

Correction Essec II 2016 - Voie économique

Première partie

1. (a) Décomposons l'événement $[X > j - 1]$ en union de 2 événements incompatibles :

$$[X > j - 1] = [X = j] \cup [X > j]$$

(car les valeurs strictement supérieures $j-1$ sont la valeur j et les valeurs strictement supérieures à j). Ainsi,

$$P(X > j - 1) = P(X = j) + P(X > j) \Leftrightarrow P(X = j) = P(X > j - 1) - P(X > j)$$

- (b) Soit p un entier naturel non nul,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p j P(X = j) &= \sum_{j=1}^p j P(X > j - 1) - \sum_{j=1}^p j P(X > j) && \text{(d'après 1. puis linéarité de la somme)} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) P(X > k) - \sum_{j=1}^p j P(X > j) && \text{(en posant le changement d'indice } k = j - 1 \text{)} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} k P(X > k) + \sum_{k=0}^{p-1} P(X > k) - \sum_{j=1}^p j P(X > j) && \text{(linéarité de la somme)} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} k P(X > k) - \sum_{j=1}^p j P(X > j) + \sum_{k=0}^{p-1} P(X > k) \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{p-1} k P(X > k) - \sum_{j=1}^{p-1} j P(X > j) - p P(X > p) + \sum_{k=0}^{p-1} P(X > k) \\ &= -p P(X > p) + \sum_{k=0}^{p-1} P(X > k) \end{aligned}$$

2. (a) i. X admet une espérance donc d'après la définition de l'espérance, $\sum k P(X = k)$ converge absolument donc converge.

ii.

$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(X = k) - \sum_{k=1}^p k P(X = k) = E(X) - \sum_{k=1}^p k P(X = k) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} E(X) - E(X) = 0$$

iii.

$$\begin{aligned}
 pP(X > p) &= pP\left(\bigcup_{k=p+1}^{+\infty} [X = k]\right) \\
 &= p \sum_{k=p+1}^{+\infty} P(X = k) \quad (\text{union d'événements 2 à 2 incompatibles}) \\
 &= \sum_{k=p+1}^{+\infty} pP(X = k) \quad (\text{linéarité}) \\
 &\geq \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X = k) \quad (\text{sommation d'inégalité})
 \end{aligned}$$

car si $k \in \llbracket p+1, +\infty \rrbracket$ alors $p \leq k$ donc $pP(X = k) \leq kP(X = k)$ (car $P(x = k) \geq 0$).

iv. D'après 1.(b), on a :

$$\sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) = \sum_{j=1}^p jP(X = j) + pP(X > p)$$

qui admet donc bien une limite lorsque p tend vers $+\infty$ comme somme de deux suites convergentes d'après 2.(a)i. et 2.(a)iii.

v. On fait tendre p vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j) = \sum_{j=1}^{+\infty} jP(X = j) + \lim_{p \rightarrow +\infty} pP(X > p) = \mu + 0 = \mu$$

(b) i.

$$v_{p+1} - v_p = \sum_{j=0}^p P(X > j) - \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) = \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) + P(X > p) - \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) = P(X > p) \geq 0$$

La suite (v_p) est croissante (donc admet une limite finie ou tend vers $+\infty$).

ii. D'après la question 1.(b), on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^p jP(X = j) &\leq v_p \quad (\text{car } pP(X > p) \geq 0) \\
 &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j) \quad (\text{car } (v_p) \text{ est croissante donc sous sa limite})
 \end{aligned}$$

iii. La série de terme général $jP(X = j)$ est croissante (en tant que série à terme général positif) et majorée d'après la question 2.(b)ii. donc elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone. Elle est donc aussi absolument convergente car à termes positifs. Par définition de l'espérance, X admet bien une espérance.

(c) D'après la question 2.(a), si X admet une espérance alors la série de terme général $P(X > j)$ converge. D'après la question 2.(b), la réciproque est vraie. Ainsi, les propriétés sont bien équivalentes.

3. (a) D'après la question 1.(a), on a pour tout $j \geq 1$:

$$P(X = j) = P(X > j-1) - P(X > j) = \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha}$$

Ainsi,

- $\forall j \in \mathbb{N}^*, j^\alpha \leq (j+1)^\alpha$ (croissance de $x \mapsto x^\alpha$ sur \mathbb{R}_+^*) $\Rightarrow \frac{1}{j^\alpha} \geq \frac{1}{(j+1)^\alpha}$ (décroissance de l'inverse sur \mathbb{R}_+^*), donc $P(X = j) \geq 0$.
- $\forall N \geq 1, \sum_{j=1}^N P(X = j) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \right) = 1 - \frac{1}{(N+1)^\alpha}$ par télescopage.

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P(X = j) = \lim_{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{(N+1)^\alpha} = 1$$

On définit donc bien une loi de probabilité.

- (b) D'après la question 2.(c), on sait que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X > j)$ converge.
Or $P(X > j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \sim \frac{1}{j^\alpha}$. On reconnaît le terme général d'une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha > 1$.
Donc par théorème de comparaison, X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$.

- (c) $\forall j \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X = j) &= \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} = \frac{1}{j^\alpha} \left(1 - \frac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha} \right) = \frac{1}{j^\alpha} \left(1 - \frac{j^\alpha}{\left(j\left(1 + \frac{1}{j}\right)\right)^\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{j^\alpha} \left(1 - \frac{j^\alpha}{j^\alpha \left(1 + \frac{1}{j}\right)^\alpha} \right) = \frac{1}{j^\alpha} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{j}\right)^\alpha} \right) \end{aligned}$$

- (d) i. f est définie (car $1+x > 0$ sur $[0, 1]$) et dérivable sur $[0, 1]$ comme composée et somme de fonctions usuelles dérivables sur $[0, 1]$.

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) = \alpha(1+x)^{-\alpha-1} - \alpha = \alpha \left[\frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} - 1 \right] = \alpha \frac{1 - (1+x)^{\alpha+1}}{(1+x)^{\alpha+1}}.$$

Ainsi, comme $\alpha > 0$ et $x \in [0, 1]$, $f'(x)$ est du signe de $1 - (1+x)^{\alpha+1} \leq 0$ car $1+x \geq 1$ donc $(1+x)^{\alpha+1} \leq 1^{\alpha+1} = 1$.

f est donc décroissante sur $[0, 1]$.

- ii. On sait par décroissance de f que $\forall x \in [0, 1], f(x) \leq f(0) = 0$. On pose alors $x = \frac{1}{j} \in [0, 1]$ car $j \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{j} \leq 1$. on obtient :

$$1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{j}\right)^\alpha} - \alpha \frac{1}{j} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{j}\right)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{j}$$

Ainsi, d'après 3.(c),

$$\frac{1}{j^\alpha} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{j}\right)^\alpha} \right) \leq \frac{1}{j^\alpha} \frac{\alpha}{j} = \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}}$$

- (e) On remarque que $X = \frac{1}{j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$, ainsi, par développement limité d'ordre 2 on a :

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{j}\right)^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{-\alpha} = 1 - \alpha \frac{1}{j} + \frac{-\alpha(-\alpha-1)}{2} \frac{1}{j^2} + o\left(\frac{1}{j^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } j^{\alpha+1} P(X = j) &= \frac{j^{\alpha+1}}{j^\alpha} \left(1 - 1 + \alpha \frac{1}{j} + \frac{\alpha(-\alpha-1)}{2} \frac{1}{j^2} + o\left(\frac{1}{j^2}\right) \right) = j \left(\alpha \frac{1}{j} + \frac{\alpha(-\alpha-1)}{2} \frac{1}{j^2} + o\left(\frac{1}{j^2}\right) \right) = \\ &= \alpha + \frac{\alpha(-\alpha-1)}{2} \frac{1}{j} + o\left(\frac{1}{j}\right) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \alpha. \end{aligned}$$

- (f) D'après la question précédente, comme $\alpha > 0$, on obtient $j^{\alpha+1} P(X = j) \sim \alpha \Leftrightarrow P(X = j) \sim \alpha \frac{1}{j^{\alpha+1}} \Leftrightarrow j^2 P(X = j) \sim \alpha \frac{1}{j^{\alpha-1}}$.
On reconnaît le terme général d'une série de Riemann convergente si et seulement si $\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$.

Ainsi X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2, si et seulement si la série de terme général $j^2 P(X = j)$ converge absolument, si et seulement si $\alpha > 2$ par théorème de comparaison avec la série de Riemann ci-dessus.

Deuxième partie : Etude de la probabilité de panne un jour donné.

4. (a) On a l'égalité d'événements $A_1 = [X_1 = 1]$ car l'événement A_1 signifie qu'un composant tombe en panne à l'instant 1 (premier instant), il s'agit forcément du premier composant puisqu'aucun composant n'a pu tomber en panne précédemment.
Ainsi, $P(A_1) = P(X_1 = 1) \Leftrightarrow u_1 = p_1$.

- (b) i. On décompose l'événement A_2 sur le s.c.e $\{A_1, \overline{A_1}\}$:

$$A_2 = A_1 \cap A_2 \cup \overline{A_1} \cap A_2$$

- L'événement $A_1 \cap A_2$ signifie qu'un composant est tombé en panne à l'instant 1 (forcément le premier composant) et un composant est tombé en panne à l'instant 2 (forcément le deuxième composant) ; ainsi $A_1 \cap A_2 = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$.
- L'événement $\overline{A_1} \cap A_2$ signifie que le premier composant tombe en panne à l'instant 2 donc $\overline{A_1} \cap A_2 = [X_1 = 2]$.

On a bien :

$$A_2 = [X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$$

- ii. Les événements de l'union ci-dessus sont incompatibles donc

$$\begin{aligned} u_2 = P(A_2) &= P(X_1 = 2) + P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) \\ &= P(X_1 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) \quad (\text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2) \\ &= p_2 + p_1^2 \quad (\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi}) \end{aligned}$$

- (c) i. On sait que (X_i) est une suite de variables mutuellement indépendantes donc $X_1, \tilde{X}_1 = X_2, \tilde{X}_2 = X_3, \dots$ sont mutuellement indépendantes par lemme des coalitions.
De plus, d'après l'énoncé, $\forall i \geq 1, \tilde{X}_i = X_{i+1}$ a même loi que X_1 .

- ii. Soit $k < n$, on sait d'après l'énoncé que l'événement A_n signifie qu'un composant tombe en panne le jour n i.e. :

$$A_n = \bigcup_{j \geq 1} [T_j = n]$$

donc par distributivité de l'union par rapport à l'intersection,

$$\begin{aligned} A_n \cap [X_1 = k] &= \bigcup_{j \geq 1} [X_1 = k] \cap [T_j = n] \\ &= \bigcup_{j \geq 2} [X_1 = k] \cap [T_j = n] \quad (\text{car } [X_1 = k] \cap [T_1 = n] = [X_1 = k] \cap [X_1 = n] = \emptyset) \\ &= \bigcup_{j \geq 2} [X_1 = k] \cap [k + X_2 + X_3 + \dots + X_j = n] \\ &= \bigcup_{j \geq 2} [X_1 = k] \cap [X_2 + X_3 + \dots + X_j = n - k] \\ &= \bigcup_{j \geq 2} [X_1 = k] \cap [\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_{j-1} = n - k] \\ &= \bigcup_{j \geq 1} [X_1 = k] \cap [\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_j = n - k] \quad (\text{changement d'indice } j = j - 1) \\ &= [X_1 = k] \cap \bigcup_{j \geq 1} [\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_j = n - k] \end{aligned}$$

iii. $\forall 1 \leq k < n$,

$$\begin{aligned}
P_{[X_1=k]}(A_n) &= \frac{P(A_n \cap [X_1 = k])}{P(X_1 = k)} \\
&= \frac{P\left([X_1 = k] \cap \bigcup_{j \geq 1} [\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_j = n - k]\right)}{P(X_1 = k)} \quad (\text{d'après 4.(c)ii.}) \\
&= \frac{P(X_1 = k) \sum_{j \geq 1} P(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_j = n - k)}{P(X_1 = k)} \\
&\quad (\text{par indépendance des événements de l'intersection (d'après 4.(c)i. et par lemme des } \\
&\quad \text{coalitions) et incompatibilité 2 à 2 des év. de l'union)} \\
&= \sum_{j \geq 1} P(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_j = n - k) \\
&= \sum_{j \geq 1} P(T_j = n - k) \quad (\text{car } \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_j \text{ a même loi que } T_j \text{ en tant que somme} \\
&\quad \text{de v.a.r. indépendantes, toutes de même loi que } X_1) \\
&= P\left(\bigcup_{j \geq 1} P(T_j = n - k)\right) \\
&= P(A_{n-k})
\end{aligned}$$

(d) Par formule des probabilités totales sur le s.c.e $([X_1 = k])_{k \geq 1}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(A_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) P_{[X_1=k]}(A_n) \\
&= \sum_{k=1}^n P(X_1 = k) P_{[X_1=k]}(A_n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X_1 = k) P_{[X_1=k]}(A_n) \\
&= \sum_{k=1}^n P(X_1 = k) P_{[X_1=k]}(A_n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 0 \quad (\text{car si } k > n, \text{ un composant ne peut pas tomber en} \\
&\quad \text{panne à l'instant } n \text{ alors que le premier composant tombe en panne à l'instant } k > n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P(X_1 = k) P(A_{n-k}) + P(X_1 = n) P_{[X_1=n]}(A_n) \quad (\text{d'après 4.(c)iii.}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} p_k u_{n-k} + p_n \times 1 \\
&= p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \dots + p_{n-1} u_1 + p_n u_0 \quad (\text{car } u_0 = 1)
\end{aligned}$$

```

(e) U=zeros(1,n+1)
U(1)=1
for k=1:n do
    U(k+1)=0
    for j=1:k do
        U(k+1)= U(k+1)+P(j)*U(k+1-j)
    end
end
disp(U(n+1))

```

$$5. (a) P(X_1 > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(X_1 = j) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \lambda(1-\lambda)^{j-1} = \lambda \sum_{i=k}^{+\infty} (1-\lambda)^i = \lambda(1-\lambda)^k \times \frac{1}{1-(1-\lambda)} = (1-\lambda)^k.$$

$$\begin{aligned}
(b) P_{[X_1 > k]}(X_1 = k+1) &= \frac{P([X_1 > k] \cap [X_1 = k+1])}{P(X_1 > k)} = \frac{P(X_1 = k+1)}{P(X_1 > k)} \text{ car } [X_1 = k+1] \subset [X_1 > k]. \\
\text{Ainsi, } P_{[X_1 > k]}(X_1 = k+1) &= \frac{\lambda(1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^k} = \lambda.
\end{aligned}$$

(c) Démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $P(n) : "P(A_n) = \lambda"$:

- $P(A_1) = P(X_1 = 1) = \lambda(1 - \lambda)^0 = \lambda$ donc $P(1)$ est vraie.
- Supposons qu'il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(k)$ est vraie ; calculons $P(A_{n+1})$:

$$\begin{aligned}
 P(A_{n+1}) = u_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} p_k u_{n+1-k} \quad (\text{d'après 4.(d)}) \\
 &= \sum_{k=1}^n p_k u_{n+1-k} + p_{n+1} u_0 \\
 &= \sum_{k=1}^n p_k \lambda + p_{n+1} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\
 &= \lambda \sum_{k=1}^n p_k + p_{n+1} \\
 &= \lambda P(X_1 \geq n) + P(X_1 = n + 1) \\
 &= \lambda - \lambda P(X_1 > n) + P(X_1 = n + 1) \\
 &= \lambda - P(X_1 > n) \left[\lambda - \frac{P(X_1 = n + 1)}{P(X_1 > n)} \right] \\
 &= \lambda - P(X_1 > n) [\lambda - P_{[X_1 > n]}(X_1 = n + 1)] \\
 &= \lambda - P(X_1 > n) [\lambda - \lambda] \quad (\text{d'après 5.(b)}) \\
 &= \lambda
 \end{aligned}$$

- Conclusion, par principe de récurrence forte, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. (a) La famille d'événement $([X_1 = k])_{k \geq 2}$ forme un s.c.e donc $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1 \Leftrightarrow p_1 + p_2 + \sum_{k=3}^{+\infty} p_k = 1 \Leftrightarrow$

$$p + 1 - p + \sum_{k=3}^{+\infty} p_k = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=3}^{+\infty} p_k = 0.$$

Or cette somme est à termes tous positifs donc comme cette somme est nulle, tous les termes sont nuls. Ainsi,

$$\forall k \geq 3, p_k = 0$$

(b) Soit la matrice

$$M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p u_{n-1} + (1-p) u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

Or, d'après 4.(d), $u_n = p_1 u_{n-1} + p_2 u_{n-2} + \dots + p_{n-1} u_1 + p_n u_0 = p u_{n-1} + (1-p) u_{n-2} + \sum_{k=3}^n 0 u_{n-k} = p u_{n-1} + (1-p) u_{n-2}$.

Ainsi,

$$M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p u_{n-1} + (1-p) u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

(c) i. On cherche les valeurs λ telles que $M - \lambda I$ non inversible par méthode du pivot, on trouve :

$$\text{Sp}(M) = \{1, p - 1\}$$

On remarque que, comme $0 < p < 1$, alors $-1 < p - 1 < 0$ donc M a deux valeurs propres distinctes. Ainsi, elle est bien diagonalisable.

On résout les équations $MX = X$ et $MX = (p - 1)X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on trouve respectivement $E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_{p-1}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi, si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix}$, par formule de changement de base, on a $M = PDP^{-1}$.

ii. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $P(n)$: " $M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ".

$$\bullet \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^0}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1+1-p & 1-p+p-1 \\ 1-1 & 1-p+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 2-p & 0 \\ 0 & 2-p \end{pmatrix} = I = M^0 \text{ donc } P(1) \text{ est vraie.}$$

• Supposons qu'il existe un rang $n \geq 1$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors,

$$\begin{aligned} M^n &= M^{n-1}M \\ &= \left(\frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^n}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{après calcul des produits matriciels}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

• Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) i. D'après les résultats 6.(b), on peut prouver par une récurrence évidente que $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} =$

$$M^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule la première ligne de ce produit matriciel, on obtient :

$$u_n = \frac{1 - (p-1)^{n+1}}{2-p}$$

ii.

$$u_n = \frac{1 - (p-1)^{n+1}}{2-p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-p} \quad \text{car } -1 < p-1 < 0 < 1.$$

Troisième partie : Etude de la durée de fonctionnement.

7. la suite (X_i) est une suite de v.a.r. indépendamment distribuées donc $\forall i \geq 1$, X_i a une espérance et $E(X_i) = \mu$.

Ainsi, par linéarité de l'espérance, T_k a une espérance, qui vaut :

$$E(T_k) = \sum_{i=1}^k E(X_i) = k\mu$$

8. On suppose, **dans cette question**, que α est strictement supérieur à 2. X_1 admet donc une variance σ^2 .

(a) Les variables X_1, \dots, X_n étant indépendantes, i.i.d., T_k admet donc une variance qui vaut :

$$V(T_k) = \sum_{i=1}^k V(X_i) = k\sigma^2$$

(b) T_k admettant une variance, on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $k\varepsilon > 0$:

$$P(|T_k - E(T_k)| \geq k\varepsilon) \leq \frac{V(T_k)}{k^2\varepsilon^2} \Leftrightarrow P(|T_k - k\mu| \geq k\varepsilon) \leq \frac{k\sigma^2}{k^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

(c) On passe à l'événement contraire, on obtient :

$$P(|T_k - k\mu| < k\varepsilon) = 1 - P(|T_k - k\mu| \geq k\varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

Or, $[|T_k - k\mu| < k\varepsilon] = [-k\varepsilon < T_k - k\mu < k\varepsilon] = [k(\mu - \varepsilon) < T_k < k(\mu + \varepsilon)] = [\mu - \varepsilon < \frac{T_k}{k} < \mu + \varepsilon]$.

Ainsi,

$$(1 \geq) P(\mu - \varepsilon < \frac{T_k}{k} < \mu + \varepsilon) = P(|T_k - k\mu| < k\varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1 \quad (\text{par théorème d'encadrement}).$$

9. Effectuons une disjonction de cas sur le s.c.e. $\{[X_i \leq m], [X_i > m]\}$:

- Si $X_i \leq m$ alors $Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} = X_i + 0 = X_i$.
- Si $X_i > m$ alors $Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} = 0 + X_i = X_i$.

Ainsi,

$$Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} = X_i$$

(a)

- (b) i. Posons f_m la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_m(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Alors, $Z_1^{(m)} = f_m(X_1)$.

Ainsi, par théorème de transfert, sous réserve de convergence absolue, on a :

$$\begin{aligned} E(Z_1^{(m)}) = E(f_m(X_1)) &= \sum_{i=1}^{+\infty} f_m(i)P(X_1 = i) \\ &= \sum_{i=1}^m f_m(i)P(X_1 = i) + \sum_{i=m+1}^{+\infty} f_m(i)P(X_1 = i) \\ &= \sum_{i=1}^m 0P(X_1 = i) + \sum_{i=m+1}^{+\infty} iP(X_1 = i) \end{aligned}$$

Or $\alpha > 1$ donc X_1 admet une espérance donc la série de terme général $iP(X_1 = i)$ converge absolument.

$Z_1^{(m)}$ admet bien une espérance et

$$\begin{aligned} E(Z_1^{(m)}) &= \sum_{i=m+1}^{+\infty} iP(X_1 = i) \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha} \quad (\text{d'après 3.(d)ii.}) \end{aligned}$$

ii. On applique la méthode de comparaison série-intégrale :

- Montrons que pour tout $i \geq m+1$, $\frac{\alpha}{i^\alpha} \leq \int_{i-1}^i \frac{\alpha}{x^\alpha} dx$:

$$\forall x \in \llbracket i-1, i \rrbracket, x \leq i \Rightarrow x^\alpha \leq i^\alpha \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha} \geq \frac{1}{i^\alpha}.$$

On intègre l'inégalité obtenue sur $[i-1, i]$, on obtient : $\int_{i-1}^i \frac{\alpha}{x^\alpha} dx \geq \frac{\alpha}{i^\alpha}$

- Sommons l'inégalité obtenue sur $\llbracket m+1, +\infty \rrbracket$:

$$\sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha} \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} \int_{i-1}^i \frac{\alpha}{x^\alpha} dx = \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx \text{ par relation de Chasles.}$$

Ainsi,

$$E(Z_1^{(m)}) \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha} \leq \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx$$

iii. $\forall A \geq m$:

$$\int_m^A \frac{\alpha}{x^\alpha} dx = \int_m^A \alpha x^{-\alpha} dx = \left[\frac{\alpha}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} \right]_m^A = \frac{\alpha}{-\alpha+1} A^{-\alpha+1} + \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{-\alpha+1} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{-\alpha+1}$$

car $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0$ donc $A^{-\alpha+1} = \frac{1}{A^{\alpha-1}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$.

iv. • $Z_1^{(m)} \geq 0$ car $X_i \geq 0$ et $0 \geq 0$ donc $E(Z_1^{(m)}) \geq 0$.

- $E(Z_1^{(m)}) \leq \int_m^{+\infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx = \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{-\alpha+1}$ d'après 9.(b)ii. et 9.(b)iii.

Ainsi,

$$0 \leq E(Z_1^{(m)}) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} m^{-\alpha+1}$$

Or, $\lim_{m \rightarrow +\infty} m^{-\alpha+1} = 0$ donc, par théorème d'encadrement, $\lim_{m \rightarrow +\infty} E(Z_1^{(m)}) = 0$.

v. $Y_1^{(m)} = X_1 - Z_1^{(m)}$ donc par linéarité de l'espérance, $Y_1^{(m)}$ admet une espérance qui vaut

$$E(Y_1^{(m)}) = E(X_1) - E(Z_1^{(m)}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mu - 0 = \mu$$

(c) i. D'après la définition de $Y_1^{(m)}$, on a $Y_1^{(m)} \leq X_1$ et $Y_1^{(m)} \leq m$ car si $X_1 \leq m$ alors $Y_1^{(m)} = X_1 \leq m$ et si $X_1 > m$ alors $Y_1^{(m)} = 0 \leq m < X_1$.
Ainsi, $(Y_1^{(m)})^2 = Y_1^{(m)} \times Y_1^{(m)} \leq mX_1$.

ii. $(Y_1^{(m)})^2 \geq 0$ et X_1 admet une espérance donc mX_1 admet une espérance, par théorème de comparaison, $Y_1^{(m)}$ admet alors un moment d'ordre 2 i.e. admet une variance.
De plus, par théorème de Koenig-Huygens, on a

$$V(Y_1^{(m)}) = E((Y_1^{(m)})^2) - E(Y_1^{(m)})^2 \leq E((Y_1^{(m)})^2) \leq E(mX_1) = m E(X_1) = m\mu$$

(d) $\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ donc par définition de la limite, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall m \geq m_0$,
 $\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha} \leq \varepsilon$

(e)

$$U_k^{(m)} + V_k^{(m)} = \sum_{i=1}^k Y_i^{(m)} + \sum_{i=1}^k Z_i^{(m)} = \sum_{i=1}^k (Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)}) = \sum_{i=1}^k X_i = T_k$$

(f) i. $Z_i^{(m)} = f_m(X_i)$ est de même loi que $Z_1^{(m)} = f_m(X_1)$ (car X_i et X_1 ont même loi) donc $E(Z_i^{(m)}) = E(Z_1^{(m)})$.

Ainsi, par linéarité de l'espérance, $V_k^{(m)}$ admet une espérance qui vaut

$$E(V_k^{(m)}) = \sum_{i=1}^k E(Z_i^{(m)}) = k E(Z_1^{(m)}) \leq k \times \frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha} \quad (\text{d'après 9.(b) i. et iii.})$$

ii. $V_k^{(m)} \geq 0$ et admet une espérance donc on peut appliquer l'inégalité de Markov :

$$P(V_k^{(m)} \geq k\varepsilon) \leq \frac{E(V_k^{(m)})}{k\varepsilon} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} \quad (\text{d'après 9.(f)i.})$$

(g) i. $U_k^{(m)} = T_k - V_k^{(m)}$ donc

$$E(U_k^{(m)}) = E(T_k) - E(V_k^{(m)}) = k\mu - E(V_k^{(m)}) \geq k\mu - k \frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha} \quad (\text{d'après 9.(f)i.})$$

ii. • D'après la question précédente, $E(U_k^{(m)}) - k\mu \geq -k \frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha} \geq -k\varepsilon$ d'après 9.(d).

• On sait que $U_k^{(m)} = T_k - V_k^{(m)} \leq T_k$ donc $E(U_k^{(m)}) \leq k\mu$ donc $E(U_k^{(m)}) - k\mu \leq 0 \leq k\varepsilon$.
Ainsi, $-k\varepsilon \leq E(U_k^{(m)}) - k\mu \leq k\varepsilon \Leftrightarrow |E(U_k^{(m)}) - k\mu| \leq k\varepsilon$.

iii. Montrons que

$$[|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon] \subset [|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\varepsilon] :$$

Si $[|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon]$ alors $U_k^{(m)} - k\mu \leq -2k\varepsilon$ ou $U_k^{(m)} - k\mu \geq +2k\varepsilon$:

• Si $U_k^{(m)} - k\mu \leq -2k\varepsilon$ alors $U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)}) = U_k^{(m)} - k\mu + k\mu - E(U_k^{(m)}) \leq -2k\varepsilon + 0 \leq -k\varepsilon$ donc $|E(U_k^{(m)}) - k\mu| \leq k\varepsilon$.

• Si $U_k^{(m)} - k\mu \geq 2k\varepsilon$ alors $U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)}) = U_k^{(m)} - k\mu + k\mu - E(U_k^{(m)}) \geq 2k\varepsilon - k\varepsilon$ car d'après 9.(g) ii. $E(U_k^{(m)}) - k\mu \leq k\varepsilon$ donc $k\mu - E(U_k^{(m)}) \geq -k\varepsilon$.

Ainsi,

$$[|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon] \subset [|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\varepsilon]$$

donc

$$P(|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon) \leq P(|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\varepsilon)$$

- iv. Les variables X_1, X_2, \dots, X_k sont mutuellement indépendantes donc, par lemme des coalitions, les variables $Y_1^{(m)}, Y_2^{(m)}, \dots, Y_k^{(m)}$ sont ainsi mutuellement indépendantes. Elles sont toutes de même loi que $Y_1^{(m)}$.

Ainsi, $U_k^{(m)}$ admet une variance qui vaut

$$V(U_k^{(m)}) = \sum_{i=1}^k V(Y_i^{(m)}) = k V(Y_1^{(m)}) \leq km\mu \quad (\text{d'après 9.(c)ii.})$$

v.

$$\begin{aligned} P\left(|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon\right) &\leq P\left(|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\varepsilon\right) \quad (\text{d'après 9.(g)iii.}) \\ &\leq \frac{V(U_k^{(m)})}{(k\varepsilon)^2} \quad (\text{par inégalité de Bienaymé-Tchebychev}) \\ &\leq \frac{km\mu}{k^2\varepsilon^2} \quad (\text{d'après 9.(g) iv.}) \\ &= \frac{m\mu}{k\varepsilon^2} \end{aligned}$$

(h) i. Par formule du Crible, on a

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

or $P(A \cup B) \leq 1$ (en tant que probabilité) donc $-P(A \cup B) \geq -1$, d'où :

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

ii. On remarque que si l'événement $A \cap B$ se produit alors :

- $T_k = U_k^{(m)} + V_k^{(m)} < k(\mu + 2\varepsilon) + k\varepsilon = k(\mu + 3\varepsilon)$.
- $T_k = U_k^{(m)} + V_k^{(m)} > k(\mu - 2\varepsilon) + 0 > k(\mu - 3\varepsilon)$ (car $V_k^{(m)}$ est positif comme somme de variables positives).

Ainsi, on a justifié que :

$$A \cap B \subset (T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[)$$

D'où

$$P(T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[) \geq P(A \cap B) \geq P(V_k^{(m)} < k\varepsilon) + P(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[) - 1$$

- iii. • D'après la question 9.(f)ii., on sait que $P(V_k^{(m)} < k\varepsilon) = 1 - P(V_k^{(m)} \geq k\varepsilon) \geq 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$.
- D'après la question 9.(g)v., on sait que $P(U_k^{(m)} \in]k(\mu - 2\varepsilon), k(\mu + 2\varepsilon)[) = P(|U_k^{(m)} - k\mu| < 2k\varepsilon) = 1 - P(|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon) \geq 1 - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$.

Ainsi, d'après 9.(h)ii.,

$$P(T_k \in]k(\mu - 3\varepsilon), k(\mu + 3\varepsilon)[) \geq 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} + 1 - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2} - 1 = 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}$$

iv. Pour tout $k \geq 1$, $\sqrt{k} \geq 1$ donc il existe un entier $m_k \in [\sqrt{k}, 2\sqrt{k}]$.

On a alors $\sqrt{k} \leq m_k \leq 2\sqrt{k}$, d'où $2^{1-\alpha} k^{\frac{1-\alpha}{2}} \leq m_k^{1-\alpha} \leq k^{\frac{1-\alpha}{2}}$ par décroissance de $x \mapsto x^{1-\alpha}$ sur \mathbb{R}_+^* (car $1 - \alpha < 0$).

Ainsi,

$$1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{k^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\varepsilon} - \frac{2\mu}{\sqrt{k}\varepsilon^2} \leq 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{m_k^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m_k\mu}{k\varepsilon^2} \leq 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{2^{1-\alpha} k^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\varepsilon} - \frac{\mu}{\sqrt{k}\varepsilon^2}$$

Ainsi, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{m_k^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m_k\mu}{k\varepsilon^2} = 1$$

car $\alpha > 1$ donc $\frac{1-\alpha}{2} < 0$.

De plus, $1 - \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{m_k^{1-\alpha}}{\varepsilon} - \frac{m_k\mu}{k\varepsilon^2} \leq P\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon[\right) \leq 1$ donc par théorème d'encadrement,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\frac{T_k}{k} \in]\mu - 3\varepsilon, \mu + 3\varepsilon[\right) = 1.$$