# EDHEC 2005

–

## Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine $O$
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse $k$ à l'instant $n$, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $p$ $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on note $X_n$ l'abscisse de ce point à l'instant $n$ et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ $X_n$ est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
Par ailleurs, on note $T$ l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que $T$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

1. a) Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables $X_i$.

   b) Donner la loi de $X_1$.

   c) En déduire $\mathrm{P}(T = k)$ pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$.

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $X_n(\Omega) = [[0, n]]$

   b) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que : $\mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - p$

3. a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \dots n+1\},\ \mathrm{P}(X_{n+1} = k) = p\,\mathrm{P}(X_n = k-1)$

   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\},\ \mathrm{P}(X_n = k) = p^k(1-p)$.
   En déduire également la valeur de $\mathrm{P}(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

   c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_n = k) = 1$.

4. a) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$

   b) En déduire que $E(X) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.

5. a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N},\ E\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(E\left(X_n^2\right) + 2E(X_n) + 1\right)$.

   b) Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = E\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$
   Montrer que $u_{n+1} = p\,u_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$

   c) En déduire l'expression de $u_n$, puis celle de $E\left(X_n^2\right)$ en fonction de $p$ et $n$.

   d) Montrer enfin que : $V(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\left(1 - (2n+1)\,p^n(1-p) - p^{2n+1}\right)$

# Problème

On lance une pièce équilibrée et on note $Z$ la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier "pile". La loi de $Z$ est donnée par $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout entier non nul $k$, $P(Z = k) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

Après cette série de lancers, si $Z$ a pris la valeur $k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de $k$ boules numérotées $1, 2, \cdots, k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.

On note $X$ la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. Etablir la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).
2. Montrer que $Z$ admet une espérance et une variance et les calculer.
3. a) Pour tout couple $(i, k)$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $\mathrm{P}_{[Z=k]}(X = i)$
   b) En déduire que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(X = i) = \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.
   c) On admet dans cette question que $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k}$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = i) = 1$
4. a) Montrer que, pour tout entier naturel $i$ non nul, on a : $i\mathrm{P}(X = i) \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}$
   b) En déduire que $X$ possède une espérance.
   c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question 4c), que $E(X) = \dfrac{3}{2}$
5. a) Utiliser le résultat de la question 5a) pour montrer que $X$ a un moment d'ordre 2.
   b) Etablir, alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question 4c), que $E\left(X^2\right) = \dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k$
   c) Déterminer les réels $a, b$ et $c$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.
   d) En déduire la valeur de $E\left(X^2\right)$ et vérifier que $V(X) = \dfrac{11}{12}$.
6. On admet que pour toute variable $X$ qui admet une variance, et pour tout $\epsilon > 0$,
$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$
   En déduire $\mathrm{P}(X \geq 3) \leq \dfrac{11}{27}$
7. On se propose de calculer $\mathrm{P}(X = 1)$, $\mathrm{P}(X = 2)$ et $\mathrm{P}(X \geq 3)$.
   a) Ecrire explicitement en fonction de $x$ et $n$ la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$ ($n$ désignant un entier naturel non nul et $x$ un réel différent de 1).
   b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx$

d) Etablir alors que $\mathrm{P}(X = 1) = \ln(2)$ puis donner la valeur de $\mathrm{P}(X = 2)$.

e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\mathrm{P}(X \geq 3)$, puis donner une valeur approchée de $\mathrm{P}(X \geq 3)$ en prenant $\ln 2 \simeq 0,7$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne le majorant trouvé à la septième question ?