EML - Ecricome 2014

Option Économique

Exercice 1

On considère l'application $\varphi :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie I : Etude de la fonction φ

1. Calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \dfrac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$.
2. Etudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
   En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'(x) \geqslant e$.
3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3;+\infty[, \varphi(x) \geqslant ex$.
   On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.
6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.
7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
8. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

Partie II : Etude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3e^n$. (On pourra utiliser les résultats de la partie I).
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
3. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si x=0} \end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n existe.
2. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
3. Calculer, pour $x > 0$, $f'(x)$.

4. Établir que :

$$\forall x \geqslant e-1, \quad f(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad (x+1)\ln(x+1) \geqslant (x+1)$$

En déduire que :

$$\forall x \geqslant e-1, \quad f'(x) \geqslant 0$$

5. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e-1 \leqslant u_n$$

6. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L.

Exercice 3

On considère l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. (a) Soit $(M,N) \in \varepsilon^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $M+N \in \varepsilon$, $\lambda M \in \varepsilon$.
   (b) Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$. Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
2. Etablir que ε est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M,N) \in \varepsilon^2, MN \in \varepsilon$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de ε, si M est inversible alors $M^{-1} \in \varepsilon$.

   Pour toute matrice de ε, on note $f(M) = TMT$.
4. (a) Montrer que pour tout $M \in \varepsilon$, $f(M) \in \varepsilon$.
   (b) Soit $(M,N) \in \varepsilon^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(\lambda M + N) = \lambda f(M) + f(N)$.
5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est bijective.
6. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A,B,C).

   On note $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $F - \lambda I_3$ ne soit pas inversible. Pour cette valeur de λ, trouver l'ensemble des $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $FX = \lambda X$.
8. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \varepsilon$.
   On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
9. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I+aH)^n$.
10. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.
11. Trouver une matrice G de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.