ESSEC II 2016

Le but du problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie etc...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse donc à une de ces pièces susceptibles de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée. Dans une première partie, on étudie quelques propriétés fondamentales des variables aléatoires discrètes. Puis, dans une deuxième partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné. Enfin, dans une troisième partie on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.
Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathrm{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathrm{V}(X)$ sa variance.
Les deuxième et troisième partie sont indépendantes, et peuvent en outre être traitées en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie

Dans cette première partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul,
$$\mathrm{P}(X = j) = \mathrm{P}(X > j - 1) - \mathrm{P}(X > j).$$
   (b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que
$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathrm{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathrm{P}(X > j) - p\,\mathrm{P}(X > p).$$
2. (a) On suppose que X admet une espérance $\mathrm{E}(X) = \mu$.
      i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\,\mathrm{P}(X = k)$.
      ii. Montrer que :
$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathrm{P}(X = k) = 0.$$
      iii. En déduire que
$$\lim_{p\to+\infty} p\,\mathrm{P}(X > p) = 0.$$
      iv. Montrer que la série de terme général $\mathrm{P}(X > j)$ converge.
      v. Montrer que
$$\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > j).$$
   (b) On suppose que $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > j)$ converge.
      i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geq 1}$ définie par
$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathrm{P}(X > j).$$
      ii. Comparer $\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathrm{P}(X = j)$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > j)$.
      iii. En déduire que X admet une espérance.
   (c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathrm{P}(X > j)$ converge.

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait

$$\mathrm{P}(X > j) = \frac{1}{(j+1)^{\alpha}}. \qquad (*)$$

   (a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

   (b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul

$$\mathrm{P}(X = j) = \frac{1}{j^{\alpha}}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^{\alpha}}\right).$$

   (d) i. Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0, 1]$.

   ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul,

$$\mathrm{P}(X = j) \leq \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}.$$

   (e) Montrer, en utilisant le résultat de (c), que

$$\lim_{j \to +\infty} j^{\alpha+1}\,\mathrm{P}(X = j) = \alpha.$$

   (f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Deuxième partie : Etude de la probabilité de panne un jour donné.

Dans cette deuxième partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ mutuellement indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du i-ème composant en fonctionnement.
Soit k un entier naturel non nul. On note $T_k = X_1 + ... + X_k$. T_k représente donc le jour où le k-ième composant tombe en panne. On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement A_n ="le composant en place le jour n tombe en panne" c'est-à-dire A_n = "il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$", et on se propose d'étudier $\mathrm{P}(A_n)$.

4. Pour tout entier naturel non nul j, on note $p_j = \mathrm{P}(X_1 = j)$ et $u_j = \mathrm{P}(A_j)$. On suppose que pour tout entier naturel non nul j, on a $p_j \neq 0$. On pose de plus par convention $u_0 = 1$.

   (a) Montrer que $u_1 = p_1$.

   (b) i. Montrer que $A_2 = [X_1 = 2] \bigcup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.

   ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.

   (c) Pour tout entier naturel i, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$. On admet que les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.

   i. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \cap \bigcup_{j\geq 1} [\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + ... + \tilde{X}_j = n - k].$$

   ii. En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n,

$$\mathrm{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathrm{P}(A_{n-k}).$$

   (d) Montrer que

$$u_n = u_{n-1}p_1 + ... + u_0 p_n.$$

5. Soit λ un réel appartenant à $]0, 1[$. **Dans cette question**, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ. Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathrm{P}(X_1 = j) = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.

   (a) Calculer $\mathrm{P}(X_1 > k)$ pour tout entier naturel k non nul.

   (b) Calculer $\mathrm{P}_{[X_1>k]}(X_1 = k+1)$.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathrm{P}(A_n) = \lambda.$$

6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$. Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.
   (a) Que vaut p_i pour i supérieur ou égal à 3.
   (b) Soit la matrice
   $$M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,
   $$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}.$$
   (c) i. Déterminer les valeurs de λ_1 et λ_2 pour lesquelles la matrice $M - \lambda_i I_2$ n'est pas inversible.
   ii. Pour chacune de ces valeurs, montrer que $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$ est un espace vectoriel, et en donner une base.
   iii. On pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $PM = DP$.
   iv. Montrer que
   $$M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (d) i. Exprimer u_n en fonction de p et de n.
   ii. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.