Ecricome 2011

Option Économique

Exercice 1

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

I. Étude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Prouver que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa fonction dérivée.
4. Montrer que $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ admet une limite en 0.
5. Dresser le tableau de variations de φ.
6. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$.
   Montrer l'existence d'un unique réel α tel que : $\varphi(\alpha) = 0$ et justifier que : $\sqrt{2} < \alpha < 2$.

Exercice 2

I. Un jeu en ligne.

Le société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :
- H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
- D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
- N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
2. Déterminer les probabilités $P(H)$, $P(V)$, $P(D)$ des événements H, V, D.

3. En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à :

$$p(N) = \frac{19}{21} \approx 0,9048$$

II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes. On note A_k l'évènement "le joueur gagne k parties".

   On admet que pour tout entier naturel $k \in [|0;10|]$, $P(A_k) = \binom{100}{k}\left(\frac{2}{21}\right)^k\left(\frac{19}{21}\right)^{100-k}$. Montrer que $E = \sum_{k=0}^{100} kP(A_k) = \frac{200}{21}$. Que représente cette quantité ?

2. (a) Un joueur joue n parties, supposées indépendantes. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie.

   (b) Quel est le nombre minimum n de parties qu'il devrait jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ? (*On admettra que* $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \approx -0,1$ *et* $\ln(2) \approx 0,7$).

3. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée. On note G_k l'évènement "le joueur gagne la k-ième partie, B_k l'évènement "le joueur gagne pour la première fois à la $n$ième partie". jouées pour gagner la première fois.

   (a) Exprimer B_k en fonction des (G_i) puis calculer $P(B_k)$.

   (b) Pour tout entier naturel k, montrer que la probabilité p_k que le joueur joue au plus k parties avant de gagner pour la première fois est donnée par la formule :

$$p_k = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k$$

III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case (A, 1), les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement ≪ la fonction aléatoire est déréglée ≫ et on pose $P(\Delta) = x$ avec $x \in]0,1[$.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $P_\Delta(H)$, $P_\Delta(V)$ et $P_\Delta(D)$ des événements H, V, D sachant l'événement Δ.
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\Delta, \overline{\Delta})$ pour en déduire que la probabilité que les jetons ne soient pas alignés est égale à :

$$P(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$$

3. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée ?