent pas.

R4 – Les équations différentielles seront souvent écrites sous la forme

$$y' - 2y = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad y'' - y = e^t$$

c'est à dire que les variables x ou t ont été enlevées dans le membre de gauche. Il s'agit là d'un abus de notation couramment utilisé.

Définition 1.2

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** n toute équation différentielle de la forme

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $a_0, a_1, ..., a_n, b$ sont des fonctions définies et continues sur I, telles que a_n n'est pas la fonction nulle et où $y \in C^n(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

- On appelle équation associée à une équation différentielle, l'équation qui s'obtient en remplaçant le second membre par la fonction nulle.

Remarque :

Le terme **linéaire** vient du fait que le membre de gauche est une expression linéaire en y :

Exemple :

L'équation $y'' \times y' + 3y^2 = g$ où $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : x \mapsto e^x + x^2 - 1$ est une équation différentielle. Une solution f de cette équation est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \times f'(x) + 3f(x)^2 = e^x + x^2 - 1$$

Cette équation n'est pas linéaire.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(E) : y' - 2xy = 2x^2 - 1 \qquad \text{où } y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

1. Donner l'équation homogène (E_H) associée à (E).
2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda :\mapsto \lambda e^{x^2}$ est solution de (E_H).
3. Déterminer toutes les solutions de (E) qui sont dans $\mathbb{R}_1[X]$. On notera f_p l'une d'entre elles.
4. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda + f_p$ est solution de (E).

Exercice 2

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Proposition 1.3 — Ensemble des solutions

Soient (E) une équation différentielle linéaire et (E_H) son équation différentielle linéaire homogène associée. On note S_E l'ensemble des solutions de (E), et S_H l'ensemble des solutions de (E_H).

- S_H est un espace vectoriel.
- Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière f_p, une solution quelconque de l'équation homogène. Autrment dit

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{solution générale}\\ \text{de l'EDL}\end{array} = \begin{array}{c}\text{solution particulière}\\ \text{de l'EDL}\end{array} + \begin{array}{c}\text{solution générale}\\ \text{de l'EDH}\end{array}}$$

ou encore

$$S_E = \{f_p + f_H \ / \ f_H \in S_H\}$$

Exemple :

L'ensemble des solutions de l'EDL (E) de l'exercice 1 est donc :

Proposition 1.4 — Principe de superposition

Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ ainsi que b_1 et b_2 des fonctions continues sur I. On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) \ : \ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b_1 \quad \text{et} \quad (E_2) \ : \ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

Si f_1 est une solution de E_1 et f_2 une solution de E_2, alors pour tous λ_1, λ_2 réels,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \quad \text{est solution de} \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

Exemple :

On cherche une solution particulière de l'EDL : $(E) \ : \ y' + y = 3 + 2x$.

- Une solution particulière de $y' + y = 1$ est :
- Une solution particulière de $y' + y = x$ est :

Par conséquent, une solution particulière de (E) est :

Dans tout le reste du chapitre, nous nous concentrerons sur des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2, à coefficients constants.

II. EDL du premier ordre à coefficients constants.

Définition 2.1

Soient a_0 et a_1 **des réels** tels que $a_1 \neq 0$, et b une fonction continue sur I. On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

Remarque :

Puisque $a_1 \neq 0$, alors pour tout $y \in C^1(I, \mathbb{R})$:

$$a_1 y' + a_0 y = b \Leftrightarrow y' + \frac{a_0}{a_1} = \frac{b}{a_1}$$

On dit que l'équation est .
On cherchera toujours à s'y ramener.

Dans la suite nous ne considérerons que des EDL1 normalisées, de la forme : $y' + ay = b$.

Exemple :

- EDL1 à coefficients constants :

- Ne sont pas des EDL1 à coefficients constants :

Résolution de l'équation homogène

Théorème 2.2

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions définies sur I par

$$f_H : t \mapsto \lambda e^{-at}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple :

Les fonctions $f_1 : t \mapsto e^{-t}$ et $f_2 : t \mapsto 2e^{-t}$ sont deux solutions de l'équation

$$y' + y = 0$$

Recherche d'une solution particulière

Il n'y a pas de règle générale... Un cas cependant à connaître :
Si le second membre b est une constante , alors une solution particulière de $y' + ay = b$ est

$$f : t \mapsto \frac{b}{a} \text{si } a \neq 0,$$

et si $a = 0$:

Méthode :

Pour trouver une solution particulière d'une EDL1 à coefficients constants

- Soit on en trouve une évidente, comme par exemple dans le cas précédent.
- Soit on se laisse guider par l'énoncé.

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y' - 3y = 6$, d'inconnue $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- $y' + y = x + 1$, d'inconnue $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

III. EDL du second ordre à coefficients constants.

Définition 3.1

Soient a_0, a_1, et a_2 **des réels** tels que $a_2 \neq 0$, et b une fonction continue sur I. On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

Remarque :

Puisque $a_2 \neq 0$, alors pour tout $y \in C^2(I, \mathbb{R})$:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \Leftrightarrow y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{b}{a_2}$$

On dit que l'équation est .
On cherchera toujours à s'y ramener.

Dans la suite nous ne considérerons que des EDL2 normalisées, de la forme : $y'' + ay' + by = c$.

Résolution d'une EDL2

On cherche une nouvelle fois à se servir du résultat de la partie I :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{solution générale}\\ \text{de l'EDL}\end{array} = \begin{array}{c}\text{solution partculière}\\ \text{de l'EDL}\end{array} + \begin{array}{c}\text{solution générale}\\ \text{de l'EDH}\end{array}}$$

Résolution de l'équation homogène

Définition 3.2

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

Théorème 3.3 — Résolution de $y'' + ay' + by = 0$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et Δ le discriminant associé à l'équation $r^2 + ar + b = 0$.

- Si $\Delta > 0$, on appelle r_1 et r_2 les deux solutions. Alors l'ensemble des solutions de l'équation $y''+ay'+by = 0$ est :

  Autrement dit, f est solution de (E_H) : $y'' + ay' + by = 0$, avec $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, tels que pour tout x dans I,

  $$f(x) =$$

- Si $\Delta = 0$, on appelle r_0 l'unique solution. Alors l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est :

  Autrement dit, f est solution de (E_H) : $y'' + ay' + by = 0$, avec $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, tels que pour tout x dans I,

  $$f(x) =$$

Exemple :

- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - y' - 6y = 0$ est :

- L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est :

Recherche d'une solution particulière

Il n'y a pas de règle générale... Un cas cependant à connaître :
Si le second membre c est une constante , alors une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$ est

$$f : t \mapsto \frac{c}{b} \text{si } b \neq 0,$$

et si $b = 0$:

Méthode :

Pour trouver une solution particulière d'une EDL2 à coefficients constants

- Soit on en trouve une évidente, comme par exemple dans le cas précédent.
- Soit on se laisse guider par l'énoncé.

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y = 4x + 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

IV. Trajectoires

Définition 4.1

On appelle trajectoire d'une équation différentielle (E) sur I, tout ensemble

$$\{(t,\ y(t)),\ t \in I\}$$

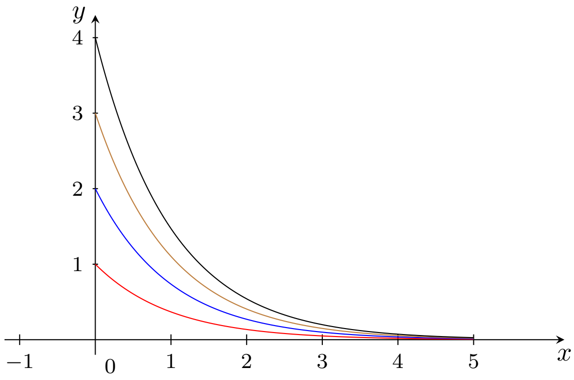
Remarque :

Autrement dit, les trajectoires sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$, que l'on peut assimiler géométriquement aux représentations graphiques des solutions de l'équation différentielle.

Exemple :

L'ensemble des solutions de l'équation $(E) : y' + y = 0$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est

Voici différentes trajectoires



Problème de Cauchy :

Théorème 4.2

Soit $t_0 \in I$, et $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$.

- Il existe une unique solution à l'équation différentielle $y' + ay = b$, telle que $y(t_0) = y_0$.
- Il existe une unique solution à l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$, telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = z_0$.

Remarque :

Graphiquement, ce théorème se traduit par le fait que pour une équation différentielle donnée, une trajectoire est uniquement déterminée par sa ou ses conditions initiales.
Conséquemment, deux trajectoires différentes sont d'intersection vide, elles ne se croisent jamais.

Exercice 5

Résoudre le problème suivant, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 2x - 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

Convergence et trajectoire d'équilibre :

Définition 4.3

On appelle trajectoire d'équilibre d'une équation différentielle, toute trajectoire associée à une solution constante de cette équation différentielle.

Exemple :

Concernant l'équation différentielle $y' + y = 0$, on trouve une seule trajectoire d'équilibre constante égale à 0.

Définition 4.4

On dit qu'une trajectoire $\{(t,\ y(t)),\ t \in I\}$ converge si $y(t)$ possède une limite finie quand t tend vers $+\infty$.

Remarque :

Cette définition n'a de sens que si $+\infty$ est une borne de I. (Ceci est souvent vérifié en pratique).

On peut montrer qu'en cas de convergence, les trajectoires convergent vers **une** trajectoire d'équilibre.