Correction du sujet ESSEC

03/03/22

Remarque :

Dans cette correction, nous utiliserons régulièrement la propriété suivante : Etant donnés A et B deux ensembles, $\min(A \cup B) = \min(\min(A), \min(B))$.

1. $\displaystyle\min_{i\in[|0;4|]} \frac{(-1)^i}{i+1} = \min\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\}$. Donc $\boxed{\displaystyle\min_{i\in[|0;4|]} \frac{(-1)^i}{i+1} = -\frac{1}{2}.}$

2. (a) Pour tout entier naturel n et pour tout entier k

$$u_n(k+1) = \min_{i\in[|n;n+k+1|]} x_i = \min\left(\min_{i\in[|n;n+k|]} x_i,\ x_{n+k+1}\right) = \min(u_n(k), x_{n+k+1})$$

On en déduit que $u_n(k+1) \leq u_n(k)$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n(k))_{k\geq 0} \text{ est décroissante}}$.

(b) La suite $(x_n)_{n>0}$ étant une suite de réels positifs, alors pour tous entiers k et n, $u_n(k)$ est positif. Donc la suite $(u_n(k))_{k\geq 0}$ est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n(k))_{k\geq 0} \text{ est convergente et sa limite est positive.}}$

(c) Pour tout n,

$$u_{n+1}(k) = \min_{i\in[|n+1;n+k+1|]} x_i \text{ donc } u_n(k+1) = \min(x_n, u_{n+1}(k))$$

ainsi $\boxed{u_n(k+1) \leq u_{n+1}(k)}$ et en passant à la limite quand k tend vers $+\infty$, $u_n \leq u_{n+1}$. On en déduit que la suite $\boxed{(u_n)_{n>0} \text{ est croissante.}}$

(d) D'après le théorème de la limite monotone, comme la suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante, soit elle majorée et elle converge, soit elle n'est pas majorée et la suite diverge vers $+\infty$. Dans tous les cas, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n>0} \text{ admet une limite finie ou non.}}$

3. (a) Soit la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par $y_n = 1 + (-1)^n$.
Pour tout entier naturel n et tout entier naturel $k \geq 1$,

$$\{y_i /\ i \in [|n, n+k|]\} = \{0, 2\}$$

Donc la suite $(u_n(k))_{k\geq 1}$ est $\boxed{\text{la suite constante égale à } 0}$.

Soit la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par $z_n = 2$ si n pair et $z_n = n$ si n impair.
Pour tout entier $k \geq 1$,$\min\{z_i /\ i \in [|n, n+k|]\}$ correspond au plus petit nombre entre 2 et le plus petit nombre impair supérieur ou égal à n.
Ainsi si $n = 0$ ou $n = 1$, ce minimum vaut 1 et $\boxed{(u_0(k))_{k\geq 1} \text{ et } (u_1(k))_{k\geq 1} \text{ sont constantes égales à } 1}$ et pour tout $n \geq 2$, $\boxed{(u_n(k))_{k\geq 1} \text{ est constante égale à } 2}$.

(b) Pour $(y_n)_{n\geq 0}$, on a $u_n = 0$ pour tout n, donc la suite (u_n) est constante et donc convergente de limite 0. Pour $(z_n)_{n\geq 0}$

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \leq 1 \\ 2 & \text{si} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

La suite (u_n) est constante à partir du troisième rang, donc elle converge, de limite 2. On en déduit que $\boxed{\liminf y_n = 0 \qquad \liminf z_n = 2}$.

4. (a) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de réels positifs. Pour tout entier naturel n, et tout entier k

$$u_n(k) = \min\{x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}\} = x_n$$

Donc la suite $(u_n(k))_{k\geq 0}$ est constante égale à x_n. En conséquence, $(u_n(k))_{k\geq 0}$ est convergente de limite x_n, et $\boxed{\liminf x_n = \lim x_n = l}$.

(b) Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de réels positifs, alors est minorée par 0 et d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ. D'autre part $u_n(k) = \min\{x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}\} = x_{n+k}$ et $u_n = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} x_{n+k} = \ell$. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 0} \text{ converge vers } \ell}$.

(c) i. Si tous les réels $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sont des éléments de I, il en est de même de son plus petit élément (qui est l'un d'entre eux). Donc $\boxed{\min_{i\in[|1,r|]} \alpha_i \text{ est un élément de } I}$.

ii. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs convergente de limite ℓ et soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $x_n \in]\ell + \epsilon, \ell + \epsilon[$. Pour tout entier naturel $n \geq N$ et pour tout entier naturel k, on sait d'après la question précédente que $\min_{i\in[|n;n+k|]} x_i$ existe et est un élément $\{x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}\}$, noté $u_n(k)$, et donc un élément de $]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$. La suite $(u_n(k)_{k\geq 0}$ est une suite décroissante (questio 2.a) d'éléments de $]\ell-\epsilon, \ell+\epsilon[$, donc converge vers u_n, lui même élément de cet intervalle. Ainsi :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$$

et $\boxed{(u_n)_{n\geq 0} \text{ est convergent de limite } \ell \text{ et } \liminf x_n = \ell}$.

5. (a) Soit h et k deux réels positifs tels que $h \leq k$. On a

$$\varphi_x(k) = \min\left(\min_{u\in[x;x+h]} f(u), \min_{u\in[x+h;x+k]} f(u)\right) \leq \min_{u\in[x;x+h]} f(u)$$

Ainsi $\varphi_x(k) \leqslant \varphi_x(h)$ et la fonction $\boxed{\varphi_x \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

(b) La fonction φ_x est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle admet une limite finie en } +\infty.}$

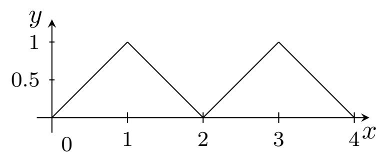
(c) Soit x et y deux réels positifs tels que $x \leq y$. Pour tout $h \geq y - x$,

$$\varphi_x(h) = \min\left(\min_{u\in[x;y]} f(u), \min_{u\in[y;y+h-(y-x)]} f(u)\right) \leq \min_{u\in[y;y+h-(y-x)]} f(u)$$

Donc $\varphi_x(h) \leq \varphi_y(h - (y - x))$. En passant à la limite quand h tend vers $+\infty$, $\Phi_x \leq \Phi_y$. On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } x \mapsto \Phi_x \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.}$

(d) La fonction $x \mapsto \Phi_x$ est croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\Phi_x \text{ admet une limite finie ou non en } +\infty.}$

(e) i. On obtient la représentation graphique suivante :



ii. La fonction f est 2-périodique, ce qui signifie que l'image d'un intervalle d'amplitude 2 est l'image de $[0; 2]$, c'est à dire $[0; 1]$. Il s'ensuit que $\min_{u\in[x;x+h]} f(u) = \min[0; 1]$ et ainsi pour réel $x \geq 0$ et tout réel $h \geq 2$, $\boxed{\varphi_x(h) = 0.}$

iii. Il en résulte que $\Phi_x = 0$ et donc $\boxed{\liminf_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$

(f) i. Pour tout $h \geq 0$, $\varphi_x(h) = \min_{u\in[x;x+h]} f(u)$, on a donc $\boxed{\varphi_x(h) \leq f(x).}$

ii. Par passage à la limite, quand h tend vers $+\infty$, $\Phi_x \leq f(x)$.

iii. Soit $\ell > 0$ tel que $\liminf_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Pour tout réel positif x et tout réel h positif,

$$\Phi_x \leq \varphi_x(h) \leq f(x)$$

et il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \geq x_0$, $\Phi_x \geq \frac{\ell}{2}$ et, par transitivité, $f(x) \geq \frac{\ell}{2}$. En posant $\epsilon = \ell/2$, on a

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}_+, \exists \epsilon > 0, \forall x \geq x_0, f(x) \geq \epsilon$$

(g) Soit $\epsilon > 0$. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$ $\ell - \epsilon \leq \Phi_{x,g} \leq g(x) \leq f(x)$, où $\Phi_{x,g}$ désigne la limite de la fonction $h \mapsto \min_{u\in[x;x+h]} g(u)$.

Pour tout réel $x \geq x_0$, $\min_{u\in[x;x+h]} f(u) \geq \ell - \epsilon$ et par passage à la limite, quand h tend vers $+\infty$, $\Phi_{x,h} \geq \ell - \epsilon$. Comme ϵ peut prendre n'importe quelle valeur positive, et que la fonction $x \mapsto \Phi_{x,h}$ est croissante, alors $\boxed{\liminf_{x\to+\infty} f(x) \geq \ell.}$