Correction de l'épreuve n°2 du SIGMA 2021
Sujet n°1 - Type ESSEC
03/06/21

Indice de Gini

1. (a) La définition d'une fonction convexe sur J signifie que sur tout segment $[t_1, t_2]$ de J, l'image de tout point du segment $[t_1, t_2]$ est $\boxed{\textbf{en dessous de la corde} \text{ passant par les points } (t_1, f(t_1)) \text{ et } (t_2, f(t_2)).}$

   (b) Lorsque f est une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$, f est convexe sur $[0,1]$ si et seulement si $\boxed{\text{sa dérivée est croissante sur } [0,1]}$

2. (a) D'après l'énoncé, $\tilde{f}$ est concave si $-\tilde{f} : t \mapsto f(t) - t$ est convexe.
   Montrons que $-\tilde{f}$ est convexe :
   $\forall (t_1, t_2) \in [0,1]^2,\ \forall \lambda \in [0,1],,$

$$\begin{array}{rcl} -\tilde{f}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) & = & f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) - (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \\ & \underset{\text{car } f \text{ est convexe}}{\leq} & \lambda f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2) - \lambda t_1 - (1-\lambda) t_2 \\ & = & \lambda (f(t_1) - t_1) + (1-\lambda)(f(t_2) - t_2) \\ & = & \lambda . \left(-\tilde{f}(t_1)\right) + (1-\lambda) . \left(-\tilde{f}(t_2)\right) \end{array}$$

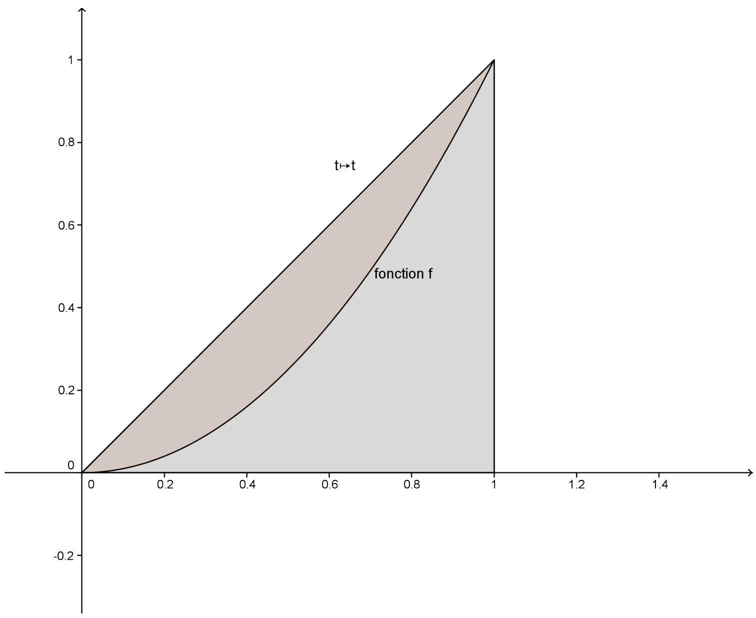
   Ainsi, $\boxed{-\tilde{f} \text{ est bien convexe i.e. } \tilde{f} \text{ est concave.}}$

   (b) Toutes les fonctions intervenant dans le calcul sont continues sur le segment $[0,1]$ donc y admettent une intégrale ; et par linéarité de l'intégration sur $[0,1]$:

$$I(f) = 2\left(\int_0^1 t dt - \int_0^1 f(t) dt\right) = 2\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 f(t) dt\right) = 1 - 2\int_0^1 f(t) dt$$

   (c) On remarque dans le calcul précédent que $\displaystyle\int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$ ssi $2 = \dfrac{1}{\int_0^1 t dt}$. Ainsi, $I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 (t - f(t)) dt = \frac{\displaystyle\int_0^1 (t - f(t)) dt}{\displaystyle\int_0^1 t dt}$

   est la proportion de l'aire entre la courbe de f et la première bissectrice dans l'aire entre l'axe des abscisses et la première bissectrice sur le segment $[0,1]$.



3. **Un premier exemple**.
   Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0,1]$.

(a) • $\forall t \in [0,1]$, $t^2 \in [0,1]$ donc f est bien définie sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$ et en particulier $f(0) = 0^2 = 0$ et $f(1) = 1^2 = 1$.
• f est de classe C^2 sur $[0,1]$ comme fonction polynômiale. En particulier, elle est bien continue et de classe C^1 et $f''(t) = 2 \geq 0$ donc f' est croissante. f est bien convexe.

$\boxed{f \text{ est bien un élément de } E.}$

(b) $I(f) = 1 - 2\int_0^1 t^2 dt = 1 - 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

4. **Propriétés de l'indice de Gini.**

(a) Montrons que $\tilde{f} \geq 0$ sur $[0,1]$:
Comme l'énoncé donne les valeurs de $f(0)$ et $f(1)$, $\forall t \in [0,1]$, appliquons l'inégalité de convexité avec $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ et $\lambda = t$:

$$f(t.1 + (1-t).0) \leq t.f(1) + (1-t).f(0) \text{ ssi } f(t) \leq t \text{ ssi } t - f(t) \geq 0$$

Ainsi, $\boxed{\forall t \in [0,1]\ \tilde{f}(t) \geq 0}$ et par croissance des bornes, $\boxed{\int_0^1 \tilde{f}(t)dt \geq 0 \text{ donc } I(f) \geq 0.}$

(b) $I(f) = 0$ ssi $\int_0^1 \tilde{f}(t)dt = 0$ ssi $\forall t \in [0,1]$, $\tilde{f}(t) = 0$ car $\tilde{f}$ est continue et positive sur $[0,1]$.
Ainsi, $I(f) = 0$ ssi $\boxed{\forall t \in [0,1], f(t) = t}$.

(c) Pour tout f élément de E, f est continue et positive et $f \neq 0$ (car $f(1) = 1$) donc $\int_0^1 f(t)dt > 0$.
Ainsi, $\boxed{I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)dt < 1.}$

(d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n$.

i. $I(f_n) = 1 - 2\int_0^1 t^n dt = 1 - 2\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{1 - \dfrac{2}{n+1}}$.

ii. • *Méthode 1 :* La question précédente donne $\lim\limits_{n \to +\infty} I(f_n) = 1$. Donc, par définition de la limite, en posant $\varepsilon = 1 - A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geq N$, $1 - \varepsilon < I(f_n) < 1 + \varepsilon$. Ainsi, en particulier, pour tout $n \geq N$, $I(f_n) > 1 - \varepsilon = A$.
Donc $\boxed{f = f_N \text{ convient.}}$

• *Méthode 2 :* Cherchons les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $I(f_n) > A$:
$I(f_n) > A$ ssi $1 - \frac{2}{n+1} > A$ ssi $\frac{2}{n+1} < 1 - A$ ssi $\frac{n+1}{2} > \frac{1}{1-A}$, car $1 - A > 0$, ssi $n > \frac{2}{1-A} - 1$ ssi $n \geq \left\lfloor \frac{2}{1-A} \right\rfloor$.
En posant $N = \left\lfloor \frac{2}{1-A} \right\rfloor$, alors $\boxed{f = f_N \text{ convient.}}$

5. **Minoration de l'indice de Gini**

(a) $f \in E$ donc f est continue sur $[0,1]$ et $t \mapsto t$ est continue sur $[0,1]$ donc $\tilde{f}$ est continue sur le *segment* $[0,1]$. Or toute fonction continue sur un *segment* est bornée et atteint ses bornes. De plus, $\tilde{f}(0) = 0 - f(0) = 0$, $\tilde{f}(1) = 1 - f(1) = 0$ et $\tilde{f(t)} \geq 0$ sur $]0,1[$ donc il existe $\boxed{t_0 \text{ dans }]0,1[\text{ tel que } \tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t \in [0,1]} \tilde{f}(t).}$

(b) On remarque que $t = \frac{t}{t_0}.t_0 = \frac{t}{t_0}.t_0 + (1 - \frac{t}{t_0}).0$. Ainsi, en appliquant l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec $t_1 = t_0$, $t_2 = 0$ et $\lambda = \frac{t}{t_0} \in [0,1]$ car $t \in [0, t_0]$, on a :

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}\left(\frac{t}{t_0}.t_0 + (1 - \frac{t}{t_0}).0\right) \geq \frac{t}{t_0}.\tilde{f}(t_0) + (1 - \frac{t}{t_0}).\underbrace{\tilde{f}(0)}_{=0-f(0)=0} = \boxed{\frac{t}{t_0}.\tilde{f}(t_0)}$$

(c) On remarque que $t = \frac{t-1}{t_0-1}.(t_0 - 1) + 1 = \frac{t-1}{t_0-1}.t_0 - \frac{t-1}{t_0-1} + 1 = \frac{t-1}{t_0-1}.t_0 + 1 - \frac{t-1}{t_0-1}$. Ainsi, en appliquant l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec $t_1 = t_0$, $t_2 = 1$ et $\lambda = \frac{t-1}{t_0-1} \in [0,1]$ car $t \in [t_0, 1]$ donc $t_0 - 1 \leq t - 1 \leq 0$ donc en multipliant par $\frac{1}{t_0-1} < 0$, on a : $1 \geq \frac{t-1}{t_0-1} \geq 0$; on a :

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}\left(\frac{t-1}{t_0-1}.t_0 + (1 - \frac{t-1}{t_0-1}).1\right) \geq \frac{t-1}{t_0-1}.\tilde{f}(t_0) + (1 - \frac{t-1}{t_0-1}).\underbrace{\tilde{f}(1)}_{=1-f(1)=0} = \boxed{\frac{t-1}{t_0-1}.\tilde{f}(t_0)}$$

(d) Ainsi,

$$\begin{aligned}
I(f) = 2\int_0^1 \tilde{f}(t)dt &\underset{\text{Chasles}}{=} 2\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)dt + 2\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t)dt \\
&\geq 2\int_0^{t_0} \frac{t}{t_0}.\tilde{f}(t_0)dt + 2\int_{t_0}^1 \frac{t-1}{t_0-1}.\tilde{f}(t_0)dt \quad \text{d'après les questions précédentes} \\
&= 2.\tilde{f}(t_0)\int_0^{t_0} \frac{t}{t_0}dt + 2.\tilde{f}(t_0)\int_{t_0}^1 \frac{t-1}{t_0-1}dt \\
&= 2.\tilde{f}(t_0)\left[\frac{t^2}{2t_0}\right]_0^{t_0} + 2.\tilde{f}(t_0)\left[\frac{(t-1)^2}{2(t_0-1)}\right]\int_{t_0}^1 \\
&= 2.\tilde{f}(t_0)\frac{t_0}{2} - 2.\tilde{f}(t_0)\frac{t_0-1}{2} \\
&= \boxed{\tilde{f}(t_0)}
\end{aligned}$$

Le cas à densité

Soit g une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \int_0^x g(v)dv$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Si g représente la densité de population classée suivant son revenu croissant, $G(x)$ représente la proportion de la population dont le revenu est inférieur à x. On suppose de plus que $\int_0^{+\infty} vg(v)dv$ est convergente et on note m sa valeur qui représente donc la richesse moyenne de la population.

6. (a) D'après l'énoncé, la fonction $v \mapsto vg(v)$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues et strictement positives donc $m = \int_0^{+\infty} vg(v)dv > 0$.
   (b) $G(x) = \int_{-\infty}^x g(v)dv$ car g est nulle sur $\mathbb{R}_-$. On reconnaît ainsi la fonction de répartition d'une variable aléatoire admettant g pour densité. Ainsi, d'après le cours :
   - G est continue sur $[0, +\infty[$.
   - G est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (car g est continue sur cet intervalle). Elle est en particulier dérivable et $G'(x) = g(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc G est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
   - $G(0) = \int_0^0 g(v)dv = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1$ car G est une fonction de répartition.

   Ainsi, G réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[G(0), \lim_{x\to+\infty} G(x)[= [0, 1[$.
   (c) G^{-1} est de même variation que G donc strictement croissante sur $[0, 1[$.
7. (a) G est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. On peut donc poser le changement de variable $u = G(v)$ ssi $v = G^{-1}(u)$:
   - *bornes :* $\begin{array}{ll} & u : 0 \to t \\ \text{ssi} & v : G^{-1}(0) = 0 \to G^{-1}(t) \end{array}$.
   - *élément différentiel :* $du = G'(v)dv = g(v)dv$.

   Donc :
   $$\int_0^t G^{-1}(u)du = \int_0^{G^{-1}(t)} vg(v)dv.$$
   (b) G^{-1} étant la réciproque de G, on a $\lim_{t\to1} G^{-1}(t) = +\infty$.
   Ainsi, $\lim_{t\to1} \int_0^t G^{-1}(u)du = \lim_{t\to1} \int_0^{G^{-1}(t)} vg(v)dv = \int_0^{+\infty} vg(v)dv = m$.
   Donc $\int_0^1 G^{-1}(u)du$ converge et vaut m.
8. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(t) = \frac{1}{m}\int_0^t G^{-1}(u)du$ pour tout $t \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$.
   (a) i.
   - Sur $[0, 1[$:
     $t \mapsto \int_0^t G^{-1}(u)du$ est l'unique primitive de G^{-1} sur $[0, 1[$ qui s'annule en 0 . Ainsi, f est bien continue car dérivable sur $[0, 1[$.
   - En 1 :
     $\lim_{t\to1} f(t) = \frac{1}{m}\int_0^1 G^{-1}(u)du \underset{\text{d'après 7.(b)}}{=} \frac{1}{m}.m = 1f(1)$.

   Ainsi, f est continue sur $[0, 1]$.

   ii. G^{-1} est continue sur $[0, 1[$ comme bijection réciproque de G, continue sur $[0, +\infty[$ donc $t \mapsto \int_0^t G^{-1}(u)du$ est de classe C^1 sur $[0, 1[$.
   f est donc de classe C^1 sur $[0, 1[$ et $f'(t) = \frac{1}{m}G^{-1}(t)$ est strictement croissante sur $[0, 1[$ car G^{-1} est strictement croissante sur $[0, 1[$ et $m > 0$.
   Ainsi, f est bien convexe sur $[0, 1[$.

iii.
- D'après les questions précédentes, f est bien définie sur $[0,1]$, elle est continue sur $[0,1]$ et convexe sur $[0,1]$.
- $f'(t) = \frac{1}{m}G^{-1}(t) \geq 0$ sur $[0,1[$ (car $m > 0$ et G^{-1} est à valeurs dans $[0,+\infty[$) donc f est croissante sur $[0,1]$.
  Ainsi, $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$: f est bien à valeurs dans $[0,1]$ et $f(0)=0$, $f(1)=1$.

(b) $I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)dt$.
Effectuons une I.P.P. sur l'intégrale partielle $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x 1.f(t)dt$ avec $x \in [0,1[$:
On pose $v(t) = f(t)$ et $u(t) = t$ fonctions de classe C^1 sur $[0,1[$ et $v'(t) = \frac{1}{m}G^{-1}(t)$ et $u'(t) = 1$ donc :
$\int_0^x 1.f(t)dt = xf(x) - \frac{1}{m}\int_0^x tG^{-1}(t)dt$.
On pose alors le changement de variable $v = G^{-1}(t)$ ssi $t = G(v)$ dans la dernière intégrale :
$\int_0^x 1.f(t)dt = xf(x) - \frac{1}{m}\int_0^{G^{-1}(x)} G(v)vg(v)dv$.
On passe à la limite lorsque x tend vers 1 :
$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{x\to 1}\left(xf(x) - \frac{1}{m}\int_0^{G^{-1}(x)} G(v)vg(v)dv\right) = 1 - \frac{1}{m}\int_0^{+\infty} G(v)vg(v)dv$.

Ainsi,
$$I(f) = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{m}\int_0^{+\infty} G(v)vg(v)dv\right) = -1 + \frac{2}{m}\int_0^{\infty} vg(v)G(v)dv.$$

9. Soit λ un réel strictement positif. On suppose dans cette question que g est une densité de la loi exponentielle de paramètre λ.
   (a) Pour $x > 0$, $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
   (b) Pour déterminer l'expression de la bijection réciproque de G, pour tout $u \in [0,1[$, on résout l'équation $G(x) = u$ d'inconnue $x \in [0,+\infty[$:
$$G(x) = u \text{ ssi } 1 - e^{-\lambda x} = u \text{ ssi } e^{-\lambda x} = 1 - u \underset{\text{car } u<1 \text{ ssi } 1-u>0}{\text{ssi}} -\lambda x = \ln(1-u) \text{ ssi } x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$
   (c) m est l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ donc, d'après le cours, $m = \frac{1}{\lambda}$.
   (d) g vérifie bien les hypothèse de la partie II. Nous pouvons donc appliquer la définition de la question 8. :
   pour tout $t \in [0,1[$, $f(t) = \frac{1}{m}\int_0^t G^{-1}(u)du = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}}\int_0^t -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)du = -\lambda\frac{1}{\lambda}\int_0^t -\ln(1-u)du$
   (e)
   - *Méthode 1 :* $f(t) = \int_0^t -\ln(1-u)du$.
     Effectuons une I.P.P. judicieuse en choisissant $w(u) = 1-u$ comme primitive de $w(u) = -1$:
     on pose $v(u) = \ln(1-u)$ et $w(u) = 1-u$. v et w sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et $v'(u) = -\frac{1}{1-u}$ et $w'(u) = -1$:
     $f(t) = \int_0^t -\ln(1-u)du = \int_0^t w'(u)v(u)du = [(1-u)\ln(1-u)]_0^t - \int_0^t -\frac{1}{1-u}.(1-u)du = (1-t)\ln(1-t) + \int_0^t 1du = (1-t)\ln(1-t) + t$.
   - *Méthode 2 :* on peut vérifier que f est l'unique primitive de $t \mapsto -\ln(1-t)$ qui s'annule en 0 en calculant : $f(0) = 0$ et $f'(t) = -\ln(1-t)$.

   (f) $t \mapsto (1-t)\ln(1-t)$ est continue sur $[0,1[$ (car $1-t \in]0,1]$) sur cet intervalle donc l'intégrale est impropre en 1.
   Calculons l'intégrale partielle :
   On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = -\frac{(1-t)^2}{2}$ et $v(t) = \ln(1-t)$, fcts de classe C^1 sur $[0,1[$ de dérivées $u'(t) = (1-t)$ et $v'(t) = -\frac{1}{1-t}$.
$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,1[,\ \int_0^x (1-t)\ln(1-t)dt = \int_0^x u'(t)v(t)dt &= \left[-\frac{(1-t)^2}{2}\ln(1-t)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{(1-t)^2}{2}.-\frac{1}{1-t}dt \\
&= -\frac{(1-x)^2\ln(1-x)}{2} - \int_0^x \frac{1-t}{2}dt \\
&= -\frac{(1-x)^2\ln(1-x)}{2} - \left[-\frac{(1-t)^2}{4}\right]_0^x \\
&= -\frac{(1-x)^2\ln(1-x)}{2} + \frac{(1-x)^2}{4} - \frac{1}{4} \\
&\underset{x\to 1}{\to} -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$
   car en posant $X = 1-x \underset{x\to 1}{\to} 0$, on a $(1-x)^2\ln(1-x) = X^2\ln(X) \underset{0}{\longrightarrow}$ par croissance comparée.
   donc :
$$\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)dt = -\frac{1}{4}$$
   (g) $I(f) = 2\int_0^1 (t - f(t))dt \underset{\text{d'après 9.(e)}}{=} 2\int_0^1 -(1-t)\ln(1-t)dt = -2\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)dt \underset{\text{d'après 9.(f)}}{=} -2.-\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Application à une population

10. (a)
    - Pour tout $i[|1,n|]$, $p_i = \frac{n_i}{N} \geq 0$ car d'après l'énoncé, on a $n_i \geq x_i \in \mathbb{N}^*$ donc $n_i > 0$, et donc $N = \sum_{i=1}^n n_i > 0$.
    - $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i = \frac{1}{N} N = 1$.

    Ainis, la famille $P = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$ définit bien une loi de probabilité.

    On prouve par un raisonnement similaire que la famille $Q = (q_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $R = (r_i)_{1 \leq i \leq n}$ définissent des lois de probabilité.

    (b) Pour tout $i \in [|1, n-1|]$, d'après l'énoncé, on sait que $\varepsilon_i \leq \varepsilon_{i+1}$ ssi $\frac{x_i}{n_i} \leq \frac{x_{i+1}}{n_{i+1}}$ ssi $\frac{q_i}{p_i} = \frac{N}{X}\frac{x_i}{n_i} \leq \frac{N}{X}\frac{x_{i+1}}{n_{i+1}} = \frac{q_{i+1}}{p_{i+1}}$

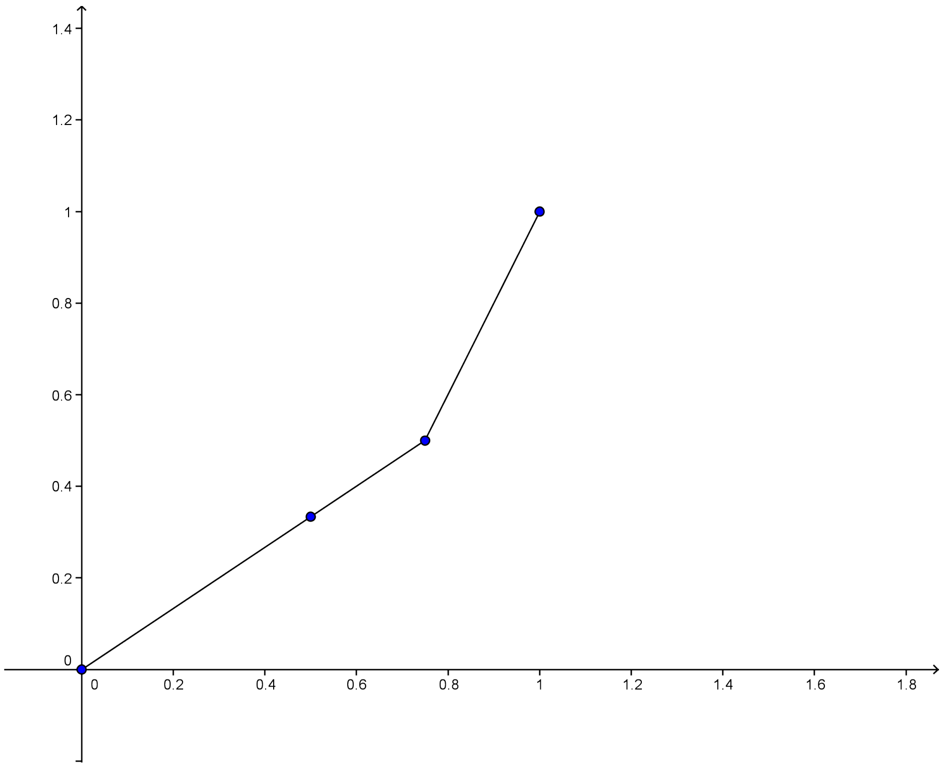
    (c) On remarque que pour tout $i[|1,n|]$, $\frac{r_i}{p_i} = \frac{N}{Y}\frac{y_i}{n_i} = \frac{N}{Y}\frac{n_i - x_i}{n_i} = \frac{N}{Y}(1-\varepsilon_i)$.
    Or, pour tout $i \in [|1, n-1|]$, d'après l'énoncé, $\varepsilon_i \leq \varepsilon_{i+1}$ ssi $1-\varepsilon_i \geq 1-\varepsilon_{i+1}$ ssi $\frac{N}{Y}(1-\varepsilon_i) \geq \frac{N}{Y}(1-\varepsilon_{i+1})$ ssi $\frac{r_i}{pi} \geq \frac{r_{i+1}}{p_{i+1}}$.

    (d) Pour i appartenant à $[|1,n|]$, $\frac{p_i - \varepsilon q_i}{1-\varepsilon} = \frac{\frac{n_i}{N} - \frac{X}{N} \cdot \frac{x_i}{X}}{1 - \frac{X}{N}} \underset{\text{réductions au même dénominateur}}{=} \frac{\frac{n_i - x_i}{N}}{\frac{N-X}{N}} = \frac{n_i - x_i}{N} \cdot \frac{N}{N-X} = \frac{n_i - x_i}{N-X} = \frac{y_i}{Y} = r_i$

11. Dans un premier temps, nous allons construire une application appartenant à E, qui permet de mesurer les inégalités à l'intérieur de la classe I.
    On pose $P_0 = Q_0 = 0$, et pour $i[|1,n|]$, $P_i = \sum_{h=1}^i p_h$ et $Q_i = \sum_{h=1}^i q_h$. On définit alors l'application φ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que, pour tout entier $i \in [|0,n|]$, $\varphi(P_i) = Q_i$ et pour tout entier $i \in [|0, n-1|]$, φ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

    (a) D'après l'énoncé, on a :
    - $p_1 = \frac{1}{2}$ et $q_1 = \frac{1}{3}$ donc $(P_1, Q_1) = (p_1, q_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.
    - $p_2 = \frac{1}{4}$ et $q_2 = \frac{1}{6}$ donc $(P_2, Q_2) = (p_1 + p_2, q_1 + q_2) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$.
    - $p_3 = \frac{1}{4}$ et $q_3 = \frac{1}{2}$ donc $(P_3, Q_3) = (p_1 + p_2 + p_3, q_1 + q_2 + q_3) = (1, 1)$.

    On place les points de coordonnées $(P_i, Q_i)_{0 \leq i \leq 3}$ et on les relie par des segment, on obtient :



    (b) La pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, Q_{i-1}) et (P_i, Q_i) est $u_i = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{\sum_{h=1}^i q_h - \sum_{h=1}^{i-1} q_h}{\sum_{h=1}^i p_h - \sum_{h=1}^{i-1} p_h} = \frac{q_i}{p_i}$ pour i appartenant à $[|1,n|]$.

    (c) D'après la question précédente, φ est de pente u_{i+1} donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t) = u_{i+1}t + b$. Trouvons la valeur de b :
    On sait que $\varphi(P_i) = Q_i$ ssi $u_{i+1}P_i + b = Q_i$ ssi $b = Q_i - u_{i+1}P_i$.
    Ainsi, $\varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$

    (d)
    - On admet que, la suite $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ des pentes de φ étant croissante (d'après 10.(b)), φ est une fonctions convexe.
    - Pour tout $i \in [|0, 1n-1|]$, φ est continue sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$ en tant que fonction affine donc φ est continue sur $[0,1]$.

- $\varphi(0) = \varphi(P_0) = Q_0 = 0$ et $\varphi(1) = \varphi(P_n) = Q_n = 1$. de plus, φ est continue et croissante sur $[0,1]$ (car pour tout $i \in [|0, 1n-1|]$, $\varphi'(t) = u_{i+1} \leq 0$ sur $]P_i, P_{i+1}[$).

φ appartient bien à E.

(e) Pour $i \in [|0, n-1|]$,

$$\begin{aligned}
\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)dt = \int_{P_i}^{P_{i+1}} u_{i+1}(t-P_i) + Q_i dt &= \left[u_{i+1}\frac{(t-P_i)^2}{2} + Q_i t\right]_{P_i}^{P_{i+1}} \\
&= u_{i+1}\frac{(P_{i+1}-P_i)^2}{2} + Q_i(P_{i+1}-P_i) \\
&= \frac{Q_{i+1}-Q_i}{P_{i+1}-P_i}\frac{(P_{i+1}-P_i)^2}{2} + Q_i(P_{i+1}-P_i) \\
&= (P_{i+1}-P_i)\left(\frac{Q_{i+1}-Q_i}{2} + Q_i\right) \\
&= (P_{i+1}-P_i)\left(\frac{Q_{i+1}+Q_i}{2}\right)
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
I(\varphi) \underset{\text{d'après 2.(b)}}{=} 1 - 2\int_0^1 \varphi(t)dt &= 1 - 2\int_{P_0}^{P_n} \varphi(t)dt \\
&\underset{\text{Chasles}}{=} 1 - 2\left(\int_{P_0}^{P_1} \varphi(t)dt + \int_{P_1}^{P_2} \varphi(t)dt + ... + \int_{P_{n-1}}^{P_n} \varphi(t)dt\right) \\
&= 1 - 2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)dt \\
&= 1 - 2\sum_{i=0}^{n-1}(P_{i+1}-P_i)\left(\frac{Q_{i+1}+Q_i}{2}\right).
\end{aligned}$$

12. Nous allons maintenant étudier l'application correspondante pour la classe II. On pose $P_0 = R_0 = 0$ et pour $i[|1,n|]$, $P_i = \sum_{h=1}^i p_h$ et $R_i = \sum_{h=1}^i r_h$. De même, on définit pour i élément de $[|0,n|]$, $\Pi_i = 1 - P_{n-i}$. On considère l'application ψ de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que pour tout $i \in [|0,n|]$, $\psi(P_i) = R_i$ et pour tout entier $i \in [|0, n-1|]$, ψ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

(a) La pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, R_{i-1}) et (P_i, R_i) est $v_i = \frac{R_i - R_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{r_i}{p_i}$ pour $i[|1,n|]$.

(b) On considère l'application ψ^* définie pour tout $t \in [0,1]$, par $\psi^*(t) = 1 - \psi(1-t)$.

i. D'après l'énoncé, on a :

- $p_1 = \frac{1}{2}$ et $r_1 = \frac{2}{3}$ donc $(P_1, R_1) = (p_1, r_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.
- $p_2 = \frac{1}{4}$ et $r_2 = \frac{1}{6}$ donc $(P_2, R_2) = (p_1 + p_2, r_1 + r_2) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right)$.
- $p_3 = \frac{1}{4}$ et $r_3 = \frac{1}{6}$ donc $(P_3, Q_3) = (p_1 + p_2 + p_3, r_1 + r_2 + r_3) = (1, 1)$.

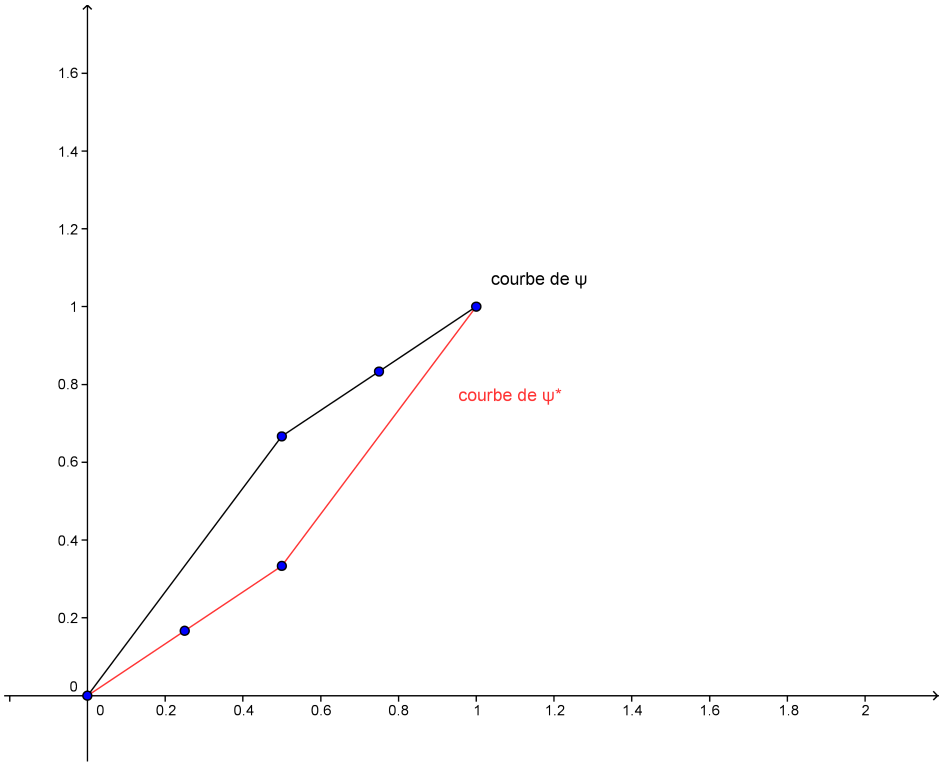
Pour tracer ψ, on place les points de coordonnées $(P_i, R_i)_{0 \leq i \leq 3}$ et on les relie par des segment.

De plus, pour tout $i \in [|0, n-1|]$, ψ est affine sur $[P_i, P_{i+1}]$ et vaut $\psi(t) = v_{i+1}(t - P_i) + R_i$, donc ψ^* est affine sur $\{t \in [0,1] \mid P_i \leq 1 - t \leq P_{i+1}\} = \{t \in [0,1] \mid 1 - P_{i+1} \leq t \leq 1 - P_i\} = [1 - P_{i+1}; 1 - P_i] = [\Pi_{n-i-1}, ; \Pi_{n-i}]$ car elle vaut $\psi^*(t) = 1 - v_{i+1}(1 - t - P_i) + R_i$.

En posant le changement d'indice $j = n - i$, ψ^* est donc affine sur les segment $[\Pi_{j-1}; \Pi_j]$, pour tout $j \in [|1,n|]$. De plus,

- $\Pi_0 = 1 - P_3 = 0$ et $\psi^*(\Pi_0) = 1 - \psi(1 - \Pi_0) = 1 - \psi(P_3) = 1 - R_3 = 0$.
- $\Pi_1 = 1 - P_2 = \frac{1}{4}$ et $\psi^*(\Pi_1) = 1 - \psi(1 - \Pi_1) = 1 - \psi(P_2) = 1 - R_2 = \frac{1}{6}$.
- $\Pi_2 = 1 - P_1 = \frac{1}{2}$ et $\psi^*(\Pi_2) = 1 - \psi(1 - \Pi_2) = 1 - \psi(P_1) = 1 - R_1 = \frac{1}{3}$.
- $\Pi_3 = 1 - P_0 = 1$ et $\psi^*(\Pi_3) = 1 - \psi(1 - \Pi_3) = 1 - \psi(P_0) = 1 - R_0 = 1$.

Pour tracer ψ^*, on place les points de coordonnées $(\Pi_i, \psi^*(\Pi_i))_{0 \leq i \leq 3}$ et on les relie par des segment.



ii. On admet que ψ étant continue et la suite (v_i) de ses pentes étant décroissante (d'après 10.(c)), la fonction ψ est concave.
Montrons alors que ψ^* est convexe :
$\forall (t_1,t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\psi^*(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= 1-\psi\left(1-(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)\right) \\
&= 1-\psi\left(\lambda + 1 - \lambda - \lambda t_1 - (1-\lambda)t_2\right) \\
&= 1-\psi\left(\lambda + 1-\lambda - \lambda t_1 - (1-\lambda)t_2\right) \\
&= 1- \underbrace{\psi\left(\lambda(1-t_1)+(1-\lambda)(1-t_2)\right)}_{\geq \lambda\psi(1-t_1)+(1-\lambda)\psi(1-t_2) \quad \text{car } \psi \text{ est concave}} \\
&\leq 1-(\lambda\psi(1-t_1)+(1-\lambda)\psi(1-t_2)) \\
&= \lambda + (1-\lambda) - \lambda\psi(1-t_1) - (1-\lambda)\psi(1-t_2) \\
&= \lambda(1-\psi(1-t_1)) + (1-\lambda)(1-\psi(1-t_2))
\end{aligned}$$

iii. cf question 12.(b)i.

iv. On a pour tout $i \in [|0,n|]$, $\psi^*(\Pi_i) = 1-\psi(1-\Pi_i) = 1-\psi(P_{n-1}) = 1-R_{n-i}$.
La pente de ψ^* sur $[\Pi_{i-1},\Pi_i]$ est donc $\frac{1-R_{n-i}-(1-R_{n-(i-1)})}{\Pi_i-\Pi_{i-1}} = \frac{R_{n-i+1}-R_{n-i}}{1-P_{n-i}-(1-P_{n-(i-1)})} = \frac{R_{n-i+1}-R_{n-i}}{P_{n-i+1}-P_{n-i}} = \frac{r_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} = v_{n-i+1}$

13. (a) Si $\varphi = \psi^*$ alors elle ont mêmes pentes donc , pour tout $i \in [|1,n|]$, $u_i = v_{n-i+1}$.
Or,

- $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{\frac{x_i}{n_i}}{\frac{X}{N}} = \frac{\frac{x_i}{X}}{\frac{n_i}{N}} = \frac{q_i}{p_i} = u_i$.
- $\frac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon} = \frac{1-\frac{x_{n-i+1}}{n_{n-i+1}}}{1-\frac{X}{N}} = \frac{\frac{n_{n-i+1}-x_{n-i+1}}{n_{n-i+1}}}{\frac{N-X}{N}} = \frac{\frac{y_{n-i+1}}{n_{n-i+1}}}{\frac{Y}{N}} = \frac{\frac{y_{n-i+1}}{Y}}{\frac{n_{n-i+1}}{N}} = \frac{r_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} = v_{n-i+1}$

Ainsi, par égalité des pentes,

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon} \qquad (1)$$

(b) On applique l'égalité (1) en posant le changement de variable $j = n-i+1[|1,n|]$ (et en le renommant i) , on obtient

$$\frac{\varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon_i}{1-\varepsilon} \qquad (2)$$

Sommons les égalités (1) et (2) :

$$\frac{\varepsilon_i+\varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon} = \frac{2-(\varepsilon_i+\varepsilon_{n-i+1})}{1-\varepsilon} \text{ ssi } \frac{\varepsilon_i+\varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon_i+\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon} = \frac{2}{1-\varepsilon}$$

$$\underset{\text{réduction au même dénom.}}{\text{ssi}} \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1}}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = \frac{2}{1-\varepsilon} \text{ ssi } \varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon$$

(c) Nous avons montré aux 2 questions précédentes $\begin{cases} \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} & +\frac{\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon} & = \frac{1}{1-\varepsilon} \\ \varepsilon_i & +\varepsilon_{n-i+1} & = 2\varepsilon \end{cases}$

En effectuant le pivot $L_2 \leftarrow (1-\varepsilon)L_1 - L_2$, on obtient :

$$\varepsilon_i(1-2\varepsilon) = \varepsilon(1-2\varepsilon)$$

(d) On suppose que $\varepsilon \neq \frac{1}{2}$, alors $1-2\varepsilon \neq 0$. On divise l'égalité précédente par $1-2\varepsilon$, on obtient :
pour tout i appartenant à $[|1,n|]$, $\varepsilon_i = \varepsilon$.
Si φ est égale à son adjointe, alors le pourcentage de femmes (ou plus généralement de personnes de classe I.) est le même dans toutes les catégories socio-professionnelles. Il n'y a donc aucune inégalité sociale entre les femmes (personnes de classe I.) et les hommes (personnes de classe II.) .