Sujet ESSEC

Limite inférieure d'une suite et d'une fonction

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$, on notera $[|a,b|] = \{k \in \mathbb{Z},\ a \leq k \leq b\}$ l'intervalle d'entiers d'extrémités a et b.
Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels et I ensemble fini d'entiers naturels, on notera $\min\limits_{i\in I} x_i$ le plus petit élément l'ensemble $\{x_i\ i \in I\}$. Par exemple $\min\limits_{i\in[|1,9|]} \frac{1}{i} = \frac{1}{9}$.

1. Un exemple : Déterminer $\min\limits_{i\in[|0;4|]} \frac{(-1)^i}{i+1}$.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on pose pour tout k de $\mathbb{N}$, $u_n(k) = \min\limits_{i\in[|n;n+k|]} x_i$.
   Montrer que la suite $(u_n(k))_{k\geq 0}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(u_n(k))_{k\geq 0}$ est convergente. On note $u_n = \lim\limits_{k\to+\infty} u_n(k)$.
   (c) Etablir une inégalité entre les réels $u_{n+1}(k)$ et $u_n(k+1)$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une limite (qui peut être $+\infty$). Cette limite est appelée **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et est notée** $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$**.**
3. Soient les deux suites réelles positives $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = 1 + (-1)^n, \qquad z_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

   (a) Expliciter pour n positif ou nul et k supérieur ou égal à 1 les termes $u_n(k)$ associés à chacune des deux suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Déterminer $\liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} z_n$.
4. (a) On suppose ici que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de réels positifs. Comparer u_n et x_n et en déduire que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers un réel ℓ alors $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.
   (b) Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergente vers un réel ℓ, alors $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$.
   (c) Démontrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, convergente vers $\ell \geq 0$, alors $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$. (On pourra en revenir à la définition de la convergence).
5. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   (a) Pour x un réel positif fixé, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall h > 0\ \varphi_x(h) = \min_{u\in[x;x+h]} f(u)$$

   Monter que la fonction φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) En déduire que $\varphi_x(h)$ a une limite dans $\mathbb{R}_+$ quand h tend vers $+\infty$. On note Φ_x cette limite.
   (c) Montrer que la fonction $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (d) En déduire que la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi_x$ existe (noter qu'elle peut valoir $+\infty$). On la note **la limite inférieure de** f **et elle est notée** $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x)$**.**
   (e) Un exemple : soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

   et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+2)$ (on dit que f est périodique de période 2).
      i. Représenter graphiquement f sur le segment $[0;4]$.

ii. Que vaut $\varphi_x(h)$ pour x positif et h supérieur ou égal à 2 ?

iii. En déduire Φ_x puis $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(f) f est de nouveau une fonction quelconque, continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et on reprend les notations de 5(a) et 5(b).

i. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout réel h positif, on a $f(x) \geq \varphi_x(h)$.

ii. En déduire l'inégalité $\Phi_x \leq f(x)$.

iii. On suppose que $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$. Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ϵ strictement positifs tels que pour tout $x \geq x_0$, on a $f(x) \geq \epsilon$.

(g) Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que pour tout $x \geq 0$ $f(x) \geq g(x)$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$. Montrer que $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.