CHAPITRE 19

THÉORIE DES GRAPHES

I. VOCABULAIRE DE BASE

Définition 1.1

- Un **graphe** est un ensemble constitué de points et de segments reliant certains de ces points.
  Ces points sont appelés du graphe et les segments sont appelés du graphes.

Exemple :

Voici un graphe que l'on appellera G_1 :

Définition 1.2

- Deux sommets reliés par une arête sont dits :
- Une arête reliant un sommet à lui même est appelée :
- Un sommet qui n'est relié à aucun autre sommet est dit :
- On appelle d'un graphe le nombre de sommets.
- On appelle d'un sommet le nombre de d'arêtes reliées à ce segment .

Remarques :

R1 – Une boucle part d'un sommet pour y revenir. Dans le calcul du degré d'un sommet, elle compte double.
R2 – Ces boucles interviennent surtout dans les graphes liés aux études probabilistes.

Exemple :

Reprenons le graphe G_1. Alors

- Ce graphe est d'ordre
- Le sommet A est adjacents aux sommets . Il est de degré
- Le sommet E est adjacent à . Il est de degré
- Le sommet F

Théorème 1.3 — Formule d'Euler, ou formule des poignées de main

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^*$. On considère un graphe d'ordre n, ayant p arêtes. On note $S_1, S_2, ..., S_n$ les sommets du graphe, $d_1, d_2, ..., d_n$ leurs degrés respectifs. Alors

Autrement dit, la somme des degrés est le double du nombre d'arêtes.

Idée de la démonstration :

Remarques :

R1 – On remarque que la somme des degrés est toujours pair.

R2 – Le nombre de sommets qui ont un degré impair est pair.

Exemple :

Dans le graphe G_1, il y a arêtes.
Les sommets A, B et D sont de degré , C est de degré , E est de degré , et F est de degré . Ainsi la somme vaut ce qui correspond bien au double du nombres d'arêtes.

Exercice 1

Les 29 élèves d'une classe de prépa se retrouvent pour passer un concours blanc. Avant l'épreuve, ils se serrent tous la main pour se souhaiter bon courage. Combien y a-t-il eu de poignées de main ?

Définition 1.4

- Un graphe est dit si chaque sommet est adjacent à tous les autres.
- Un graphe est dit lorsque chaque arrête est dirigée d'un sommet à l'autre à l'aide d'une flèche.

Exemple :

Voici un graphe complet que l'on appellera G_2 : Voici un graphe orienté que l'on appellera G_3 :

Attention:

La formule d'Euler ne s'applique pas aux graphes orientés.

Remarque :

> Dans certaines situations, notamment dans des études probabilités, on est amené à étudier des graphes dans lesquels chaque arrête est pondérée. On parle alors de :

II. Graphes eulériens, graphes connexes

II. 1 Chaines

Définition 2.1

On appelle ou toute liste de sommets, dans laquelle deux sommets consécutifs sont reliés par une arrête.
La chaîne est dite lorsque le sommet initial et le sommet final sont les mêmes .
On appelle toute chaîne fermée dans laquelle chaque arrête n'est parcourue qu'une seule fois.

Exemple :

II. 2 Graphe eulérien

Définition 2.2

Une chaîne est une chaîne contenant toutes les arrêtes du graphe, chacun étant parcourue une seule fois.
Un est une chaîne eulérienne fermée.

Exemple :

Définition 2.3

On dit qu'une graphe est si il contient au moins un cycle eulérien.

Exemple :

II. 3 Graphe connexe

Définition 2.4

On dit qu'une graphe est si tout sommet est relié à n'importe quel autre par au moins une chaîne.

Théorème 2.5

Soit G un graphe connexe.

1. G possède une chaîne eulérienne entre deux sommets si et seulement si ces deux sommets sont les seuls de la chaîne à avoir un degré impair.
2. G est un graphe eulérien si et seulement si tous les sommes sont de degré pair.

Démonstration. □

Méthode :

Pour prouver la connexité d'un graphe, il suffit de trouver une chaîne qui passe par tous les sommets.

Exemple :

III. Matrices d'adjacence

III. 1 Longueur d'une chaine

Définition 3.1

On appelle le nombre d'arêtes qui la composent.
On appelle entre deux sommets la longueur minimale parmi toutes les chaînes reliant ces sommets.
On appelle d'un graphe, la plus grande distance entre deux sommets.

Exemple :

III. 2 Matrices d'adjacence

Définition 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et G un graphe *non orienté* dont les sommets sont les éléments de $[|1;n|]$.
On appelle du graphe G, la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i,j) \in [|1;n|]^2$,

$$m_{i,j} = \text{nombre de chaîne de longueur 1 entre les sommets } i \text{ et } j$$

Remarques :

- **R1 –** Autrement dit le coefficient $m_{i,j}$ vaut 1 si les sommets i et j sont adjacents, 0 sinon.
- **R2 –** Si les sommets sont notés par des lettres, on les numérote en suivant l'ordre alphabétique.
- **R3 –** **Si le graphe est orienté**, le coefficient $m_{i,j}$ est égal au nombre de chaînes de longueur 1 partant du sommet i pour aller au sommet j.

Exemple :

Remarque :

Dans le cas d'un graphe non orienté, une arête entre i et j est comptée deux fois : pour aller de i à j (dans $m_{i,j}$) et pour aller de j à i (dans $m_{j,i}$).

Théorème 3.3

La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est .

III. 3 Nombre de chaînes entre deux sommets

Proposition 3.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et G un graphe *non orienté* dont les sommets sont les éléments de $[|1;n|]$. On note M la matrice d'adjacence de G.

Soit $d \in [|1;n|]$. Pour tout $(i,j) \in [|1;n|]^2$, le coefficient de la i-ème ligne j-ème colonne de M^d est égal au nombre de chaînes de longueur d reliant les sommets i et j.

Exemple :

Remarque :

Si le graphe est orienté, le coefficient de la $i$ème ligne $j$ème colonne de M^d est égal au nombre de chaînes de longueur d partant du sommet i pour aller au sommet j.

Exemple :

Théorème 3.5

Si G est un graphe (*orienté ou non*) dont les sommets sont les éléments de $[|1;n|]$, de matrice d'adjacence M, alors

G connexe $\Leftrightarrow$ a tous ses coefficients strictement positifs

Exemple :