Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Les formes des solutions particulières à chercher sont parfois indiquées entre parenthèses.

1. $y' + 2y = 2$.
2. $y' - y = 2$.
3. $y' - y = x$.
4. $y' - y = 5x - 4$.
5. $y' + y = e^x + x$.
6. $y' - y = -2e^{-x}$
7. $y' + y = \dfrac{1 + x\ln(x)}{x}$, $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.
8. $y' - 3y = x$.
9. $y' - 2y = x^2$ (f_p fonction trinôme).
10. $y' - 4y = e^{2x}$.
11. $y' - 4y = e^{2x}$. ($f_p : x \mapsto P(x)e^{2x}$, $P \in \mathbb{R}_1[X]$)
12. $y' + y = 2xe^{-x}$.($f_p : x \mapsto P(x)e^{-x}$, $P \in \mathbb{R}_2[X]$)

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Les formes des solutions particulières à chercher sont parfois indiquées entre parenthèses.

1. $y'' + y' - 2y = 4$.
2. $y'' + y' - 6y = 6x - 1$.
3. $y'' - 2y' + y = x$. (f_p fonction affine).
4. $y'' - 4y' + 3y = x^2$. (f_p fonction trinôme).
5. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$ ($f_p : x \mapsto P(x)e^{-x}, P \in \mathbb{R}_1[X]$.)
6. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{x}$ ($f_p : x \mapsto P(x)e^{x}, P \in \mathbb{R}_2[X]$.)
7. $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^{x}$ ($f_p : x \mapsto P(x)e^{-x}, P \in \mathbb{R}_4[X]$.)

Exercice 3

On note (E) l'équation différentiellee $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{t-1}{t^2}e^{-t}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Soit y une solution de (E). On pose $z : t \mapsto y(t)e^t$.
   (a) Donner l'équation différentielle vérifiée par z.
   (b) Déterminer alors l'expression de z.
   (c) Donner alors une solution particulière de (E).
3. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4

On considère le problème de Cauchy : (E) : $\begin{cases} y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Soit y une solution du problème de Cauchy (E). Posons $z = \sqrt{y}$. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) > 0$.
   (a) Vérifier que $2z' + 2z = x + 1$.
   (b) En déduire les formes de solutions possibles pour z, puis pour y.
2. Vérifier que ces formes sont bien solutions du problème (E).

Exercice 5

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, d'inconnue $y\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.

1. Soit y une solution de (E). On poze $z : t \mapsto y(e^t)$.
   (a) Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, puis déterminer $z'(t)$ et $z''(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficient constant.
   (c) En déduire z.
   (d) Conclure sur les solutions possibles de (E).
2. Vérifier les solutions trouvées à la question précédentes vérifient bien l'équation (E).

Exercice 6

On consdère l'équation différentielle $(E) : y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Résoudre $y' + y = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et posons $f : x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$. Montrer que
$$(f \text{ solution de } (E)) \Leftrightarrow \left(\forall x \in I,\ \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \right)$$
3. En déduire une solution particulière de (E).

4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 7

1. Considérons $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (a) Déterminer le rang de $f-6Id$. En déduire la dimension puis une base de $Ker(f-6Id)$.
   (b) Posons $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U = AV - 2V$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
      i. Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
      ii. Déterminer la matrice f dans cette base, notée T.
      iii. Posons $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible. (On ne cherchera pas à calculer P^{-1}, mais on admettra que $A = PTP^{-1}$.
2. On considère le système différentiel suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) & = & 5x(t) & +y(t) & -4z(t) \\ y'(t) & = & 3x(t) & +3y(t) & -4z(t) \\ z'(t) & = & x(t) & -y(t) & +2z(t) \end{cases}$$

   d'inconnues $x, y, z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, et on admet que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que pour tout réel , $X'(t) = AX(t)$.
   (b) On note, pour tout réel t, $Y(t) = P^{-1}X(t)$, et on admet que $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = TY(t)$.
   (c) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{2t}$ est solution de l'équation différentielle $f' = 2f + ce^{2t}$.
   (d) En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $Y(t)$ en fonction de t.
   (e) Montrer alors qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} & +\lambda_3 e^{6t} \\ x(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} & +\lambda_3 e^{6t} \\ z(t) & = & (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} & \end{cases}$$