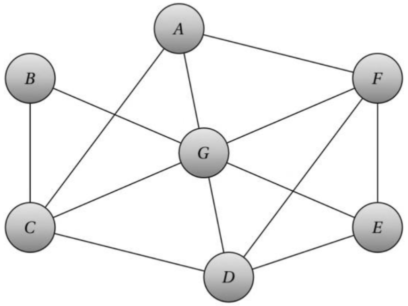
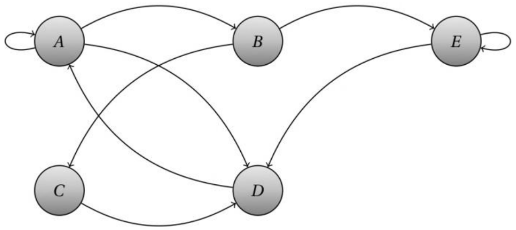
Exercice 1



On considère le graphe Γ suivant

1. Justifier la connexité de Γ.
2. Donner le degré de chacun des sommets et en déduire le nombre d'arêtes.
3. Est-il possible de parcourir toutes les arêtes de Γ sans passer plus d'une fois par la même arête ? Si oui, donner un parcours possible.
4. Donner une chaîne de longueur 5 reliant A et B.
5. Donner la matrice d'adjacence du graphe Γ.

Exercice 2



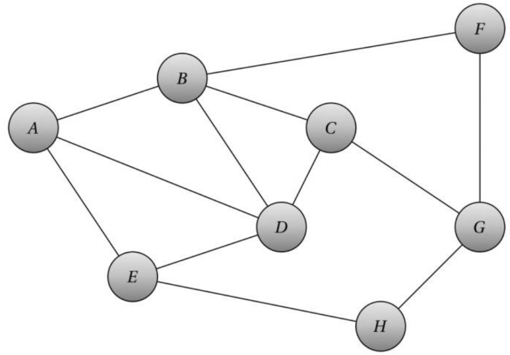
On considère le graphe G suivant

1. Donner tous les chemins de longueur 4 allant de A vers E.
2. Donner la matrice d'adjacence de G.
3. On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. À l'aide d'un seul calcul, retrouver le résultat de la question 1.
4. On considère le graphe G' ayant les mêmes sommets que G, de matrice d'adjacence $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En laissant les sommets de G dans leur position initiale, tracer les arêtes de G'.

Exercice 3

Une compagnie aérienne dessert huit aéroports nommées A, B, C, D, E, F, G et H. Le trafic aérien de cette compagnie est schématisé par le graphe G dans lequel :

- les sommets représentent les aéroports.
- les arêtes représentent les liaison assurées dans les deux sens par la compagnie.



1. Déterminer, en le justifiant, si le graphe G est connexe.
2. Déterminer, en le justifiant, si le graphe G admet une chaîne eulérienne.
3. Donner la matrice d'adjacence M de G en respectant l'ordre alphabétique des sommets du graphe.
4. On donne M^2 et M^3 :

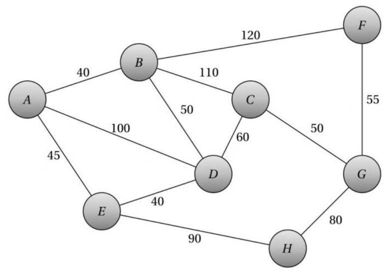
$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

   Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H.

   (a) Déterminer, en le justifiant, le nombre minimal de vols qu'il doit prendre.

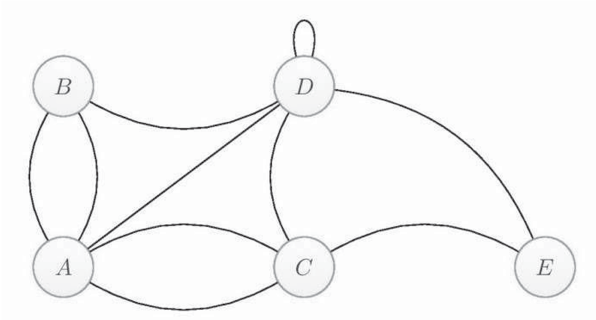
   (b) Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs.

5. Les arêtes sont maintenant pondérées par le coût de chaque vol, exprimé en euros. Un voyageur partant de l'aéroport A doit se renndre à l'aéroport G. En utilisant l'algorithme de Dijkstra, détermine le trajet le moins cher.



Exercice 4

Cinq étudiants habitent dans la même ville, mais en des lieux distincts que l'on représentera par des sommets A, B, C, D et E. Ils décident de s'entrainer à la course à pied. La situation géographique est modélisé par la graphe Γ :

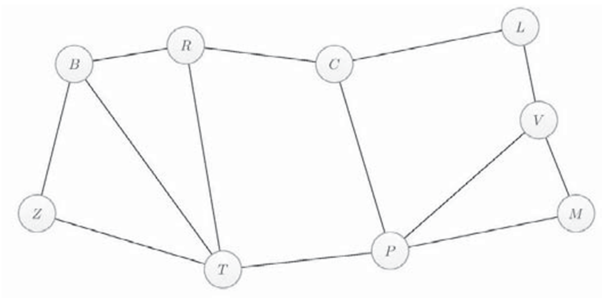


Pour faciliter les calculs, on suppose que chaque ate représente 2,5 km.

1. Ecrire la matrice d'adjacence de G.
2. Expliquer comment, à l'aide d'une matrice, on peut trouver l'étudiant qui peut rendre visite au plus grand nombre d'amis en ne parcourant que 2,5 km.
3. (a) Anatole, qui habite en A, cherche à connaître combien de boucles différentes de 10 km il peut faire. Pouvez-vous l'aider ?
   (b) Quel étudiant dispose du plus faible nombre de boucles de 10 km ?

Exercice 5

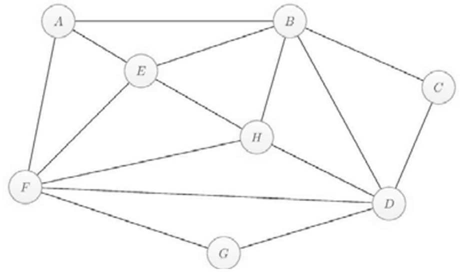
Le graphe G ci-contre représente les autoroutes entre certaines villes du sud de la France : Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Valence (V), et Biarritz (Z).



1. (a) Déterminer l'ordre de ce graphe.
   (b) Ce graphe est-il connexe ?
   (c) Ce graphe est-il complet ?
2. Déterminer le degré de chaque sommet. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? un cycle eulérien ?
3. Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture. Déterminer en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en emprutant une et une seule fois chaque autoroute. Donner un parcours possible.

Exercice 6

Une coopérative fruitière collecte du lait dans 7 exploitations de Laguiole. La situation géographique est représentée par le graphe ci-contre. La coopérative est située sur le sommet A, les autres sommets représentent les différentes exploitations et les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.



Notons M la matrice d'adjacence associée.

1. Montrer que ce graphe est connexe.
2. Ce graphe est-il complet ?
3. Sans la construire, justifier que chaque ligne et chaque colonne de M a au moins deux coefficients nuls.
4. La matrice M^2 a-t-elle des coefficients non nuls ?
5. On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre de chemins de longueur 3 allant de A à H.
6. On reprend le graphe en le pondérant. Dérerminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin le plus court pour aller du point A au point D.