Exercices type concours

Variables aléatoires discrètes

Exercice : EDHEC

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

• Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.

• Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance $E(X_1)$ de la variable X_1.
   On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :
   $$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.
3. (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$$
   (b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
   (c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$ et en déduire l'égalité :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$
   (d) Établir alors que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$
4. (a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$$
   (b) En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_n = 2)$.
   (c) Montrer enfin que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$
5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}$$
   En déduire sans calcul que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$
6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:
$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) \end{pmatrix}$$

7. (a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = U_n\, A$.

(b) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = U_0\, A^n$.

(c) En déduire la première ligne de A^n.

8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

10. (a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1} J$.

(b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J.

(c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

1. On a $X_1(\Omega) = \{2, 3, 4\}$ et $\forall k \in \{2, 3, 4\} \quad P(X_1 = k) = \dfrac{1}{3}$ par équiprobabilité des déplacements.
X_1 suit une loi uniforme sur $\{2, 3, 4\}$, on a donc $E(X_1) = 3$ (milieu de $\{2, 3, 4\}$.

2. A priori, tous les points sont possibles à atteindre en n déplacements (sauf 1 pour $n = 1$). Prouvons rigoureusement par récurrence que $X_n(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ pour $n \geqslant 2$.

Initialisation :
Pour $n = 2$, d'après le résultat admis, on a $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'en en n déplacements on peut donc être en i $(i \in \{1, 2, 3, 4\}$, au n-ième déplacement, on sera alors en $j \in \{1, 2, 3, 4\} - \{i\}$. En envisageant deux valeurs distinctes de i, on obtient toutes les valeurs possibles dans $\{1, 2, 3, 4\}$.

Pour $n = 2$, d'après le résultat admis, on a $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Conclusion :
$\boxed{\forall n \geqslant 2 \quad X_n(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}}$

3. (a) Pour $n \geqslant 2$, on peut utiliser le système complet d'événements $(X_n = i)_{i \in [|1,4|]}$ de probabilités non nulles.
La formule des probabilités totales donne :
$P(X_{n+1} = 1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = 1) P(X_n = i)$
Or $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = 0$ et $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = i) = \dfrac{1}{3}$ si $i \neq 1$ donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$$

(b) Pour $n = 0$, $P(X_1 = 1) = 0$ et $\dfrac{1}{3}\left(P(X_0 = 2) + P(X_0 = 3) + P(X_0 = 4)\right) = \dfrac{1}{3}(0+0+0) = 0$, donc la relation est encore vraie.
Pour $n = 1$, $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3}\left(P(X_1 = 2) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4)\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$
La relation est donc encore vraie pour $n = 1$.

(c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$ car c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ et vraie aussi pour $n \geqslant 2$ car $(X_n = i)_{i \in [|1,4|]}$ est un système complet d'événements.
$P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{3}\left(1 - P(X_n = 1)\right) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} P(X_n = 1)$ ce qui est la relation cherchée.

(d) Posons $v_n = P(X_n = 1)$. (v_n) vérifie $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} = -\dfrac{1}{3} v_n + \dfrac{1}{3}$
C'est une suite arithmético géométrique. Cherchons un point fixe α. $\alpha = -\dfrac{1}{3}\alpha + \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}\alpha = \dfrac{1}{3}$ donc $\alpha = \dfrac{1}{4}$
En vérifie rapidement que $v_{n+1} - \alpha = -\dfrac{1}{3}(v_n - \alpha)$ donc
$v_n - \alpha = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n (v_0 - \alpha) = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)) = \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$
On a bien : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. (a) Pour $n \geqslant 2$, on peut utiliser le système complet d'événements $(X_n = i)_{i\in[|1,4|]}$ de probabilités non nulles.
La formule des probabilités totales donne :
$P(X_{n+1} = 2) = \sum_{i=1}^{4} P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 2)P(X_n = i)$
Or $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0$ et $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = i) = \frac{1}{3}$ si $i \neq 2$ donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$$
Pour $n = 0$, $P(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}\left(P(X_0 = 1) + P(X_0 = 3) + P(X_0 = 4)\right) = \frac{1}{3}\,(1 + 0 = 0) = 0$, donc la relation est encore vraie.
Pour $n = 1$, $P(X_2 = 1) = \frac{2}{9}$ et $\frac{1}{3}\left(P(X_1 = 1) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4)\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$
La relation est donc encore vraie pour $n = 1$.En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$$
(b) $P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left(1 - P(X_n = 2)\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}P(X_n = 2)$.

(c) Posons $w_n = P(X_n = 2)$. (v_n) vérifie $w_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1)\ w_{n+1} = -\frac{1}{3}w_n + \frac{1}{3}$
C'est une suite arithmético géométrique. On a le même point fixe que pour v_n : $\alpha = \frac{1}{4}$
(2) donne $\frac{4}{3}\alpha = \frac{1}{3}$ donc $\alpha = \frac{1}{4}$
En faisant $(1) - (2)$ on obtient $w_{n+1} - \alpha = -\frac{1}{3}(w_n - \alpha)$ donc
$w_n - \alpha = \left(-\frac{1}{3}\right)^n (w_0 - \alpha) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(-\frac{1}{4}\right)) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$
On a bien : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :
$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}$$
Les suites définies par $P(X_n = 3)$ et $P(X_n = 4)$ ont la même relation de récurrence que $P(X_n = 2)$ et la même valeur initiale 0. On a donc : $\quad \forall n \in \mathbb{N} P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = P(X_n = 2)$ d'où :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. $E(X_n) = P(X_n = 1) + 2P(X_n = 2) + 3P(X_n = 3) + 4P(X_n = 4) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4} - \frac{3}{4} - \frac{4}{4}\right)$
$E(X_n) = \frac{10}{4} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.
On peut vérifier : avec $n = 0$ on obtient bien $E(X_0) = 1$, avec $n = 1$, on obtient bien $E(X_1) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$
$$\boxed{\forall n \in N \qquad E(X_n) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

Partie 2 : étude des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:
$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4) \end{pmatrix}$$

7. (a) On utilise les 4 égalités obtenues en I 3) a, 4) a , que l'on peut réécrire également pour $i = 3$ et $i = 4$.
$$\left\{\begin{array}{ll} P(X_{n+1} = 1) & = \frac{1}{3}\left(0.P(X_n = 1) + 1.P(X_n = 2) + 1.P(X_n = 3) + 1.P(X_n = 4)\right) \\ P(X_{n+1} = 1) & = \frac{1}{3}\left(1.P(X_n = 1) + 0.P(X_n = 2) + 1.P(X_n = 3) + 1.P(X_n = 4)\right) \\ P(X_{n+1} = 1) & = \frac{1}{3}\left(1.P(X_n = 1) + 1.P(X_n = 2) + 0.P(X_n = 3) + 1.P(X_n = 4)\right) \\ P(X_{n+1} = 1) & = \frac{1}{3}\left(1.P(X_n = 1) + 1.P(X_n = 2) + 1.P(X_n = 3) + 0.P(X_n = 4)\right) \end{array}\right.$$

Donc $U_n A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) & P(X_n = 4)\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U_{n+1}$

On a bien : $\qquad U_{n+1} = U_n\ A$

(b) Posons $(H_n)\quad U_n = U_0\ A^n$ pour$n \in \mathbb{N}$.
- Pour $n = 0$, $A^0 = I_4$ et $U_0 A^n = U_0$ donc (H_0) est vrai.
- Supposons (H_n) vérifié pour $n \in \mathbb{N}$.

$U_{n+1} = U_n A = (U_0\ A^n) \times A = U_0(A^n \times A) = U_0 A^{n+1}$
Donc (H_{n+1}) est vrai.
Donc (H_n) est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Si $M \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$, le produit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M$ donne la première ligne de la matrice M. Donc la première ligne de la matrice A^n est $U_0\ A^n$, c'est à dire U_n.
La première ligne de A^n est U_n, c'est à dire :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}}$$

8. En multipliant à gauche une matrice M par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient la deuxième ligne de M.
Donc en choisissant comme position initiale au départ $X_0 = 2$, et en recommençant la même méthode probabiliste, on obtiendrait la deuxième ligne de A^n. Avec $X_0 = 3$, on obtiendrait la 3-ième ligne, et $X_0 = 4$, la 4-ième ligne.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

9. $aI + bJ = \begin{pmatrix} a+b & b & b & b & \\ b & a+b & b & b & b \\ b & b & a+b & b & \\ b & b & b & a+b & \end{pmatrix}$

Donc $aI + bJ = A \iff \begin{cases} a+b & = 0 \\ b & = \dfrac{1}{3} \end{cases} \iff a = -\dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$

10. (a) $J^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4J.$

Posons $(G_k)\quad J^k = 4^{k-1} J$.
- Pour $k = 1$, (G_1) est vrai de façon évidente.
- Supposons (G_k) vrai pour $k \geqslant 1$, alors $J^{k+1} = J \times J^k = J \times \left(4^{k-1} J\right) = 4^{k-1} J^2 = 4^k J$

Donc (G_{k+1}) est vrai.
Donc (G_k) est vrai pour tout $k \geqslant 1$.

(b) $A^n = \left(\dfrac{1}{3}(J - I)\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (J - I)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (-I)^{n-k}.$

$A^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n I + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1}\right) J\right)$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^k = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^k - (-1)^n\right)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} = \frac{1}{4}\left(3^n - (-1)^n\right)$

On a donc : $\quad A^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n I + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \times \dfrac{1}{4}\left(3^n - (-1)^n\right)\right) J$

$$\boxed{A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) J}$$

(c) Pour $n = 0$, $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n I + \dfrac{1}{4}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right) J = I + \dfrac{1}{4}(1 - 1) J = I$ .... La formule est valable pour $n = 0$.

Exercice 1 :

On considère la matrice M définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant : **si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne, sinon elle n'est pas remise dans l'urne.**

Pour tout $i \geq 1$, on note B_i (resp. R_i) l'évènement « on obtient une boule blanche (resp. rouge) lors du $i^{ème}$ tirage ».

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{ème}$ tirage et on pose $X_0 = 2$ et T_2 est le numéro du tirage où l'on extrait la deuxième boule blanche.

On considère les matrices suivantes :

$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_n = 0] \\ \mathbb{P}[X_n = 1] \\ \mathbb{P}[X_n = 2] \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Déterminer pour tout entier naturel n, l'ensemble des valeurs prises par la variable X_n (on distinguera les trois cas : $n = 0, n = 1$ et $n \geq 2$)
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\forall n \geq 2$ on a $U_{n+1} = MU_n$.
   Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
2. (a) Calculer MV_1, MV_2 et MV_3.
   (b) En déduire par récurrence, pour tout entier naturel n, la relation suivante $U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$
   (c) Donner la loi de la variable X_n puis calculer $\mathbb{E}(X_n)$, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
3. (a) Ecrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}[T_2 = 2]$ et $\mathbb{P}[T_2 = 3]$.
   (b) Pour $n \geq 2$, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.
   (c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a $\mathbb{P}[T_2 = n] = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$
   (d) Donner l'espérance et la variance de T_2.

1. (a) On sait d'après l'énoncé que $X_0(\Omega) = \{2\}$. A l'issue du premier tirage, il reste soit une boule blanche, soit les deux, donc $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$. A l'issue du deuxième, soit il en reste une, soit les deux, soit aucune. Et c'est ainsi pour tous les tirages suivants. Ainsi $\boxed{X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}}$.
   (b) Soit $n \geq 2$. La famille $([X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3])$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales
   $$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 2) \\ &= P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1) \end{aligned}$$
   De la même façon, on trouve :
   $$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}P(X_n = 2)$$
   $$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}P(X_n = 2)$$
   Ainsi
   $$MU_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_n = 0] \\ \mathbb{P}[X_n = 1] \\ \mathbb{P}[X_n = 2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1) \\ \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}P(X_n = 2) \\ \frac{1}{3}P(X_n = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_{n+1} = 0] \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 1] \\ \mathbb{P}[X_{n+1} = 2] \end{pmatrix}$$
   On a bien $\boxed{U_{n+1} = MU_n.}$
   Si $n = 0$, la relation devient $MU_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$. Ceci est bien égal à U_1 car si il y a deux boules blanches au départ, nous avons $2/3$ chances d'en tirer une, $1/3$ chance de ne pas en tirer.
2. (a) De simples calculs donnent $\boxed{MV_1 = V_1,\ MV_2 = \frac{1}{2}V_2 \text{ et } MV_3 = \frac{1}{3}V_3.}$
   (b) <u>Initialisation :</u>
   Pour $n = 0$ on sait que $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs
   $$V_1 + 4V_2 + V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La propriété est vérifiée au rang $n=0$.
Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ On suppose que $U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$.

On a vu à la question 1b) que $U_{n+1} = MU_n$. En utilisant l'hypothèse de récurrence

$$U_{n+1} = M(V_1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2+\left(\frac{1}{3}\right)^n V_3 = MV_1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n MV_2+\left(\frac{1}{3}\right)^n MV_3 = V_1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{2}V_2+\left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{3}V_3$$

Ainsi on a bien

$$U_{n+1} = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} V_3$$

Conclusion :

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3.}$

(c) La question précédent permet de déduire que

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}\left[X_n=0\right] \\ \mathbb{P}\left[X_n=1\right] \\ \mathbb{P}\left[X_n=2\right] \end{pmatrix} = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3 = \begin{pmatrix} 1-4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

On obtient la loi de X_n :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{0,1,2\} \\ P[X_n=0] &= 1-4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ P[X_n=1] &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ P[X_n=2] &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

On calcule l'espérance

$$\begin{aligned} E(X_n) = P(X_n=1)+2P(X_n=2) &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Comme $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = 0.}$

3. (a) Pour que l'évènement $[T_2 = 2]$ se réalise, il faut tirer les deux boules blanche coup sur coup. Ainsi $\boxed{[T_2=2] = B_1 \cap B_2.}$

Pour que l'évènement $[T_2=3]$ se réalise, il faut tirer les boules blanches au premier et troisième tirages, ou bien au deuxième et troisième tirages. Ainsi $\boxed{[T_2=3] = (B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) \cup (\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3).}$

La formule des probabilités composées donne alors

$$P(T_2=2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P(T_2=3) = P(B_1)P_{B_1}(\overline{B_2})P_{B_1\cap\overline{B_2}}(B_3) + P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(B_2)P_{\overline{B_2}\cap B_2}(B_3) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour que l'évènement $[T_2=n]$ se réalise, il faut qu'il reste une boule blanche au $n-1$ème tirage et qu'il n'en reste plus au $n$ième. Donc $\boxed{[T_2=n] = [X_{n-1}=1] \cap [X_n=0].}$

(c) On obtient de la question précédente :

$$P([T_2=n]) = P([X_{n-1}=1])P_{[X_{n-1}=1]}(X_n=0) = \frac{1}{2}P([X_{n-1}=1])$$

En utilisant maintenant le résultat de la question 2c), on trouve

$$P([T_2=n]) = \frac{1}{2}\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

On a bien $\boxed{P(T_2=n) = 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right).}$

(d) On cherche à montrer que $\sum_{k\geq 2} |kP(T_2 = k)|$ converge absolument. Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

$$\sum_{k=2}^{n} |kP(T_2 = k)| = \sum_{k=2}^{n} 2k \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) = 2\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 2\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

On reconnait les termes généraux de séries géométriques dérivées d'ordre 1. Comme $0 < 1/3 < 1/2 < 1$, ces séries convergent, ce qui assure l'existence d'une espérance pour T_2.

$$E(T_2) = 2\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1\right) - 2\left(\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 1\right) = \frac{2}{1/4} - \frac{2}{4/9} = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$$

Exercice :

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus.
Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n=3$ et $p=\dfrac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $P(A)=\dfrac{13}{27}$.
2. Montrer que : $G(\Omega)=\{-30,-10,0,20\}$, puis expliciter la loi de G.
3. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y=(-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

1. (a) On note $Z=\dfrac{Y+1}{2}$. Déterminer $Z(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
   (b) Démontrer que : $E(Y)=2P(A)-1$.
2. (a) Donner la loi de X.
   (b) En déduire que l'on a également : $E(Y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$,
   puis que : $E(Y)=(1-2p)^n$.
3. Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p.
4. Démontrer que
$$P(A)\geqslant\frac{1}{2}\iff\left[p\leqslant\frac{1}{2}\text{ OU « } n \text{ est pair »}\right]$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $P(A)\geqslant\dfrac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $E(G)\leqslant 0$).

1. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que : $E(G)=10\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k kP(X=k)$.
2. Démontrer que : $\forall k\in[|1;n|],\quad k\dbinom{n}{k}=n\dbinom{n-1}{k-1}$.
3. Montrer que : $E(G)=-10np(1-2p)^{n-1}$
4. Démontrer alors que :
$$\begin{cases}P(A)\geq\dfrac{1}{2}\\ E(G)\leq 0\end{cases}\iff p\leq\frac{1}{2}$$
5. (a) Étudier la fonction f définie sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ par : $\forall x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\qquad f(x)=x(1-2x)^{n-1}$.

(b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Partie IV

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans le journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris ente 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du i-ième joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

1. Pour tout entier $i \in [|1, 200|]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.
2. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
   Démontrer alors que $E(J) = 500$ et $V(J) = 11250$.
3. Justifier que : $\quad P(J \leqslant 100) \leqslant P(|J - 500| \geqslant 400)$.
4. On appelle inégalité de Bienaymé-Tchébychev, l'inégalité suivante :
   $$P(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$
   Montrer que : $\quad P(J \leqslant 100) \leqslant \frac{9}{128}$.
5. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

1. Á chacun des trois lancers, on a une probabilité $p = 2/3$ d'obtenir *Pile* (et 1/3 pour l'alternative contraire), on reconnait en X une loi binomiale
   $$X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 2/3).$$
2. On voit que
   $$P(A) = P([X = 0] \cup [X = 2]) = P([X = 0]) + P([X = 2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1 + 3 \times 4}{3^3} = \frac{13}{27}.$$
3. Pour chaque valeur de X, on a une valeur différente de G. Si $X = 0$, alors $G = 0$, si $X = 1$, alors on perd 10 euros et $G = -10$, si $X = 2$, alors on gagne 20 euros et $G = 20$. Enfin, si $X = 3$, on perd 30 euros et $G = -30$. Au final,
   $$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$
4. On calcule l'espérance
   $$\begin{aligned} E(G) &= -30P(G = -30) - 10P(G = -10) + 20P(G = 20) \\ &= -30P(X = 3) - 10P(X = 1) + 20P(X = 2) \\ &= -30\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 10 \times 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 20 \times 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{150}{27} \end{aligned}$$
   On trouve donc que $E(G) > 0$ et le jeu est favorable au joueur.

Partie II

1. (a) Si $Y = 1$, alors $Z = 1$. Si $Y = -1$, alors $Z = 0$. On a bien $Z(\Omega) = \{0; 1\}$. De plus,
   $$P(Z = 1) = P(Y = 1) = P(X \in 2\mathbb{N}) = P(A),$$
   et on a bien $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$.

   (b) D'après la question précédente, $E(Z) = P(A)$ et $Y = 2Z - 1$. Par linéarité de l'espérance, on a donc
   $$E(Y) = E(2Z - 1) = 2E(Z) - 1 = 2P(A) - 1.$$

2. (a) Comme précédemment, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

(b) D'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned} E(Y) &= E((-1)^X) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

On utilise alors la formule du binôme

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k} = (-p+1-p)^n = (1-2p)^n.$$

3. D'après les questions 1b. et 2b., on a

$$(1-2p)^n = E(Y) = 2P(A) - 1 \iff P(A) = \frac{(1-2p)^n+1}{2}.$$

4. On résout

$$\begin{aligned} P(A) \geq \frac{1}{2} &\iff \frac{(1-2p)^n+1}{2} \geq \frac{1}{2} \\ &\iff (1-2p)^n \geq 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } 1-2p \geq 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } p \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Partie III

1. On "gagne" 10 euros pour chaque *Pile* (compté avec X) affecté du signe donné par Y selon la parité de X, ou encore

$$G = 10XY = 10X(-1)^X.$$

Toujours avec le théorème de transfert, on obtient

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{k=0}^{n} 10k(-1)^k P(X=k) \\ &= 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

2. Soit $k \in [|1;n|]$.

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

3. C'est un peu le même calcul que celui justifiant la formule de l'espérance de la binomiale.

$$\begin{aligned} E(G) &= 10\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k} \\ &= 10n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-p)^k(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= 10n(-p)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-p)^j(1-p)^{n-1-j} \\ &= -10np(1-2p)^{n-1} \end{aligned}$$

4. On connait déjà les conditions pour que $P(A) \geq 1/2$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} E(G) \leq 0 &\iff -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0 \\ &\iff (1-2p)^{n-1} \geq 0 \\ &\iff 1-2p \geq 0 \text{ ou } n\text{impair} \end{aligned}$$

Comme n ne peut pas être pair et impair à la fois, l'intersection des conditions précédentes donne bien

$$\left\{ \begin{array}{l} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{array} \right. \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

5. (a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a foriori* sur $[0; 1/2]$. Le calcul donne

$$f'(x) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx).$$

On obtient le tableau de variations suivant

x	0		$1/2n$		$1/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(1/2n)$	$\searrow$	0

avec

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

(b) La rentabilité est optimale pour le concepteur lorsque l'espérance du gain est minimale, ou, de manière équivalente, lorsque $f(p)$ est maximal sur $[0; 1/2]$. Il faut donc choisir

$$p = \frac{1}{2n}.$$

Partie IV

1. Ici, on explicite facilement la loi de G_i en revenant à la définition du jeu. $G_i(\Omega) = \{0, -10, 20\}$. et

a	0	-10	20
$P(G_i = a)$	$9/16$	$6/16$	$1/16$

Ceci permet de calculer facilement l'espérance et la variance

$$E(G_i) = -10 \times \frac{9}{16} + 20 \times \frac{1}{16} = -\frac{5}{2}$$

et

$$V(G_i) = E(G_i^2) = E(G_i)^2 = 100 \times \frac{9}{16} + 400 \times \frac{1}{16} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} = \left(\frac{15}{2}\right)^2.$$

2. Il est clair que le gain du forain est égal à l'opposé du total des gains de tous les joueurs, ou encore

$$J = -\sum_{i=1}^{200} G_i.$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(J) = -\sum_{i=1}^{200} E(G_i) = -200 \times \left(-\frac{5}{2}\right) = 500$$

et, par indépendance (que l'on peut supposer) des G_i,

$$V(J) = (-1)^2 \sum_{i=1}^{200} V(G_i) = 200 \times \frac{225}{4} = 11250.$$

3.

$$\begin{aligned} |J - 500| \geq 400 &\iff J - 500 \geq 400 \text{ ou } J - 500 \leq -400 \\ &\iff J \geq 900 \text{ ou } J \leq 100 \end{aligned}$$

En particulier, l'évènement

$$[J \leq 100] \subset [|J - 500| \geq 400]$$

et on a bien la comparaison des probabilités correspondantes voulue.

4. En utilisant la question précédente et l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, on voit que

$$P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400) \leq \frac{V(J)}{400^2} = \frac{11250}{160000} = \frac{9}{128}.$$

5. Le forain installera son stand si $P(J \leq 100) \leq 10\%$. Or, cette probabilité est majorée par $9/128$ qui est inférieur à 10% (en effet $9/128 \leq 9/100 < 10\%$). Donc il peut installer son stand.

Exercice :

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note :

B_k l'évènement : "on obtient une boule bleue au k-ième tirage"

R_k l'évènement : "on obtient une boule rouge au k-ième tirage"

Partie I : Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner $P(R_k)$ en fonction de b et de r, les nombres respectifs de boules bleues et de boules rouges dans l'urne avant le $k^{\text{ième}}$ tirage.
2. Compléter (lignes 7,8 et 10) de la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
function s=EML(n)
   b=1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
   r=2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
   s=0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
   for k=1:n
        x=rand()
        if ..... then
           ..... .....
        else
            .....
        end
    end
 endfunction
```

3. On exécute le programme suivant :

```
n=10
m=0
for i=1:1000
    m=m+EML(n)
end
disp(m/1000)
```

On obtient `6.657`. Comment interpréter ce résultat ? Expliquer.

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement $[Y = n]$ en fonction d'évènements R_k et B_k.
5. En déduire, en simplifiant la fraction obtenue, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.
6. (a) Trouver deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([Y = n]) = \dfrac{a}{(n+1)} + \dfrac{b}{(n+2)}$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P([Y = n]) = 1$.
7. (a) Vérifier que pour tout $n \geq 4$, on a $\dfrac{2n}{(n+1)(n+2)} > \dfrac{1}{n}$. (*on pourra se servir de l'encadrement* $4 < \sqrt{17} < 5$) .

   (b) En déduire que Y n'admet pas d'espérance. Y admet-elle une variance ?

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si on obtient une boule rouge au k-ième tirage et égale à 0 sinon.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages.

8. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

9. Reconnaître la loi de X_1, puis donner son espérance et sa variance.

10. (a) Calculer $P(X_2 = 1)$ par la formule des probabilités totales. En déduire la loi de X_2.
    (b) Justifier que les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [|0; n|]$. On **admet** le résultat suivant : $P([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.
    (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $E(S_n) = \dfrac{2n}{3}$. (*on rappelle, même si c'est au programme, que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).
    (b) Donner la répartition de l'urne une fois que l'événement $[S_n = k]$ se réalise.
    (c) En déduire que : $P_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.
    (d) A l'aide de la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'évènements associé à la variable aléatoire S_n, montrer que $P([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{E(S_n)+2}{n+3}$.
    (e) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Partie IV : Etude d'une convergence

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

12. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x < 0, \quad P([T_n \leq x]) = 0, \quad$ et : $\forall x > 1, \quad P([T_n \leq x]) = 1$.
13. Soit $x \in [0; 1]$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $P([T_n \leqslant x]) = \dfrac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}$ où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.
14. En déduire, pour $x \in [0; 1]$ $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(T_n \leq x)$.

Partie I : Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par équiprobabilité (boules indiscernables au toucher), on aura $P(R_k) = \dfrac{r}{b+r}$.
2. $P(R_k) = \dfrac{r}{r+b}$ et l'événement « $rand() <= \dfrac{r}{r+b}$ » est réalisé avec cette même probabilité car $rand()$ simule la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

```
function s=EML(n)
   b=1 // b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
   r=2 // r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
   s=0 // s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k=1:n
        x=rand()
        if x<=r/(r+b) then  //si la boule tirée est rouge
            r=r+1;s=s+1  // on augmente alors les nombres de rouges
        else
             b=b+1 // on augmente seulement le nombre de boules bleues dans l'urne
        end
    end
endfunction
```

3. On répète 1000 fois l'expérience de 10 tirages , m compte le nombre total de boules rouges obtenues et $m/1000$ le nombre moyen de boules rouges obtenues lors de la simulation. Comme 1000 est grand, ce nombre moyen a de très fortes chances d'être environ égal à l'espérance, qui sera noté $E(S_{10})$ dans la suite du problème.

En effet, si on prend le résultat de la question 12.a, on a $E(S_{10}) = \frac{20}{3} \approx 6.67$, ce qui est très voisin de `6.657`.

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

4. cf question suivante pour les deux questions.
5. Tout d'abord , comme il y remise de boules dans l'urne, il est clair que Y peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*$. Et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et en augmentant de 1 le nombre de boules rouges après chacun des $n-1$ premiers tirages :
$$\begin{aligned} P([Y=n]) &= P(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n) &&= \frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\cdots\frac{2+(n-2)}{3+(n-2)}\frac{1}{3+(n-1)} \\ &= \frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{4}{5}\cdots\frac{n}{n+1}\frac{1}{n+2} &&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$
La simplification se fait par téléscopage dans le produit. Quelques justifications :
   - Pour la deuxième égalité ,les évènements n'étant pas indépendants , on utilise la formule des probabilités composées .
   - pour tout $k \in [|1; n-1|]$,on calcule $P_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap Rk-1}(R_k)$ en faisant le quotient du nombre de boules rouges dans l'urne $(2+(k-1))$ par le nombre total de boules dans l'urne $(3+(k-1))$.
6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
$$\frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} = \frac{a(n+2)+b(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(a+b)+2a+b}{(n+1)(n+2)}$$
Deux polynômes étant égaux ssi ils ont même degré et mêmes coefficients,
$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} \Leftrightarrow 2 = n(a+b)+2a+b \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$$
   (b) En utilisant le résultat précédent et, par téléscopage, on a, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} P([Y=n]) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{(n+1)} - \frac{2}{(n+2)} = \frac{2}{2} - \frac{2}{N+2} = 1 - \frac{2}{N+2}$ qui tend bien vers 1 lorsque $N \to +\infty$, ce qui justifie que la série converge vers 1.
7. (a) Comme tous les termes sont strictement positifs, cela revient (en multipliant de chaque côté par les deux dénominateurs) à démontrer que, pour tout $n \geq 4$, on a $2n^2 > (n+1)(n+2) \Leftrightarrow 2n^2 > n^2+3n+2 \Leftrightarrow n^2-3n-2 > 0$.
Or, $\Delta = 17$ et les racines de ce polynôme sont $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$.
D'après l'encadrement donné, la plus grand est comprise entre $\frac{3+4}{2} = 3,5$ et $\frac{3+5}{2} = 4$. Donc, comme n est plus grand que cette racine (car $n \geq 4$), le polynôme est du signe de a donc positif, ce qui démontre l'inégalité
   (b) La série harmonique est divergente et, d'après l'inégalité précédente, cela implique que la série de terme général $\frac{2n}{(n+1)(n+2)} = nP([Y=n])$ est également divergente (comparaison des sommes partielles). Par conséquent, Y n'admet pas d'espérance, ce qui implique qu'elle n'admet pas non plus de variance.

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

8. De façon classique, X_k étant le nombre de boules rouges tirées (0 ou 1) au k-ième tirage et S_n le nombre total de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages : $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
9. La variable aléatoire X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_1 = 1) = P(R_1) = \frac{2}{3}$.
Son espérance est donc $E(X_1) = p = \frac{2}{3}$ et sa variance $V(X_1) = p(1-p) = \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.
10. (a) On utilise le SCE associé à X_1 dans la formule des probabilités totales, ce qui donne :
$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = P(B_1R_2) + P(R_1R_2) = \frac{1}{3}\frac{2}{4} + \frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ par la formule des probabilités totales.
Comme X_2 ne prend que les valeurs 0 et 1, on en déduit que X_2 suit aussi une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{3}$.
    (b) Comme $P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ et $P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \frac{1}{2}$, on déduit que les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [|0; n|]$. On **admet** le résultat suivant : $P([S_n = k]) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

(a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,$S_n(\Omega) = [|0;n|]$,donc S_n admet une espérance et : $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP([S_n = k])$.

Donc $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k\right)$.

Soit $E(S_n) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2}\right) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\dfrac{n(n+1)}{2}\left(\dfrac{(2n+1)}{3} + 1\right)$

Finalement : $E(S_n) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\dfrac{n(n+1)}{2}\left(\dfrac{(2(n+2)}{3}\right) = \dfrac{2n}{3}$.

(b) L'événement $(S_n = k)$ se réalise lorsque sur n tirages , il apparaà®t k boules rouges et $n-k$ boules bleues, <u>dans un ordre indéterminé</u> .

La répartition de l'urne est alors $2+k$ boules rouges et $1+n-k$ boules bleues pour un total de $3+n$ boules.

(c) Par équiprobabilité, il est immédiat de déduire que $P_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

(d) La formule des probabilités totales associée au système complet d'évènements $([S_n = k])_{k\in[|0;n|]}$ fournit :

$$P([X_{n+1} = 1]) = \sum_{k=0}^{n} P_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1])\,P([S_n = k])$$

$$P([X_{n+1} = 1]) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{n+3}P([S_n = k]) = \frac{1}{n+3}\left(\sum_{k=0}^{n} kP([S_n = k]) + 2\sum_{k=0}^{n} P([S_n = k])\right)$$

$$P([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{n+3}(E(S_n) + 2) = \frac{E(S_n) + 2}{n+3}.$$

(e) X_{n+1} suit une loi de Bernoulli et, puisque $E(S_n) = \dfrac{2n}{3}$, son paramètre est :

$$P([X_{n+1} = 1]) = \frac{E(S_n) + 2}{n+3} = \frac{\frac{2n}{3} + 2}{n+3} = \frac{\frac{2n+6}{3}}{n+3} = \frac{2}{3}.$$

On remarque que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ , } X_n \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \dfrac{2}{3}}$.

Partie IV : Etude d'une convergence

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n(\Omega) = [|0;n|]$ donc $T_n(\Omega) = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dots, \dfrac{n-1}{n}, 1\right\} \subset [0;1]$.
    Ainsi,
    $\forall x < 0, \quad P([T_n \leqslant x]) = 0, \quad$ et : $\quad \forall x > 1, \quad P([T_n \leqslant x]) = 1$.

13. Soit $x \in [0;1]$ et soit n de $\mathbb{N}^*$:
    $P([T_n \leqslant x]) = P([S_n \leqslant nx]) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor} P([S_n = k]) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor} \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$ d'après le résultat de la question 8. (b) de la partie III.
    Ainsi,
    $P([T_n \leqslant x]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor}(k+1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{j=1}^{\lfloor nx\rfloor+1} j$ (changement d'indice $j = k+1$)
    Or, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} j = \frac{m(m+1)}{2}$ donc, avec $m = \lfloor nx\rfloor + 1$ on obtient :
    $P([T_n \leqslant x]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\dfrac{(\lfloor nx\rfloor + 1)(\lfloor nx\rfloor + 2)}{2}$
    <u>Conclusion :</u> $\boxed{P([T_n \leqslant x]) = \dfrac{(\lfloor nx\rfloor + 1)(\lfloor nx\rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)} \text{ si } x \in [0;1]}$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction de répartition de T_n est donnée par :
    $$P([T_n \leqslant x]) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{(\lfloor nx\rfloor + 1)(\lfloor nx\rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)} & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}.$$
    Etudions la limite de $\dfrac{(\lfloor nx\rfloor + 1)(\lfloor nx\rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}$ lorsque n tend vers $+\infty$:
    $\dfrac{(\lfloor nx\rfloor + 1)(\lfloor nx\rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{(\lfloor nx\rfloor + 1)}{(n+1)}.\dfrac{(\lfloor nx\rfloor + 2)}{(n+2)}$
    Or, $\dfrac{(\lfloor nx\rfloor + 1)}{(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}$.

Et pour tout $x \in [0;1]$, $\qquad nx - 1 \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant nx \Rightarrow x - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$

Ainsi d'après le théorème de l'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\lfloor nx \rfloor + 1)}{(n+1)} = x$.

De même, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+2)} = x$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} P\left([T_n \leqslant x]\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}}$.

Exercice : EDHEC

Une société possède un serveur vocal qui reçoit des appels consécutifs soit pour le produit A, soit pour le produit B. Les sujets des appels (produit A ou produit B) sont supposés indépendants les uns des autres.

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes et seules les deux premières concernent le serveur vocal

PARTIE I : Etude de 100 appels

On suppose dans cette partie que le serveur vocal reçoit 100 appels. On suppose que 5 % des appels reçus par le serveur concernent le produit A et 95 % des appels concernent le produit B. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'appels concernant le produit A au cours des 100 appels reçus.

1. (a) Donner la loi de X. On précisera $X(\Omega)$ ainsi que $P(X=k)$ pour $k \in X(\Omega)$.
   Une réponse argumentée est attendue.

   (b) Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
2. On suppose que chaque appel concernant le produit A permet à la société d'engranger un bénéfice net de 95 euros et chaque appel concernant le produit B permet à la société d'engranger un bénéfice net de 5 euros. On note Y le bénéfice total de la société pour 100 appels.

   Donner la relation entre Y et X, et en déduire l'espérance et la variance de Y.
3. On suppose que l'on peut approcher la loi de la variable X par la loi d'une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson de même espérance que X.

   (a) Déterminer la valeur du paramètre de cette loi de Poisson.

   (b) Exprimer $P\left(X \geqslant 10\right)$ en fonction de λ

PARTIE II : Etude de la première série d'appels

On suppose dans cette partie que le serveur vocal reçoit une infinité d'appels consécutifs. On suppose également que 20 % des appels concernent le produit A et 80 % des appels concernent le produit B. On dit que le serveur possède une **première série d'appels de longueur** n si les n premiers appels concernent le même produit et le $(n+1)$-ième appel concerne l'autre produit. On note :

- X_A la variable aléatoire égale au nombre d'appels nécessaires pour obtenir le premier appel concernant le produit A ;
- X_B la variable aléatoire égale au nombre d'appels nécessaires pour obtenir le premier appel concernant le produit B ;
- L la variable aléatoire égale à la longueur de la première série d'appels.
- A_i : " le i-ème appel concerne le produit A.

Par exemple, si les premiers appels sont $AAABBAAAA\ldots$, alors dans ce cas, on a $X_A=1$, $X_B=4$ et $L=3$.

1. (a) Reconnaître les loi de X_A et X_B. *Une réponse argumentée est attendue.* On précisera leurs supports ainsi que $P(X_A=k)$, $P(X_B=k)$.

   (b) Donner leurs espérances et variances.

   (c) En déduire $E(X_A^2)$ et $E(X_B^2)$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

   (a) Exprimer les événements $(L=n)\cap(X_B=n+1)$ et $(L=n)\cap(X_A=n+1)$ à l'aide des évènements $(A_i)_{i\geq 1}$.

   (b) En déduire l'expression de $P\left(L=n\right)$ en fonction de n et vérifier que :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad P\left(L=n\right) = 0,8 \times P\left(X_A=n\right) + 0,2 \times P\left(X_B=n\right).$$

3. Montrer que les espérances de L et de L^2 existent et sont données par :

$$\begin{aligned} E\left(L\right) &= 0,8 \times E\left(X_A\right) + 0,2 \times E\left(X_B\right), \\ E\left(L^2\right) &= 0,8 \times E\left(X_A^2\right) + 0,2 \times E\left(X_B^2\right). \end{aligned}$$

   En déduire la valeur de l'espérance $E\left(L\right)$ et de la variance $V\left(L\right)$ de la variable aléatoire L.

PARTIE I : Etude de 100 appels

1. (a) La variable X désigne le **nombre de succès** dans la **répétition** de $n=100$ **épreuves de Bernoulli identiques** et **indépendantes**, dont le succès « l'appel concerne le produit A » a pour probabilité $p=0,05$. Donc X suit la loi **binomiale** de paramètres 100 et $0,05$: $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(100;0,05)}$.

On a alors $\boxed{X(\Omega) = [|0;100|]}$, et, $\boxed{\text{pour tout } k \in [|0;100|],\ P(X=k) = \binom{100}{k}(0,05)^k(0,95)^{100-k}.}$

(b) On a immédiatement $\boxed{E(X) = np = 5}$ et $\boxed{V(X) = np(1-p) = 5 \times 0,95 = 4,75}$.

2. Il y a X appels concernant le produit A, ce qui génère un revenu de $95X$, et $100 - X$ appels concernant le produit B, ce qui génère un revenu de $5(100 - X)$. Ainsi, le revenu global est : $\boxed{Y = 95X + 5(100 - X) = 90X + 500.}$
   D'où :
   $E(Y) = E(90X + 500) = 90E(X) + 500 = 950$ et $V(Y) = V(90X + 500) = 90^2V(X) = 8100 \times 4,75 = 38\,475$.
3. Le paramètre d'une loi de Poisson est son espérance. Or, $E(X) = 5$, donc $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(5)$. Il vient ensuite :

$$P(X \geq 10) = P(Z \geq 10) = 1 - P(Z < 10) = 1 - P(Z \leq 9) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{5^k}{k!}e^{-5}.$$

PARTIE II : Etude de la première série d'appels

1. (a) X_A (reps. X_B)désigne le **rang du premier succès** dans la **répétition** d'une **infinité** d'**épreuves de Bernoulli identiques** et **indépendantes**, dont le succès « l'appel concerne le produit A » (resp. « l'appel concerne le produit B ») a pour probabilité $0,2$ (resp. $0,8$). Donc X_A suit la loi **géométrique** de paramètre $p = 0,2 = \dfrac{1}{5}$:
   $\boxed{X_A \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right)}$, et X_B suit la loi **géométrique** de paramètre $p = 0,8 = \dfrac{4}{5}$: $\boxed{X_B \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{4}{5}\right).}$
   On a alors : $\boxed{X_A(\Omega) = X_B(\Omega) = \mathbb{N}^*}$, et, pour tout $k \geqslant 1$, $\boxed{P(X_A = k) = (0,8)^{k-1} \times 0,2 \quad P(X_B = k) = (0,2)^{k-1} \times 0,8}$.

   (b) On a immédiatement $\boxed{E(X_A) = \frac{1}{p} = 5 \quad E(X_B) = \frac{5}{4}}$ et $\boxed{V(X_A) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0,8}{0,04} = 20 \quad V(X_B) = \frac{0,2}{0,64} = \frac{5}{16}}$.

   (c) Puis, grâce à la formule de Kœnig-Huygens $\boxed{E(X_A^2) = V(X_A) + E(X_A)^2 = 20 + 5^2 = 45}$ et
   $\boxed{E(X_B^2) = V(X_B) + E(X_B)^2 = \frac{5}{16} + \frac{25}{16} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}.}$

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

   (a) $[L = n] \cap [X_B = n + 1]$ signifie que la première série a une longueur égale à n, et que le premier appel concernant le produit B est intervenu lors du $(n + 1)^{ième}$ appel. Ainsi :

$$\boxed{[L = n] \cap [X_B = n + 1] = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap \overline{A_{n+1}}}$$

   De même : $[L = n] \cap [X_A = n + 1]$ signifie que la première série a une longueur égale à n, et que le premier appel concernant le produit A est intervenu lors du $(n + 1)^{ième}$ appel. Ainsi :

$$\boxed{[L = n] \cap [X_A = n + 1] = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \cap A_{n+1}}$$

   (b) Soit $n \geqslant 1$. Comme $[L = n] = [L = n] \cap [X_A = n + 1] \cup [L = n] \cap [X_B = n + 1]$, que les évènements $[L = n] \cap [X_A = n + 1]$ et $[L = n] \cap [X_B = n + 1]$ sont incompatibles, et que les évènements A_i sont mutuellement indépendants

$$\begin{aligned} P(L = n) &= \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(\overline{A_{n+1}}) + \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) \times P(A_{n+1}) = \boxed{(0,8)^n \times 0,2 + (0,2)^n \times 0,8} \\ &= 0,8 \times (0,8)^{n-1} \times 0,2 + 0,2 \times (0,2)^{n-1} \times 0,8 = \boxed{0,8 \times P(X_A = n) + 0,2 \times P(X_B = n)} \end{aligned}$$

3. On a $L(\Omega) = \mathbb{N}^*$. L admet une espérance si, et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} nP(L_n)$ converge absolument. Cette série étant à termes positifs, la convergence simple suffit. Soit $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} nP(L = n) &= \sum_{n=1}^{N} n(0,8 \times P(X_A = n) + 0,2 \times P(X_B = n)) \\ &= 0,8\left(\sum_{n=1}^{N} nP(X_A = n)\right) + 0,2\left(\sum_{n=1}^{N} nP(X_B = n)\right) \end{aligned}$$

On reconnaît le calcul des espérances des variables aléatoires X_A et X_B, qui existent puisque ce sont des variables de loi géométrique. Donc la série est convergente et L admet une espérance. Puis, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\boxed{E(L) = 0,8 \times E(X_A) + 0,2 \times E(X_B).}$$

De la même manière, L admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 1} n^2 P(L = n)$ converge.

Soit $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n^2 P(L=n) &= \sum_{n=1}^{N} n^2 (0,8 \times P(X_A = n) + 0,2 \times P(X_B = n)) \\ &= 0,8 \left(\sum_{n=1}^{N} n^2 P(X_A = n) \right) + 0,2 \left(\sum_{n=1}^{N} n^2 P(X_B = n) \right)\end{aligned}$$

On reconnaît le calcul des moments d'ordre 2 des variables aléatoires X_A et X_B, qui existent puisque ce sont des variables de loi géométrique. Donc la série est convergente et L possède un moment d'ordre 2. Puis, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\boxed{E(L^2) = 0,8 \times E(X_A^2) + 0,2 \times E(X_B^2)}.$$

Calculs : on avait $E(X_A) = 5$, $E(X_A)^2 = 45$, $E(X_B) = \dfrac{5}{4}$ et $E(X_B^2) = \dfrac{15}{8}$.

D'où :

$E(L) = 0,8 \times E(X_A) + 0,2 \times E(X_B) = \dfrac{4}{5} \times 5 + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{5}{4} = \boxed{\dfrac{17}{4}}$.

$E(L^2) = 0,8 \times E(X_A^2) + 0,2 \times E(X_B^2) = \dfrac{4}{5} \times 45 + \dfrac{1}{5} \times \dfrac{15}{8} = 36 + \dfrac{3}{8} = \dfrac{291}{8}$.

$V(L) = E(L^2) - (E(L))^2 = \dfrac{291}{8} - \left(\dfrac{17}{4}\right)^2 = \dfrac{582}{16} - \dfrac{289}{16} = \boxed{\dfrac{293}{16}.}$

Exercice :

Les parties I et II peuvent être considérées indépendantes.

Partie I : Un résultat préliminaire

Dans cette partie, x est un réel élément de $[0;1[$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in [0;x]$, simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^n \frac{t^n}{1-t} dt$.
3. Etablir à l'aide d'un encadrement que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} = 0$.
4. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Partie II : Etude d'une variable aléatoire

On admettra dans cette partie les deux résultat suivants :

$$\forall x \in [0;1[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.
On considère la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, définie par $u_k = -\frac{q^k}{kln(p)}$

1. (a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

   (b) Montrer, que $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

   On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par $P(X=k) = u_k$
2. (a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer .

   (b) Montrer également que X possède une variance et vérifier que : $V(X) = -\frac{q(q+\ln(p))}{(p\ln(p))^2}$.
3. Soit k un entier naturel non nul . On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'évènement $(X=k)$, est la loi binomiale de paramètres k et p, c'est à dire pour tout $i \in [0;n]$

   $$P_{[X=k]}(Y=i) = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}.$$

   (a) Montrer que $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi qu'un des résultats afin de montrer que :

   $$P(Y=0) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}$$

   (b) Après avoir montré que , pour tout couple (k,n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

   $$P(Y=n) = -\frac{p^n q^n}{n\ \ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (q^2)^{k-n}.$$

   En déduire , grâce à un des résultats admis, l'égalité :

   $$P(Y=n) = -\frac{q^n}{n\,(1+q)^n \ln(p)}$$

(c) Vérifier que l'on a $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k)=1$.

(d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln(p)$ et q .

(e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a : $V(Y)=-\dfrac{q(q+(1+q)\ln(p))}{(\ln(p))^2}$.

Partie I : Un résultat préliminaire

1. a) Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison t :

   Pour tout $t\in[0,x]\subset[0,1[$, on a $t\neq 1$ donc : $\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \dfrac{1-t^n}{1-t}}$

   b) On intègre l'égalité précédente sur $[0,x]$,où les fonctions sont continues :

$$\int_0^x (\sum_{p=1}^{n} t^{p-1})dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}dt.$$

   et par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{p=1}^{n}(\int_0^x t^{p-1}dt) = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt.$$

   et enfin

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt.}$$

   c) Pour $t\in[0,x]\subset[0,1[$, on a : $0\leq t\leq x$ et $0<1-x\leq 1-t$ d'où $0\leq \dfrac{1}{1-t}\leq\dfrac{1}{1-x}$

   et en multipliant par $t^n\geq 0$: $0\leq\dfrac{t^n}{1-t}\leq\dfrac{t^n}{1-x}$ sur $[0,x]$.

   Or $0\leq x$, donc en intégrant sur $[0,x]$,on obtient : $\boxed{0\leq \int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leq \int_0^x \dfrac{t^n}{1-x}\mathrm{d}t}$.

   Et comme

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-x}dt = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{1}{1-x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

   ($\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1}=0$ car $x\in[0,1[$),

   par le théorème d'encadrement (sur les limites en n), on a aussi : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}dt=0.}$

   d) Par conséquent :

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p} = -ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \underset{n\to+\infty}{\to} -ln(1-x)$$

   Le série de terme général $\left(\dfrac{x^p}{p}\right)_{p\geq 1}$ est donc convergente de somme : $\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x)}$.

Partie II : Etude d'une variable aléatoire

1. (a) Avec les conditions de l'énoncé : q^k et $-\ln(p)$ sont positifs donc $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^* :\ u_k = -\dfrac{q^k}{k\ln(p)} > 0.}$

   (b) $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} -\dfrac{q^k}{k\ln(p)} = -\dfrac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{q^k}{k} = -\dfrac{1}{\ln(p)}(-\ln(1-q)) = \boxed{1}$,

   en utilisant le premier résultat admis avec $q\in]0,1[$.

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n}|kP(X=k)| = -\sum_{k=1}^{n} k\frac{q^k}{k\ln(p)} = -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{n} q^k$$

   On reconnait le terme général d'une série géométrique. Comme $q\in]0,1[$, cette série converge donc $E(X)$ existe.

$$E(X) = -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = \boxed{-\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{1-q}}$$

(b) On cherche à utiliser le théorème de transfert. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} |k^2 P(X=k)| = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = -\sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{q^k}{k\ln(p)} = -\frac{q}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$$

On reconnait le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 1. Comme $q \in]0,1[$, cette série converge donc $E(X^2)$ existe et

$$E(X^2) = \boxed{-\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{(1-q)^2}}$$

Donc X admet une variance, et en utilisant la formule de Koenig-Hugens, on trouve :

$$\begin{aligned} V(X) = \quad & E(X^2) - E(X)^2 & = -\frac{1}{\ln(p)}.\frac{q}{(1-q)^2} - \left(\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{1-q}\right)^2 \\ & = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{(1-q)^2}\left(1+\frac{q}{\ln(p)}\right) & = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{(p)^2}\left(\frac{\ln(p)+q}{\ln(p)}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{V(X) = -\frac{q}{(p\ln(p))^2}\left(\frac{\ln(p)+q}{\ln(p)}\right).}$$

3. En notant $Y_{[X=k]}$ la v.a.r Y conditionnée par l'évènement $[X=k]$:

$$\forall n \in [[0,k]] : P_{[X=k]}\left(Y=n\right) = \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} .$$

(a) Comme on a $Y_{[X=k]}(\Omega) = [|0;k|]$ et que $X\ (\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
Par la formule des probabilités totales appliquées à l'événement $Y=0$ et avec le système complet d'événements $(X=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, on obtient :

$$\begin{aligned} P\left(Y=0\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P_{[X=k]}\left(Y=0\right)P(X=k) = -\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k\frac{q^k}{k\ln(p)} \\ &= -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^{2k}}{k} = -\frac{1}{\ln(p)}(-\ln(1-q^2)) = \frac{\ln(1-q)+\ln(1+q)}{\ln(p)} = \boxed{1+\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}} \end{aligned}$$

(b) Soit k et n deux entiers naturels non nuls.

$$\frac{1}{k}\binom{k}{n} = \frac{1}{k}\frac{k!}{n!(k-n)!} = \frac{(k-1)!}{n(n-1)!(k-n)!} = \frac{1}{n}\frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-1-(n-1))!} = \boxed{\frac{1}{n}\binom{k-1}{n-1}}$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(Y=n\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P_{[X=k]}\left(Y=n\right).P(X=k) \quad \text{(formule des probabilités totales).} \\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{k}{n}.p^n(q)^{k-n}.\frac{(q)^k}{k\ln(p)} = -\frac{p^nq^n}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{k}{n}.\frac{q^{2k-2n}}{k} \\ &= -\frac{p^nq^n}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\binom{k-1}{n-1}(q^2)^{k-n} = -\frac{p^nq^n}{n\ln(p)}\frac{1}{(1-q^2)^n} \quad \text{(résultat admis avec } x = 1-q^2 \in [0,1[). \\ &= \boxed{-\frac{q^n}{n\ln(p)}\frac{1}{(1+q)^n}} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=n) &= P(Y=0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=n) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^n}{n\ln(p)}\frac{1}{(1+q)^n} \\ &= 1+\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \frac{1}{\ln(p)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{q}{1+q})^n \text{ (on montre que } \frac{q}{1+q} \in [0,1[). \\ &= 1+\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \frac{1}{\ln(p)}(-ln(1-\frac{q}{1+q})) = 1+\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \frac{1}{\ln(p)}(-\ln(\frac{1}{1+q})) = \boxed{1} \end{aligned}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{n} |iP(Y=i)| = \sum_{i=1}^{n} -i\frac{q^i}{i\ln(p)}\frac{1}{(1+q)^i} = -\frac{1}{\ln(p)}\sum_{i=1}^{n}(\frac{q}{1+q})^i$$

On reconnait le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{q}{1+q} \in [0,1[$. Donc la série converge et Y admet une espérance.

$$\boxed{E(Y) = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{1+q}\frac{1}{1-\frac{q}{1+q}} = -\frac{q}{\ln(p)}.}$$

(e) On cherche à utiliser le théorème de transfert. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} |k^2P(Y=k)| = \sum_{k=1}^{n} n^2P(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} -k^2.\frac{q^k}{k\ln(p)}\frac{1}{(1+q)^k} = -\frac{q}{(1+q)\ln(p)}\sum_{k=1}^{n}k(\frac{q}{1+q})^{k-1}$$

On reconnait le terme général d'une série géométrique dérivée d'ordre 1, Comme $\frac{q}{1+q} \in [0,1[$,la série converge et Y admet un moment d'ordre 2.

$$\boxed{E(Y^2) = -\frac{1}{\ln(p)}\frac{q}{1+q}\frac{1}{(1-\frac{q}{1+q})^2} = -\frac{q(1+q)}{\ln(p)}.}$$

D'où la variance de X :

$$\begin{aligned} V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 &= -\frac{q(1+q)}{\ln(p)} - \left(\frac{q}{\ln(p)}\right)^2 \\ &= -\frac{q}{\ln(p)}\left(1+q+\frac{q}{\ln(p)}\right) = -\frac{q}{\ln(p)}\left(\frac{(1+q)ln(p)+q}{\ln(p)}\right) \\ &= \boxed{-q\left(\frac{(1+q)\ln(p)+q}{(\ln(p))^2}\right).} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variables X_n prend ses valeurs dans $[\![2; n+1]\!]$. Par exemple, si $n=5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5,3,2,2,6,3, alors $X_5=4$. Pour tout k de $[\![1; n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

Partie I : Etude du cas $n=3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n=3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. (a) Justifier que $[X_3=4]=[N_1=3]\cap[N_2=2]\cap[N_3=1]$. En déduire $\mathrm{P}(X_3=4)$.
   (b) Montrer que $P(X_3=2)=\dfrac{2}{3}$, et en déduire $P(X_3=3)$.
2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1; n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
4. Calculer $P(X_n=n+1)$.
5. Montrer, pour tout i de $[\![1; n]\!]$: $P_{(N_1=i)}(X_n=2)=\dfrac{n-i+1}{n}$.
6. En déduire à l'aide de la formule des probabilités totales, une expression simple de $P(X_n=2)$.
7. Soit $k\in[\![2; n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $(X_n>k)=(N_1>N_2>\ldots>N_k)$.
8. On en déduit (on ne demande pas de le démontrer), que $P(X_n>k)=\left(\dfrac{1}{n}\right)^k\dbinom{n}{k}$.
   Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k=0$ et pour $k=1$.
9. Exprimer, pour tout $k\in[\![2; n+1]\!]$, $P(X_n=k)$ à l'aide de $P(X_n>k-1)$ et de $P(X_n>k)$.
10. En déduire : $\mathrm{E}(X_n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X_n>k)$. Calculer ensuite $\mathrm{E}(X_n)$. On admet que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}E(X_n)=e$.
11. (a) Montrer à l'aide d'une expression factorielle, que pour tout $0\leq k\leq n$, $(k-1)\dbinom{n+1}{k}=n\dbinom{n}{k-1}-\dbinom{n}{k}$.
    (b) En déduire que : $\forall k\in[\![[2; n+1]\!]$, $P(X_n=k)=\dfrac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

Partie III : Comportement asymptotique

12. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.
    On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2; +\infty[\![$ telle que :
$$\forall k\in[\![2; +\infty[\![, P(Z=k)=\frac{k-1}{k!}$$
13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathrm{E}(Z)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}(X_n)$.

Partie I : Etude du cas $n=3$

1. (a) Pour que $[X_3=4]$ se réalise, il faut que les trois premiers numéros ne cessent décroître, et comme il n'y a que trois numéros dans l'urne, la quatrième boule peut valoir n'importe quoi. Il n'y a une qu'une seule façon pour ces numéros de décroitre ainsi, tirer le 3, puis le 2, puis le 1. Ainsi on a bien $\boxed{[X_3=4]=[N_1=3]\cap[N_2=2]\cap[N_3=1].}$
   (b) Les tirages se faisant avec remise, ils peuvent être considérés indépendants. Ainsi
$$P(X_3=4)=P(N_1=3)P(N_2=2)P(N_3=1)=\left(\frac{1}{3}\right)^3$$
$\boxed{P(X_3=4)=\dfrac{1}{27}.}$

2. Pour que $[X_3 = 2]$ se réalise , les tirages possibles sont ceux qui commence par 1, ceux qui commencent par 2,2 ou 2,3 ou encore tirages qui commencent par 3,3 . En terme d'évènements, cela se traduit par la relation.

$$[X_3 = 2] = [N_1 = 1] \cup ([N_1 = 2] \cap [N_2 = 2]) \cup ([N_1 = 2] \cap [N_2 = 3]) \cup ([N_1 = 3] \cap [N_2 = 3])$$

Par incompatibilité des $[N_1 = k]$, on obtient

$$P(X_3 = 2) = P([N_1 = 1]) + P([N_1 = 2] \cap [N_2 = 2]) + P([N_1 = 2] \cap [N_2 = 3]) + P([N_1 = 3] \cap [N_2 = 3])$$

Les tirages étant indépendants, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2) &= P([N_1 = 1]) + P([N_1 = 2])P([N_2 = 2]) + P([N_1 = 2])P([N_2 = 3]) + P([N_1 = 3])P([N_2 = 3]) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On trouve bien } P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}.}$ Comme $X_3(\Omega) = \{2, 3, 4\}$, $P(X_3 = 1) + P(X_3 = 2) + P(X_3 = 3) = 1$ et $\boxed{P(X_3 = 3) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27}}$.

3. $$E(X_3) = 2P(X_3 = 2) + 3P(X_3 = 3) + 4P(X_3 = 4) = \frac{4}{3} + \frac{24}{27} + \frac{4}{27} = \boxed{\frac{64}{27}}$$

Partie II : Cas général

4. Pour tout $k \in [|2; n + 1|]$, N_k représente le numéro de la boule au k-ième tirage, et nous sommes en situation d'équi-probabilité. Elle suit donc $\boxed{\text{une loi uniforme } \mathcal{U}([|1; n|]), \text{ et } E(N_k) = \frac{n+1}{2} \ V(N_k) = \frac{n^2 - 1}{12}.}$

5. L'évènement $[X_n = n + 1]$ se réalise si à chaque tiragef le numéro de la boule descend de 1. Ainsi

$$[X_n = n + 1] = [N_1 = n] \cap [N_2 = n - 1] \cap ... \cap [N_n = 1]$$

Comme les tirages sont indépendants :

$$P(X_n = n + 1) = \frac{1}{n} \times ... \times \frac{1}{n} = \boxed{\left(\frac{1}{n}\right)^n}$$

6. Si on sait que l'évènement $[N_1 = i]$, l'évènement $[X_n = 2]$ se réalise si la deuxième boule a un numéro supérieur ou égal à i. Comme il y a n boules, cela fait $n - i + 1$ possibilités, sur les n cas possibles. Ainsi

$$\boxed{P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n - i + 1}{n}}$$

7. La famille $([N_1 = i])_{i \in [|1;n|]}$ est un système complet d'évènements, de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X_n = 2) &= \sum_{i=1}^{n} P_{(N_1=i)}(X_n = 2)P(N_1 = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n - i + 1}{n} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n} n + 1 - \sum_{i=1}^{n} i \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left((n + 1)n - \frac{n(n + 1)}{2} \right) \\ &= \frac{n(n + 1)}{2n^2} = \boxed{\frac{n + 1}{2n}} \end{aligned}$$

8. L'évènement $[X_n > k]$ est réalisé si et seulement si au cours des k premiers tirages on n'a jamais obtenu un numéro égal ou supérieur au précédent, c'est à dire si et seulement si le numéro obtenu lors d'un tirage est inférieur au précédent, d'où

$$\boxed{[X_n > k] = [N_1 > N_2 > ... > N_k]}$$

9. Pour $k = 0$ et $k = 1$, comme on sait que les valeurs prises par X_n sont supérieures ou égales à 2 : $P(X_n > 0) = P(X_n > 1) = 1)$. Par ailleurs

$$\left(\frac{1}{n}\right)^0 \binom{n}{0} = 1 \qquad \left(\frac{1}{n}\right)^1 \binom{n}{1} = \frac{1}{n} \times n = 1$$

$\boxed{\text{Les relations sont bien vérifiées pour } k = 0 \text{ et } k = 1.}$

10. Pour tout $k \in [|2; n+1|]$, on a la relation $[X_n = k] = [X_n > k-1] \setminus [X_n > k]$, et comme $[X_n > k] \subset [X_n > k-1]$ alors

$$\boxed{P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k)}$$

11.

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k) = \sum_{k=2}^{n} k\left(P(X_n > k-1) - P(X_n > k)\right) = \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k-1) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k)$$

On effectue un changement d'indice $i = k-1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{i=1}^{n}(i+1)P(X_n > i) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k) = \sum_{i=1}^{n} P(X_n > i) + \sum_{i=1}^{n} iP(X_n > i) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(X_n > i) + P(X_n > 1) - (n+1)P(X_n > n+1) \end{aligned}$$

Or il n'est pas possible que $X_n > n+1$,et $P(X_n > 1) = 1 = P(X_n > 0)$ donc

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} P(X_n > i) + P(X_n > 0) = \boxed{\sum_{i=0}^{n} P(X_n > i)}$$

En utilisant ce qui nous est donné à la question précédente, ainsi que la formule du binôme de Newton, on trouve

$$E(X_n) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^i \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} 1^{n-i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \binom{n}{i} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

12. (a) Soit $1 \leq k \leq n$.

$$(k-1)\binom{n+1}{k} = (k-1)\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$$\begin{aligned} n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k} &= n\frac{n!}{(k-1)!(n+k-1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} = k \times n\frac{n!}{k!(n-k+1)!} - (n-k+1)\frac{n!}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(nk-n-1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)(k-1)}{k!(n-k+1)!} = (k-1)\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \end{aligned}$$

On retrouve bien les mêmes expressions :

$$\boxed{(k-1)\binom{n+1}{k} = n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k}}$$

(b) D'après la question 9)

$$P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k) = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\binom{n}{k-1} - \left(\frac{1}{n}\right)^k\binom{n}{k} = \left(\frac{1}{n}\right)^k\left(n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k}\right)$$

En utilisant la question précédente

$$P(X_n = k) = \left(\frac{1}{n}\right)^k (k-1)\binom{n+1}{k} = \boxed{\frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}}$$

Partie III : Comportement asymptotique

(c) Soit $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n!} = 0$ donc $\sum\limits_{k\geq 2} \dfrac{k-1}{k!}$ converge et

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!}} = 1$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$$\sum_{k=2}^{n} |kP(Z_n = k)| = \sum_{k=2}^{n} k \times \frac{(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1(k-1)}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{i!}$$

On reconnait le terme général d'une série exponentielle. Elle converge donc $\boxed{Z \text{ admet une espérance}}$ et

$$E(Z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} = \boxed{e}$$

$\boxed{\text{On retrouve le résultat donné dans la question 11, donc } \lim_{n \to +\infty} E(X_n) = E(Z).}$

Intégration

Problème : ESSEC

Etudier l'évolution des inégalités dans la répartition des richesses, matérielles ou symboliques, dans une société est un des thèmes majeurs des sciences humaines. Considérons un exemple élémentaire. Le tableau ci-dessous présente le pourcentage d'accès à l'enseignement secondaire en Grande-Bretagne lors de deux périodes pour deux catégories sociales :

	avant 1910	entre 1935 et 1940
Profession libérale	37%	62%
Ouvriers	1%	10%

On propose trois modes de comparaison des inégalités entre les deux classes sociales.

1. En regardant l'augmentation des pourcentages pour les deux classes entre les deux périodes on conclut que l'inégalité a augmenté entre la classe la plus aisée (Profession libérale) et la plus défavorisée (Ouvriers).
2. Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages, comme $\frac{10}{1} > \frac{62}{37}$, on déduit que l'inégalité a diminué.
3. Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages *de ceux qui n'accèdent pas à l'enseignement secondaire*, comme $\frac{90}{99} > \frac{38}{63}$, on déduit que l'inégalité a augmenté puisque le nombre de ceux qui n'ont pas accès à l'enseignement supérieur a proportionnellement plus diminué que celui de ceux qui y ont accès.

Comme on le voit chacune des façons de voir est légitime à sa manière. L'objet du problème est d'introduire des outils afin d'étudier la *concentration* d'une loi de probabilité pour contourner des paradoxes auxquels une analyse trop rapide peut conduire, ou du moins d'en être conscient.

Indice de Gini

On rappelle qu'une fonction numérique définie sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est *convexe* sur J si elle vérifie la propriété suivante : $\forall (t_1, t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2)$.
On rappelle en outre qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.
On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, continues et convexes sur $[0,1]$, et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour toute application f de E, on note $\tilde{f}$ l'application associée à f, définie sur $[0,1]$ par $\tilde{f}(t) = t - f(t)$.
On pose enfin $I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)dt = 2\int_0^1 (t - f(t))dt$. $I(f)$ s'appelle l'**indice de Gini** de l'application f.

1. (a) Donnez une interprétation géométrique de la propriété de convexité.
   (b) Lorsque f est une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$, rappeler la caractérisation de la convexité de f sur $[0,1]$ à l'aide de la dérivée f'.
2. (a) Justifier que $\tilde{f}$ est concave sur $[0,1]$.
   (b) Montrer que $I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)dt$.
   (c) Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions f et $t \mapsto t$ et donner une interprétation géométrique de $I(f)$.
3. **Un premier exemple**.
   Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0,1]$.
   (a) Montrer que f est un élément de E.
   (b) Calculer $I(f)$.
4. **Propriétés de l'indice de Gini.**
   (a) Pour f élément de E, établir que $I(f) \geq 0$.
   (b) Montrer que $I(f) = 0$ si et seulement si $f(t) = t$ pour tout $t \in [0,1]$.
   (c) Montrer que pour tout f élément de E, $I(f) < 1$.
   (d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n$.
      i. Pour tout entier n strictement positif, calculer $I(f_n)$.
      ii. En déduire que pour tout réel A vérifiant $0 \leq A < 1$, il existe f appartenant à E telle que $I(f) > A$.
5. **Minoration de l'indice de Gini**
   (a) Soit f élément de E. Montrer qu'il existe t_0 dans $]0,1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t \in [0,1]} \tilde{f}(t)$.
   (b) Montrer que pour tout t de $[0, t_0]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0).\frac{t}{t_0}$.
   (c) Montrer que pour tout t de $[t_0, 1]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0).\frac{t-1}{t_0-1}$.
   (d) En déduire que $I(f) \geq \tilde{f}(t_0)$.

L'indice de Gini donne une indication sur la concentration des richesses d'un pays si l'on suppose que la fonction f rend compte de cette concentration. Par exemple, $f(0,3) = 0,09$ s'interprète par le fait que dans la population classée par ordre de richesse croissante, les premiers 30% de la population possèdent 9% de la richesse totale du pays. Plus l'indice $I(f)$ est grand, plus la répartition des richesses est inégalitaire.

Le cas à densité

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et on admet que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1$.
Si g représente la densité de population classée suivant son revenu croissant, $G(x)$ représente la proportion de la population dont le revenu est inférieur à x.
On suppose de plus que $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x tg(t)dt$ est finie et on note m sa valeur, qui représente la richesse moyenne de la population.

6. (a) Montrer que $m > 0$.
   (b) Montrer que G est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$. On notera G^{-1} son application réciproque.
   (c) Quel est le sens de variation de G^{-1} sur $[0, 1[$?
7. (a) A l'aide du changement de variable $u = G(v)$, établir que pour tout $t \in [0, 1[$,
   $$\int_0^t G^{-1}(u)du = \int_0^{G^{-1}(t)} vg(v)dv.$$
   (b) En déduire que $\lim_{x\to 1} \int_0^x G^{-1}(u)du$ est existe et donner sa valeur.
8. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(t) = \dfrac{1}{m}\int_0^t G^{-1}(u)du$ pour tout $t \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$.
   (a) i. Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.
   ii. Montrer que f est convexe sur $[0, 1[$. **On admettra qu'en fait f est convexe sur** $[0, 1]$.
   iii. En déduire que f est un élément de E.
   (b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, l'égalité
   $$I(f) = -1 + \frac{2}{m}\int_0^\infty vg(v)G(v)dv.$$
9. Soit λ un réel strictement positif. On suppose dans cette question que g est une densité de la loi exponentielle de paramètre λ.
   (a) Expliciter $G(x)$ pour $x > 0$.
   (b) Expliciter $G^{-1}(u)$ pour $u \in [0, 1[$.
   (c) Donner la valeur de m.
   (d) Soit $t \in [0, 1[$. Montrer que $f(t) = -\int_0^t \ln(1-u)du$.
   (e) En déduire que pour tout t élément de $[0, 1[$, on a $f(t) = (1-t)\ln(1-t) + t$.
   (f) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)dt$ et la calculer.
   (g) En déduire la valeur de $I(f)$.

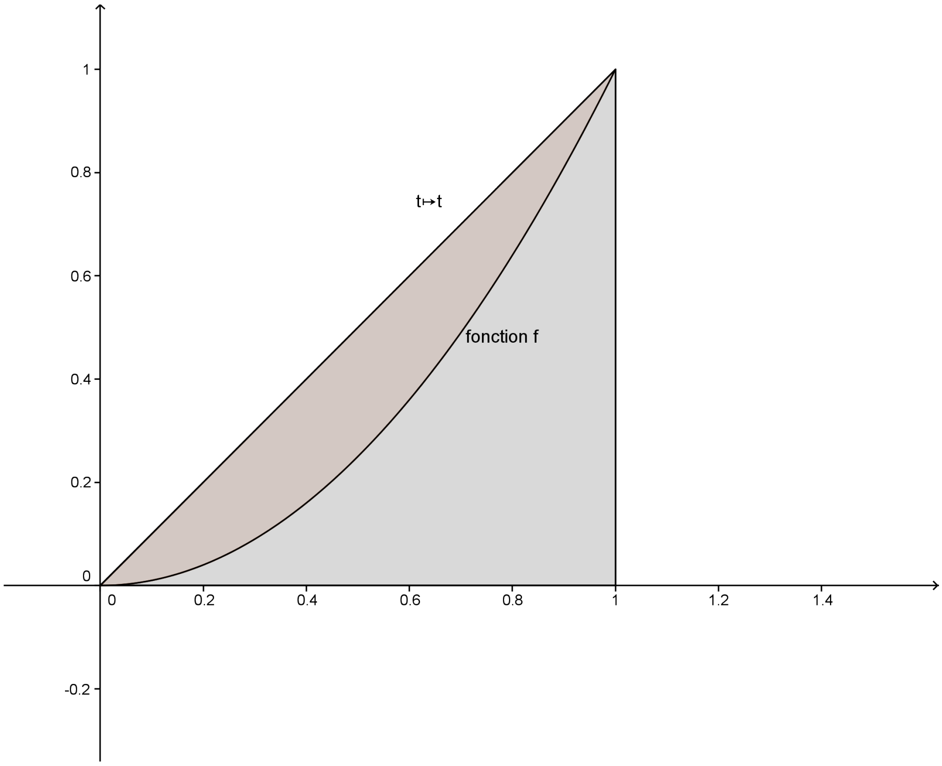
Indice de Gini

1. (a) La définition d'une fonction convexe sur J signifie que sur tout segment $[t_1, t_2]$ de J, l'image de tout point du segment $[t_1, t_2]$ est $\boxed{\text{en dessous de la corde passant par les points } (t_1, f(t_1)) \text{ et } (t_2, f(t_2)).}$
   (b) Lorsque f est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$, f est convexe sur $[0, 1]$ si et seulement si $\boxed{\text{sa dérivée est croissante sur } [0, 1].}$
2. (a) D'après l'énoncé, $\tilde{f}$ est concave si $-\tilde{f} : t \mapsto f(t) - t$ est convexe.
   Montrons que $-\tilde{f}$ est convexe :
   $\forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$,,
   $$\begin{aligned} -\tilde{f}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) - (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \\ &\underset{\text{car } f \text{ est convexe}}{\leq} \lambda f(t_1) + (1-\lambda)f(t_2) - \lambda t_1 - (1-\lambda)t_2 \\ &= \lambda(f(t_1) - t_1) + (1-\lambda)(f(t_2) - t_2) \\ &= \lambda.\left(-\tilde{f}(t_1)\right) + (1-\lambda).\left(-\tilde{f}(t_2)\right) \end{aligned}$$
   Ainsi, $\boxed{-\tilde{f} \text{ est bien convexe i.e. } \tilde{f} \text{ est concave.}}$

(b) Toutes les fonctions intervenant dans le calcul sont continues sur le segment $[0,1]$ donc y admettent une intégrale ; et par linéarité de l'intégration sur $[0,1]$:

$$I(f) = 2\left(\int_0^1 tdt - \int_0^1 f(t)dt\right) = 2\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 f(t)dt\right) = 1 - 2\int_0^1 f(t)dt$$

(c) On remarque dans le calcul précédent que $\int_0^1 tdt = \frac{1}{2} \leftrightarrow 2 = \frac{1}{\int_0^1 tdt}$. Ainsi, $I(f) = 2\int_0^1 (t - f(t))dt = \dfrac{\int_0^1 (t-f(t))dt}{\int_0^1 tdt}$ est la proportion de l'aire entre la courbe de f et la première bissectrice dans l'aire entre l'axe des abscisses et la première bissectrice sur le segment $[0,1]$.



3. **Un premier exemple**.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0,1]$.

(a)
- $\forall t \in [0,1]$, $t^2 \in [0,1]$ donc f est bien définie sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$ et en particulier $f(0) = 0^2 = 0$ et $f(1) = 1^2 = 1$.
- f est de classe C^2 sur $[0,1]$ comme fonction polynômiale. En particulier, elle est bien continue et de classe C^1 et $f''(t) = 2 \geq 0$ donc f' est croissante. f est bien convexe.

$\boxed{f \text{ est bien un élément de } E.}$

(b) $I(f) = 1 - 2\int_0^1 t^2 dt = 1 - 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

4. **Propriétés de l'indice de Gini.**
   (a) Montrons que $\tilde{f} \geq 0$ sur $[0,1]$:
   Comme l'énoncé donne les valeurs de $f(0)$ et $f(1)$, $\forall t \in [0,1]$, appliquons l'inégalité de convexité avec $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ et $\lambda = t$:
   $$f(t.1 + (1-t).0) \leq t.f(1) + (1-t).f(0) \Leftrightarrow f(t) \leq t \Leftrightarrow t - f(t) \geq 0$$
   Ainsi, $\boxed{\forall t \in [0,1]\ \tilde{f}(t) \geq 0}$ et par croissance des bornes, $\boxed{\int_0^1 \tilde{f}(t)dt \geq 0 \text{ donc } I(f) \geq 0.}$
   (b) $I(f) = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1],\ \tilde{f}(t) = 0$ car $\tilde{f}$ est continue et positive sur $[0,1]$.
   Ainsi, $I(f) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\forall t \in [0,1], f(t) = t}$.
   (c) Pour tout f élément de E, f est continue et positive et $f \neq 0$ (car $f(1) = 1$) donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt > 0$.
   Ainsi, $\boxed{I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)dt < 1.}$
   (d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n$.
      i. $I(f_n) = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 t^n dt = 1 - 2\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{1 - \frac{2}{n+1}}$.
      ii. • *Méthode 1 :* La question précédente donne $\lim\limits_{n\to+\infty} I(f_n) = 1$. Donc, par définition de la limite, en posant $\varepsilon = 1 - A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geq N$, $1 - \varepsilon < I(f_n) < 1 + \varepsilon$. Ainsi, en particulier, pour tout $n \geq N$, $I(f_n) > 1 - \varepsilon = A$.
      Donc $\boxed{f = f_N \text{ convient.}}$
      • *Méthode 2 :* Cherchons les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $I(f_n) > A$:
      $I(f_n) > A \Leftrightarrow 1 - \dfrac{2}{n+1} > A \Leftrightarrow \dfrac{2}{n+1} < 1 - A \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{2} > \dfrac{1}{1-A}$, car $1 - A > 0$, $\Leftrightarrow n > \dfrac{2}{1-A} - 1 \Leftrightarrow$ $n \geq \left\lfloor \dfrac{2}{1-A} \right\rfloor$.
      En posant $N = \left\lfloor \dfrac{2}{1-A} \right\rfloor$, alors $\boxed{f = f_N \text{ convient.}}$

5. **Minoration de l'indice de Gini**
   (a) $f \in E$ donc f est continue sur $[0,1]$ et $t \mapsto t$ est continue sur $[0,1]$ donc $\tilde{f}$ est continue sur le *segment* $[0,1]$. Or toute fonction continue sur un *segment* est bornée et atteint ses bornes. De plus, $\tilde{f}(0) = 0 - f(0) = 0$, $\tilde{f}(1) = 1 - f(1) = 0$ et $\tilde{f(t)} \geq 0$ sur $]0,1[$ donc il existe $\boxed{t_0 \text{ dans }]0,1[\text{ tel que } \tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t\in[0,1]} \tilde{f}(t).}$
   (b) On remarque que $t = \dfrac{t}{t_0}.t_0 = \dfrac{t}{t_0}.t_0 + (1 - \dfrac{t}{t_0}).0$. Ainsi, en appliquant l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec $t_1 = t_0$, $t_2 = 0$ et $\lambda = \dfrac{t}{t_0} \in [0,1]$ car $t \in [0, t_0]$, on a :
   $$\tilde{f}(t) = \tilde{f}\left(\frac{t}{t_0}.t_0 + (1 - \frac{t}{t_0}).0\right) \geq \frac{t}{t_0}.\tilde{f}(t_0) + (1 - \frac{t}{t_0}).\underbrace{\tilde{f}(0)}_{=0-f(0)=0} = \boxed{\frac{t}{t_0}.\tilde{f}(t_0)}$$
   (c) On remarque que $t = \dfrac{t-1}{t_0-1}.(t_0-1)+1 = \dfrac{t-1}{t_0-1}.t_0 - \dfrac{t-1}{t_0-1} + 1 = \dfrac{t-1}{t_0-1}.t_0 + 1 - \dfrac{t-1}{t_0-1}$. Ainsi, en appliquant l'inégalité de concavité à $\tilde{f}$ avec $t_1 = t_0$, $t_2 = 1$ et $\lambda = \dfrac{t-1}{t_0-1} \in [0,1]$ car $t \in [t_0, 1]$ donc $t_0 - 1 \leq t - 1 \leq 0$ donc en multipliant par $\dfrac{1}{t_0-1} < 0$, on a : $1 \geq \dfrac{t-1}{t_0-1} \geq 0$; on a :
   $$\tilde{f}(t) = \tilde{f}\left(\frac{t-1}{t_0-1}.t_0 + (1 - \frac{t-1}{t_0-1}).1\right) \geq \frac{t-1}{t_0-1}.\tilde{f}(t_0) + (1 - \frac{t-1}{t_0-1}).\underbrace{\tilde{f}(1)}_{=1-f(1)=0} = \boxed{\frac{t-1}{t_0-1}.\tilde{f}(t_0)}$$

(d) Ainsi,

$$\begin{aligned}
I(f) = 2\int_0^1 \tilde{f}(t)dt &\underset{\text{Chasles}}{=} 2\int_0^{t_0} \tilde{f}(t)dt + 2\int_{t_0}^1 \tilde{f}(t)dt \\
&\geq 2\int_0^{t_0} \frac{t}{t_0}.\tilde{f}(t_0)dt + 2\int_{t_0}^1 \frac{t-1}{t_0-1}.\tilde{f}(t_0)dt \quad \text{d'après les questions précédentes} \\
&= 2.\tilde{f}(t_0)\int_0^{t_0} \frac{t}{t_0}dt + 2.\tilde{f}(t_0)\int_{t_0}^1 \frac{t-1}{t_0-1}dt \\
&= 2.\tilde{f}(t_0)\left[\frac{t^2}{2t_0}\right]_0^{t_0} + 2.\tilde{f}(t_0)\left[\frac{(t-1)^2}{2(t_0-1)}\right]\int_{t_0}^1 \\
&= 2.\tilde{f}(t_0)\frac{t_0}{2} - 2.\tilde{f}(t_0)\frac{t_0-1}{2} \\
&= \boxed{\tilde{f}(t_0)}
\end{aligned}$$

Le cas à densité

Soit g une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \int_0^x g(v)dv$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Si g représente la densité de population classée suivant son revenu croissant, $G(x)$ représente la proportion de la population dont le revenu est inférieur à x. On suppose de plus que $\int_0^{+\infty} vg(v)dv$ est convergente et on note m sa valeur qui représente donc la richesse moyenne de la population.

6. (a) D'après l'énoncé, la fonction $v \mapsto vg(v)$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues et strictement positives donc $m = \int_0^{+\infty} vg(v)dv > 0$.

   (b) $G(x) = \int_{-\infty}^x g(v)dv$ car g est nulle sur $\mathbb{R}_-$. On reconnaît ainsi la fonction de répartition d'une variable aléatoire admettant g pour densité. Ainsi, d'après le cours :
   - G est continue sur $[0, +\infty[$.
   - G est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (car g est continue sur cet intervalle). Elle est en particulier dérivable et $G'(x) = g(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc G est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
   - $G(0) = \int_0^0 g(v)dv = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1$ car G est une fonction de répartition.

   Ainsi, G réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[G(0), \lim_{x\to+\infty} G(x)[= [0, 1[$.

   (c) G^{-1} est de même variation que G donc strictement croissante sur $[0, 1[$.

7. (a) G est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. On peut donc poser le changement de variable $u = G(v) \Leftrightarrow v = G^{-1}(u)$:
   - *bornes :* $\begin{array}{cl} & u : 0 \to t \\ \Leftrightarrow & v : G^{-1}(0) = 0 \to G^{-1}(t) \end{array}$.
   - *élément différentiel : $du = G'(v)dv = g(v)dv$.*

   Donc :
   $$\int_0^t G^{-1}(u)du = \int_0^{G^{-1}(t)} vg(v)dv.$$

   (b) G^{-1} étant la réciproque de G, on a $\lim_{t\to1} G^{-1}(t) = +\infty$.

   Ainsi, $\lim_{t\to1}\int_0^t G^{-1}(u)du = \lim_{t\to1}\int_0^{G^{-1}(t)} vg(v)dv = \int_0^{+\infty} vg(v)dv = m$.

   Donc $\int_0^1 G^{-1}(u)du$ converge et vaut m.

8. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(t) = \frac{1}{m}\int_0^t G^{-1}(u)du$ pour tout $t \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$.

   (a) i. - Sur $[0, 1[$:
   $t \mapsto \int_0^t G^{-1}(u)du$ est l'unique primitive de G^{-1} sur $[0, 1[$ qui s'annule en 0 . Ainsi, f est bien continue car dérivable sur $[0, 1[$.
   - En 1 :
   $\lim_{t\to1} f(t) = \frac{1}{m}\int_0^1 G^{-1}(u)du \underset{\text{d'après 7.(b)}}{=} \frac{1}{m}.m = 1f(1)$.

   Ainsi, f est continue sur $[0, 1]$.

ii. G^{-1} est continue sur $[0,1[$ comme bijection réciproque de G, continue sur $[0,+\infty[$ donc $t \mapsto \int_0^t G^{-1}(u)du$ est de classe C^1 sur $[0,1[$.
f est donc de classe C^1 sur $[0,1[$ et $f'(t) = \frac{1}{m}G^{-1}(t)$ est strictement croissante sur $[0,1[$ car G^{-1} est strictement croissante sur $[0,1[$ et $m > 0$.
Ainsi, f est bien convexe sur $[0,1[$.

iii.
- D'après les questions précédentes, f est bien définie sur $[0,1]$, elle est continue sur $[0,1]$ et convexe sur $[0,1]$.
- $f'(t) = \frac{1}{m}G^{-1}(t) \geq 0$ sur $[0,1[$ (car $m > 0$ et G^{-1} est à valeurs dans $[0,+\infty[$) donc f est croissante sur $[0,1]$.
  Ainsi, $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$: f est bien à valeurs dans $[0,1]$ et $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

(b) $I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)dt$.
Effectuons une I.P.P. sur l'intégrale partielle $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x 1.f(t)dt$ avec $x \in [0,1[$:
On pose $v(t) = f(t)$ et $u(t) = t$ fonctions de classe C^1 sur $[0,1[$ et $v'(t) = \frac{1}{m}G^{-1}(t)$ et $u'(t) = 1$ donc :
$\int_0^x 1.f(t)dt = xf(x) - \frac{1}{m}\int_0^x tG^{-1}(t)dt$.
On pose alors le changement de variable $v = G^{-1}(t) \Leftrightarrow t = G(v)$ dans la dernière intégrale :
$\int_0^x 1.f(t)dt = xf(x) - \frac{1}{m}\int_0^{G^{-1}(x)} G(v)vg(v)dv.$
On passe à la limite lorsque x tend vers 1 :
$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{x\to 1}\left(xf(x) - \frac{1}{m}\int_0^{G^{-1}(x)} G(v)vg(v)dv\right) = 1 - \frac{1}{m}\int_0^{+\infty} G(v)vg(v)dv.$
Ainsi,
$$I(f) = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{m}\int_0^{+\infty} G(v)vg(v)dv\right) = -1 + \frac{2}{m}\int_0^{\infty} vg(v)G(v)dv.$$

9. Soit λ un réel strictement positif. On suppose dans cette question que g est une densité de la loi exponentielle de paramètre λ.
(a) Pour $x > 0$, $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
(b) Pour déterminer l'expression de la bijection réciproque de G, pour tout $u \in [0,1[$, on résout l'équation $G(x) = u$ d'inconnue $x \in [0,+\infty[$:
$$G(x) = u \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = u \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u \underset{\text{car } u<1\Leftrightarrow 1-u>0}{\Leftrightarrow} -\lambda x = \ln(1-u) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$
(c) m est l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ donc, d'après le cours, $m = \frac{1}{\lambda}$.
(d) g vérifie bien les hypothèse de la partie II. Nous pouvons donc appliquer la définition de la question 8. :
pour tout $t \in [0,1[$, $f(t) = \frac{1}{m}\int_0^t G^{-1}(u)du = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}}\int_0^t -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)du = -\lambda\frac{1}{\lambda}\int_0^t -\ln(1-u)du$
(e)
- *Méthode 1 :* $f(t) = \int_0^t -\ln(1-u)du$.
  Effectuons une I.P.P. judicieuse en choisissant $w(u) = 1 - u$ comme primitive de $w(u) = -1$:
  on pose $v(u) = \ln(1-u)$ et $w(u) = 1 - u$. v et w sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et $v'(u) = -\frac{1}{1-u}$ et $w'(u) = -1$:
  $f(t) = \int_0^t -\ln(1-u)du = \int_0^t w'(u)v(u)du = [(1-u)\ln(1-u)]_0^t - \int_0^t -\frac{1}{1-u}.(1-u)du = (1-t)\ln(1-t) + \int_0^t 1du = (1-t)\ln(1-t) + t.$
- *Méthode 2 :* on peut vérifier que f est l'unique primitive de $t \mapsto -\ln(1-t)$ qui s'annule en 0 en calculant : $f(0) = 0$ et $f'(t) = -\ln(1-t)$.

(f) $t \mapsto (1-t)\ln(1-t)$ est continue sur $[0,1[$ (car $1 - t \in]0,1]$) sur cet intervalle donc l'intégrale est impropre en 1.
Calculons l'intégrale partielle :
On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = -\frac{(1-t)^2}{2}$ et $v(t) = \ln(1-t)$, fcts de classe C^1 sur $[0,1[$ de dérivées $u'(t) = (1-t)$ et $v'(t) = -\frac{1}{1-t}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1[,\ \int_0^x (1-t)\ln(1-t)dt = \int_0^x u'(t)v(t)dt &= \left[-\frac{(1-t)^2}{2}\ln(1-t)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{(1-t)^2}{2}.-\frac{1}{1-t}dt \\ &= -\frac{(1-x)^2\ln(1-x)}{2} - \int_0^x \frac{1-t}{2}dt \\ &= -\frac{(1-x)^2\ln(1-x)}{2} - \left[-\frac{(1-t)^2}{4}\right]_0^x \\ &= -\frac{(1-x)^2\ln(1-x)}{2} + \frac{(1-x)^2}{4} - \frac{1}{4} \\ &\underset{x\to 1}{\to} -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

car en posant $X = 1-x \underset{x\to 1}{\to} 0$, on a $(1-x)^2\ln(1-x) = X^2\ln(X) \underset{0}{\longrightarrow}$ par croissance comparée.
donc :

$$\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)dt = -\frac{1}{4}$$

(g) $I(f) = 2\int_0^1 (t-f(t))dt \underset{\text{d'après 9.(e)}}{=} 2\int_0^1 -(1-t)\ln(1-t)dt = -2\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)dt \underset{\text{d'après 9.(f)}}{=} -2.-\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

Exercice :

Les 3 parties suivantes sont indépendantes.

Partie I : Calcul de la somme d'une série .

Dans toute cette partie a désigne un nombre réel donné strictement positif.
On note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$. On va démontrer un résultat de cours : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \mathrm{e}^a$.

Attention : Dans tout ce qui suit, a est un réel fixé et peut être considéré comme une constante

1. Démontrer, en intégrant par parties, que : $\int_0^a (a-t)\mathrm{e}^t dt = \mathrm{e}^a - 1 - a$
2. Soit n un entier naturel non nul. On pose : $I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t dt$

   Démontrer en effectuant une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = -\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_n$
3. En déduire par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{e}^a = S_n + I_n$
4. (a) Démontrer que : $0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!}(\mathrm{e}^a - 1)$

   (b) On pose $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

   (c) Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que pour tout entier $n \geq p$ on a : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

   En déduire que pour tout $n \geq p$ on a : $0 \leq u_n \leq u_p \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}$
5. Déduire des questions précédentes que : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \mathrm{e}^a$
6. Ecrire un programme en Scilab qui demande à l'utilisateur les valeurs de n et de a, puis calcule et affiche S_n.

Partie II : Exponentielle de matrices

Toutes les matrices considérées dans ce problème sont des matrices carrées d'ordre 3. On note I la matrice unité d'ordre 3.

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, on pose :

$$\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Si A est une matrice carrée d'ordre 3, on pose, pour tout entier naturel n, $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k$, c'est-à-dire que

$$T_n = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + ... + \frac{1}{n!}A^n.$$

On pose également $T = \lim_{n\to+\infty} T_n$ lorsque cette limite existe.

1. Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Calculer A^2.

   (b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout k de $\mathbb{N}^*$ l'expression de A^k en fonction de k et de A.

   (c) Etablir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante : $T_n = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{k!} - 1\right)A$

   (d) Donner l'expression de T sous forme de tableau matriciel.
2. Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Calculer $A^2 - 2A + I$

   (b) Etablir, pour tout k de $\mathbb{N}$ la relation : $A^k = kA - (k-1)I$

   (c) Montrer que T_n s'écrit comme combinaison linéaire de A et de I. (On simplifiera le coefficient de I).

(d) Déduire des questions précédentes, l'expression de T sous forme de tableau matriciel.
(e) Déduire de (a) que A est inversible et donner son inverse.

Partie III : Cas d'une matrice nilpotente

Soit A une matrice telle que : $A^3 = O$ avec $A^2 \neq O$
Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par :

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$

1. Montrer que :
$$\forall \left(t, t'\right) \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)\,E\left(t'\right) = E\left(t + t'\right)$$
2. Pour tout t réel, calculer $E(t)\,E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$.
3. Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

Partie I : Calcul de la somme d'une série

1. On pose $\begin{cases} u'(t) & = & e^t \\ v(t) & = & a-t \end{cases}$ On a alors $\begin{cases} u(t) & = & e^t \\ v'(t) & = & -1 \end{cases}$ Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par intégration par parties :
$$\int_0^a (a-t)e^t\,dt = [(a-t)e^t]_0^a + \int_0^a e^t\,dt = -a + [e^t]_0^a = e^a - 1 - a$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose à présent $\begin{cases} u_1'(t) & = & e^t \\ v_1(t) & = & \dfrac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$ On a alors $\begin{cases} u_1(t) & = & e^t \\ v_1'(t) & = & -\dfrac{(a-t)^n}{n!} \end{cases}$ Les fonctions u_1 et v_1 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par intégration par parties :
$$I_{n+1} = \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\,dt = \left[\frac{(a-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!}e^t\,dt = -\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_n$$
3. <u>**Initialisation :**</u>

Pour $n = 1$, on a $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \frac{a^k}{k!} = 1 + a$ et d'après la question 1, $I_1 = e^a - 1 - a$.

Donc $S_1 + I_1 = 1 + a + e^a - 1 - a = e^a$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
<u>**Hérédité :**</u>
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $S_n + I_n = e^a$. Montrons que $S_{n+1} + I_{n+1} = e^a$.
En remplaçant I_{n+1} par l'expression trouvée à la question précédente, on obtient
$$I_{n+1} + S_{n+1} = -\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = I_n + S_n = e^a$$
<u>**Conclusion :**</u>
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + S_n = e^a$.
4. (a)
$$0 \leq t \leq a \Leftrightarrow 0 \leq a - t \leq a \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-t)^n}{n!} \leq \frac{a^n}{n!} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-t)^n e^t}{n!} \leq \frac{a^n e^t}{n!}$$
Par croissance de l'intégrale, on obtient
$$0 \leq \int_0^a \frac{(a-t)^n e^t}{n!}\,dt \leq \int_0^a \frac{a^n e^t}{n!}\,dt \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!}[e^t]_0^a \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{a^n}{n!}(e^a - 1)$$
(b)
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$$
(c) Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0$, alors d'après la définition de la limite :
$$\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq p, |\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq \epsilon \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq p, u_{n+1} \leq \epsilon u_n$$

En prenant $\epsilon = \frac{1}{2}$, on trouve bien qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

Raisonnons par récurrence pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq u_p \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}$.

Initialisation :

Pour $n = p$, on a $u_p = \frac{a^p}{p!} > 0$ et $u_p \left(\frac{1}{2}\right)^{p-p} = u_p$
Donc la propriété est vraie au rang $n = p$.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p$. On suppose que $0 \leq u_n \leq u_p \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}$ Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_p \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-p}$
On a évidemment $u_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} > 0$. On utilise maintenant la relation trouvée juste avant, puis on fait intervenir l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p} u_p \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_p \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-p}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
Conclusion :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq u_p \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p}$.

5. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim n \to +\infty u_p \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p} = 0$, et donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim n \to +\infty u_n = 0$$

En passant à la limite dans la question 4a), on en déduit par encadrement que $\lim n \to +\infty I_n = 0$ et donc d'après la question 3 :

$$\lim n \to +\infty S_n = e^a$$

6.
```
n=input('Donner un entier positif')
a=input('Donner un réel strictement positif')
S=0;
for k=0^n
   S=S+a^k/factorial(k)
end
disp(S)
```

Partie II : Exponentielle de matrices

1. (a) Après calcul, on obtient

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$$

(b) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 3^{n-1}A$.
Initialisation :

Pour $n = 1$, on a $A^1 = A$ et $3^0 A = A$.
Donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $A^n = 3^{n-1}A$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = 3^{n-1}A \times A = 3^n A$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
Conclusion :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 3^{n-1}A$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le résultat de la question précédent, on peut écrire (Attention le résultat précédent n'est valable que pour $k \geq 1$)

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{A^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}A}{k!} = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k!}\right) A = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) A$$

(d) On reconnait dans l'expression précédent une somme partielle de série exponentielle. On en déduit que la suite (T_n) converge vers

$$T = I + \frac{e^3-1}{3}A = \begin{pmatrix} 1+\frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & 1+\frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & 1+\frac{e^3-1}{3} \end{pmatrix}$$

2. (a) Après calcul, on trouve $A^2 - 2A + I = 0$.

(b) On raisonne par récurrence :

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a $A^0 = I$ et $0 \times A - (0-1)I = I$.
Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$, On suppose que $A^n = nA - (n-1)I$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = (nA - (n-1)I) \times A = nA^2 - (n-1)A$$

Or d'après la question précédente, $A^2 = 2A - I$. Donc

$$A^{n+1} = n(2A - I) - (n-1)A = (n+1)A - nI$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
Conclusion :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = nA - (n-1)I$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le résultat de la question précédent, on peut écrire

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{kA-(k-1)I}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!}\right) A - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!}\right) I = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!}\right) A - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) I$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}\right) A - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) I = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}\right) A - \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) I$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}\right) A + \frac{1}{n!} I$$

(d) On reconnait dans l'expression précédent une somme partielle de série exponentielle. On en déduit que la suite (T_n) converge vers

$$T = eA = \begin{pmatrix} 3e & -e & e \\ 2e & 0 & e \\ -2e & e & 0 \end{pmatrix}$$

(e) De la question 2a), on déduit

$$A^2 - 2A = -I \Leftrightarrow A(2I - A) = I$$

Ainsi A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = 2I - A \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie III : Cas d'une matrice nilpotente

1. Comme pour tout $n \geq 3$ $A^n = 0$, on obtient que pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$

$$E(t)E(t') = (I + tA + \frac{t^2}{2}A^2)(I + t'A + \frac{t'^2}{2}A^2) = I + (t+t')A + (\frac{t'^2+t^2}{2} + tt')A^2 + (\frac{tt'^2}{2} + \frac{t't^2}{2})A^3 + \frac{t^2t'^2}{4}A^4$$
$$= I + (t+t')A + \frac{(t+t')^2}{2}A^2 = E(t+t')$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente,

$$E(t)E(-t) = E(t-t) = E(0) = I$$

On en déduit que $E(t)$ est inversible d'inverse $E(-t) = I - tA + \frac{t^2}{2}A^2$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$E(t)^n = \underbrace{E(t) \times .... \times E(t)}_{n \text{ fois}} = E(nt) = I + ntA + \frac{(nt)^2}{2}A^2$$

Fonctions

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
   Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

On note $g : [2,+\infty[\to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. (a) Dresser le tableau de variations de g.
   (b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$.
   (c) Soit $y \in [2,+\infty[$.
   En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0,+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Partie B : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n).$$

8. Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.
9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
function u = suite(n)
    u  = 1
    for k = ..............
        u = ..............
    end
endfunction
```

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
    (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
    (b) On admet que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge. Calculer pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.
    En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.
11. (a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2} dt$.
    (b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} v_k$.
    (c) En déduire :
    $$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$
    (d) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
    Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2;3]$.
    (e) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :
    $$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$$
    (f) En déduire une fonction Scilab qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables et pour tout $t>0$,

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} > 0 \iff t^2 > 1 \iff t > 1$$

car $t>0$.
Ainsi $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0,1] \text{ et strictement croissante sur } [1,+\infty[}$.
On a $\boxed{\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = +\infty}$, et $\boxed{\lim\limits_{t\to +\infty} f(t) = +\infty}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2. D'après la question précédente, f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise donc une bijection}}$ de $[1,+\infty[$ sur $f\big([1,+\infty[\big) = \big[f(1), \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\big[= [2,+\infty[$.

3. (a) g possède les mêmes variations que f, donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [2,+\infty[}$.

x	2		$+\infty$
g	1	$\nearrow$	$+\infty$

(b) f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et sa dérivée ne s'annule par sur $[1,+\infty[$, donc $\boxed{g \text{ est dérivable sur } [2,+\infty[}$.

(c) Soient $y \in [2,+\infty[$ et $t \in]0,+\infty[$.

$$y = f(t) \iff y = t + \frac{1}{t} \iff ty = t^2 + 1 \iff t^2 - ty + 1 = 0.$$

Le discriminant de l'équation polyomiale obtenue est $\Delta = y^2 - 4 \geq 0$ car $y \geq 2$. Ainsi

$$y = f(t) \iff t = \frac{y - \sqrt{y^2-4}}{2} \quad \text{ou} \quad t = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}.$$

Les deux solutions obtenues sont bien strictement positives. $g(y)$ est égal à l'unique solution $t \geq 1$ de $y = f(t)$, or

$$\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2} \geq \frac{y}{2} \geq 1,$$

ainsi :

$$\boxed{g(y) = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}}.$$

Partie B : Étude d'une suite

1. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
Initialisation :
• pour $n=1$, u_1 est bien défini d'après l'énoncé et $u_1 = 1 \geq 1$.
Hérédité :
• supposons u_n bien défini et $u_n \geq 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $n \geq 1$ et $u_n \geq 1$ donc $nu_n \geq 1$ et f est bien défini sur $[1,+\infty[$, donc $f(nu_n)$ est bien défini, par conséquent $u_{n+1} = \frac{1}{n} f(nu_n)$ est bien défini.
Par ailleurs $\frac{1}{n^2 u_n} \geq 0$ donc

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} \geq u_n \geq 1$$

par hypothèse de récurrence. La propriété est donc démontrée au rang $n+1$.
Conclusion :
• Finalement on a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n \text{ existe et } u_n \geq 1}$.

2.
```
function u = suite(n)
    u  = 1
    for k = 2:n
        u = u + 1/((k-1)^2*u)
    end
endfunction
```

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n^2 u_n} \geq 0$ car $u_n \geq 0$. Par ailleurs, $u_n \geq 1$ d'après la question 1), donc $v_n = \dfrac{1}{n^2 u_n} \leq \dfrac{1}{n^2}$.
Finalement on a bien
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \boxed{0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}}.$$

(b) Soit $n \geq 2$ un entier.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} v_k &= \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=2}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_n - u_1 = \boxed{u_n - 1},\end{aligned}$$
où l'on a effectué un changement d'indice et reconnu une somme télescopique.
On a ainsi $u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$, or la série $\sum_{n\geq 2} v_n$ converge donc la suite de ses sommes partielles converge, par conséquent $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ vers un réel ℓ.

4. (a) Soit $k \geq 2$ un entier. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[k-1, k]$, donc pour tout $t \in [k-1, k]$, $\dfrac{1}{t^2} \geq \dfrac{1}{k^2}$.
Ainsi par croissance de l'intégrale,
$$\boxed{\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt \geq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2} dt = \frac{1}{k^2}}.$$

(b) Soient n et p des entiers tels que $2 \leq p < n$. A l'aide d'un changement d'indice et en reconnaissant une somme télescopique :
$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n-1} v_k &= \sum_{k=p}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=p}^{n-1} u_k = \sum_{k=p+1}^{n} u_k - \sum_{k=p}^{n-1} u_k \\ &= \boxed{u_n - u_p}.\end{aligned}$$

(c) D'autre part en combinant les inégalités des questions 3a) et 4a), pour tout entier $k \geq 2$,
$$0 \leq v_k \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt\,.$$
En sommant ces encadrements pour $k \in [|p, n-1|]$:
$$0 \leq \sum_{k=p}^{n-1} v_k \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt\,,$$
autrement dit
$$\boxed{0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt},$$
où l'on a utilisé la relation de Chasles dans le membre de droite de l'encadrement.

(d) En particulier pour $p = 2$ et $n \geq 3$, l'encadrement précédent donne :
$$0 \leq u_n - u_2 \leq \int_{1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + 1 \leq 1\,,$$
ainsi
$$\boxed{u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2}.$$
Par définition on a $u_2 = u_1 + \dfrac{1}{1.u_1} = 2$, donc on a $u_n \in [2, 3]$, ceci pour tout $n \geq 3$. Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit $\boxed{\ell \in [2, 3]}$.

(e) Soit $p \geq 2$ fixé et $n > p$ un entier. On reprend l'encadrement de la question 4b) :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt\,.$$

On a par ailleurs

$$\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt = \Big[-\frac{1}{t} \Big]_{p-1}^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{p-1} \leq \frac{1}{p-1}\,,$$

ainsi

$$0 \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p-1}\,.$$

Finalement en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}}\,.$$

(f) Si on choisit p tel que $\frac{1}{p-1} \leq 10^{-4}$, c'est-à-dire $p \geq 10001$, alors d'après l'encadrement de la question précédente, $0 \leq \ell - u_p \leq 10^{-4}$ et u_p constitue une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.
Ainsi la fonction suivante convient :

```
function u = approx()
    u = suite(10001)
endfunction
```

Variante sans calculer explicitement le rang p à partir duquel u_p constitue une bonne approximation de ℓ :

```
function u = approx()
    u = 2
    p = 2
    while 1/(p-1) >= 0.0001
        u = u + 1/(p^2*u)
        p = p+1
    end
endfunction
```

EXERCICE 2 :

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer : $b \in [2; 4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b, +\infty[$.
5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
6. **a.** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

   b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
7. **a.** Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

   b. Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
function b = valeur_approchee(epsilon)
n = 0
while ........
        n = n+1
end
b = suite(n)
endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

9. En déduire les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
10. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq \Phi(x) \leq x$.
11. **a.** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
    On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

    b. Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
    On admet quer la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.
12. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.
    Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Partie I : Étude de la fonction f

1. La fonction $x \mapsto x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

   Par ailleurs,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = +\infty$$

et, par croissances comparées, $f(x) \underset{x:+\infty}{\sim} x$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Sur $]0,1[$, la fonction f est continue, strictement décroissante et ses limites aux bornes sont $+\infty$ et 1. Il suit du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]0,1[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = 2$.
De même, sur $]1,+\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et limites aux bornes sont 1 et $+\infty$. Il suit à nouveau du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]1,+\infty[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $b \in]1,+\infty[$ tel que $f(b) = 2$.
Enfin, $f(1) = 1 \neq 2$ et donc : $\boxed{\text{L'équation } f(x) = 2 \text{ n'admet que deux solutions sur } \mathbb{R}_+^* : a \in]0,1[\text{ et } b \in]1,+\infty[.}$

3. On a

$$f(2) = 2 - \ln(2) \approx 1,3 < 2,$$
$$f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - 2\ln(2) \approx 2,6 > 2.$$

La fonction f étant continue sur $[2;4]$, il suit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $x \in [2,4]$ tel que $f(x) = 2$. Par unicité de la solution à cette équation sur $]1,+\infty[$, on a $x = b$ et donc : $\boxed{b \in [2;4].}$

Partie II : Étude d'une suite

4. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b,+\infty[$.
<u>Initialisation :</u> Si $n = 0$, on a $u_0 = 4$ de sorte que u_0 est bien défini et $u_0 = 4 \geq b$ d'après **3**.
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est défini et $u_n \geq b$. Alors $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ est bien défini. En outre, par croissance du logarithme, $\ln(u_n) \geq \ln(b) = b - 2$, la dernière égalité provenant du fait que $2 = f(b) = b - \ln(b)$. Ainsi, $u_{n+1} \geq b - 2 + 2 = b$ et donc $u_{n+1} \in [b,+\infty[$.
En conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq b.}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(u_n) + 2 - u_n \\ &= 2 - (u_n - \ln(u_n)) \\ &= 2 - f(u_n) \end{aligned}$$

Mais $u_n \geq b$ d'après **4** et f est croissante sur $[b,+\infty[\subset [1,+\infty[$ d'après **1**. Ainsi, $f(u_n) \geq f(b) = 2$ et donc

$$u_{n+1} - u_n \leq 2 - 2 = 0.$$

Ainsi, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant minorée par b d'après **4**, elle converge vers une limite $\ell \geq b$.
En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ et en utilisant la continuité du logarithme, il vient

$$\ell = \ln(\ell) + 2$$

ou encore

$$f(\ell) = 2.$$

Par unicité de la solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1,+\infty[$, on a $\ell = b$.
En conclusion, $\boxed{u_n \mapsto b.}$

6. **a.** Considérons la fonction g définie sur $[b,+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 2$. C'est une fonction dérivable et, pour tout $x \geq b$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Alors, puisque $b \geq 2$, on a :

$$\forall x \geq b, \quad |g'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}.$$

En outre, $g(b) = \ln(b) + 2 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$.

La suite (u_n) convergeant vers b en décroissant, il suit de l'inégalité des accroissements finis que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &= |u_{n+1} - b| \\ &= |g(u_n) - g(b)| \\ &\leq \frac{1}{2}|u_n - b| \\ &= \frac{1}{2}(u_n - b). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b).}$

b. La suite (u_n) convergeant en décroissant vers b, on a déjà

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b.$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, puisque $b \in [2; 4]$ d'après **3**, il vient

$$u_0 - b = 4 - b \leq 4 - 2 = 2 = \frac{1}{2^{-1}} = \frac{1}{2^{0-1}}.$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Alors, il suit de **6.a** que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &\leq \frac{1}{2}(u_n - b) \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}.}$

7. a. Nous proposons la fonction suivante :

```
1. function u = suite(n)
2.       u = 4
3.       for i=1:n
4.              u = log(u)+2
5.       end
6. endfunction
```

b. Nous nous appuyons ici sur la question **6.b** :

```
1. function b = valeur_approchee(epsilon)
2.       n = 0
3.       while (1/2^(n-1) > epsilon)
4.              n = n+1
5.       end
6.       b = suite(n)
7. endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

8. La fonction $t \mapsto f(t)$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y admet donc une primitive que l'on note G. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi(x) = G(2x) - G(x).$$

Il s'ensuit que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\
&= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\
&= \frac{2}{(2x - \ln(2x))} - \frac{1}{(x - \ln(x))} \\
&= \frac{2(x - \ln(x)) - (2x - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\
&= \frac{2x - 2\ln(x) - 2x + \ln(2x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\
&= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi'(x) = \dfrac{\ln(2) - \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}.}$

9. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$x - \ln(x) = f(x) > 0 \quad \text{et} \quad 2x - \ln(2x) = f(2x) > 0$$

donc $\Phi'(x)$ est du signe de $\ln(2) - \ln(x)$, d'où le tableau de variations :

x	0		2	$+\infty$
$\Phi'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$
Φ		$\nearrow$		dt

10. Pour tout $t > 0$, il suit de **1** que $f(t) \geq 1$ donc $0 \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq 1$. Ainsi, par croissance de l'intégrale :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt \leq \int_x^{2x} 1\, dt = (2x - x) = x.$$

En conclusion, $\boxed{\forall x > 0, \quad 0 \leq \Phi(x) \leq x.}$

11. **a.** En appliquant le théorème d'encadrement à l'inégalité trouvée en **10**, on obtient

$$\lim x \to 0^+ \Phi(x) = 0.$$

Ainsi, $\boxed{\Phi \text{ est prolongeable par continuité en 0, avec } \Phi(0) = 0.}$

b. Soit $x > 0$. On a

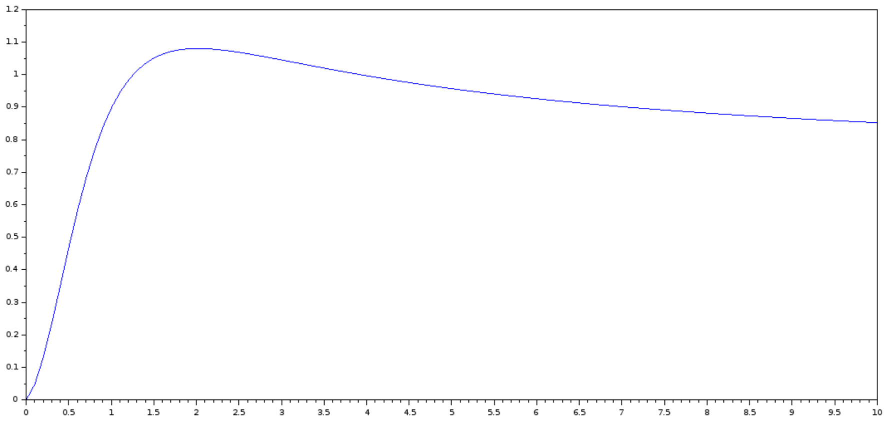
$$\Phi'(x) \underset{x:0^+}{\sim} \frac{-\ln(x)}{(-\ln(x))(-\ln(2x))} = -\frac{1}{\ln(2x)} \xrightarrow[x:0^+]{} 0.$$

Ainsi, $\boxed{\Phi'(x) \xrightarrow[x:0^+]{} 0.}$

12. On commence par observer que l'on a les éléments caractéristiques suivants :

- Une asymptote horizontale d'équation $y = \ln(2)$ en $+\infty$;
- Une tangente horizontale au point $(2, \Phi(2))$;
- Une (demi-)tangente horizontale au point $(0, \Phi(0))$.

On obtient alors un graphique ayant l'allure suivante (celui-ci ayant été réalisé numériquement avec Scilab) :



1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
9.5
10