Sujet HEC

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On dit qu'un élément A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est colinéaire à I, s'il existe un réel λ tel que $A = \lambda I$.

On définit les deux applications suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, notées d et t par : pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$d(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \qquad \text{et} \qquad t(A) = a_{1,1} + a_{2,2}$$

1. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$.
   (a) Calculer $d(2I)$. En déduire que $d(\lambda A)$ n'est pas, en général, égal à $\lambda d(A)$.
   (b) Montrer que $d(AB) = d(A)d(B)$.
   (c) En déduire que si il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, $d(A) = d(B)$.
2. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $t(\lambda A + B) = \lambda t(A) + t(B)$.
   (b) Montrer que $t(AB) = t(BA)$.
   (c) En déduire que si il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, $t(A) = t(B)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non colinéaire à I.
   (a) Etablir l'existence d'un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $A^2 = \alpha A + \beta I$.
   (b) Exprimer α et β en fonction de $d(A)$ et $t(A)$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AB = BA\}$. Soient $(C, D) \in \mathcal{C}(A)$.
   Montrer que $C + D \in \mathcal{C}(A)$, et $\lambda C \in \mathcal{C}(A)$.