

Ce document est un guide de travail pour les révisions estivales avant d'entrer en deuxième année. Dans celui-ci, j'ai listé les différents savoir-faire essentiels (par thème) avec des références d'exercices traités durant l'année à retravailler pour s'assurer de l'assimilation des techniques et méthodes.

Ensuite, par thème, j'ai ajouté des exercices "type concours" ou d'Annales de concours, dont certains ont été traités, qui permettent de se tester sur des sujets plus complets.

Le travail de cette fiche est naturellement insuffisant pour aborder sereinement la 2A. En effet, un point est fondamental avant de s'atteler à ces exercices : **LE COURS, LE COURS, LE COURS!** Définitions, théorèmes et propriétés (avec leurs hypothèses), méthodes doivent être parfaitement connus pour espérer réussir l'année et les concours. Un travail régulier et précis du cours de 1A est indispensable durant l'été mais également durant toute l'année de 2A.

### Plan du document

I	Analyse	2
	A maîtriser	2
	Exercice 1 – Inspiré d'exercices de concours	4
	Exercice 2 – Inspiré d'exercices de concours	4
	Exercice 3 – EDHEC 2013 E	5
	Exercice 4 – EDHEC 2010 E	5
	Exercice 5 – EDHEC 2020 E	5
	Exercice 6 – Ecricome E	6
	Exercice 7 – EDHEC 2022 E	7
	Exercice 8 – Inspiré d'exercices de concours	7
	Exercice 9 – EML 2023 E	9
	Exercice 10 – Inspiré d'exercices de concours	9
	Exercice 11 – EDHEC 2008 E	10
II	Algèbre linéaire	11
	A maîtriser	11
	Exercice 12 – Ecricome 2008 E	12
	Exercice 13 – Inspiré d'exercices de concours	12
	Exercice 14 – EDHEC 2011 E	13
	Exercice 15 – EDHEC 2019 E	14
	Exercice 16 – EDHEC 2020 E	14
III	Probabilités	15
	A maîtriser	15
	Exercice 17 – Ecricome 2014 E	16
	Exercice 18 – Ecricome 2004 E	16
	Exercice 19 – EDHEC 2018 E	17
	Exercice 20 – EML 2018 E	18
	Exercice 21 – Mélange EML 2010 E et EDHEC 2007 E	19
	Exercice 22 – EDHEC 2019 E	21
	Exercice 23 – EML 2018 S	22
	Exercice 24 – Inspiré d'exercices de concours	23
	Exercice 25 – Oral HEC, ESSEC 2016 E II	24

# I ANALYSE

## A MAÎTRISER

### 1. Éléments calculatoires.

Calculer des sommes et produits : sommes usuelles, télescopes...	Chapitre 2. Exercices 1,2,4,5.
Résoudre des équations et inéquations : <ul style="list-style-type: none"><li>• du premier et second degré,</li><li>• faisant intervenir les fonctions usuelles (en justifiant bien les inégalités par des arguments de <i>stricte monotonie</i>)</li></ul>	Chapitre 1. Exercices 10,11.
Factoriser un polynôme après connaissance d'une racine.	Chapitre 3. Exercice 1.
Étudier le signe d'une expression : <ul style="list-style-type: none"><li>• en remarquant qu'elle est somme de termes positifs / somme de termes négatifs / produit de facteurs positifs / produit de facteurs négatifs... (signe "évident")</li><li>• parce-que'elle est de degré 1 ou 2,</li><li>• en la factorisant puis en se ramenant aux deux premiers points...</li><li>• en résolvant une <i>inéquation</i></li><li>• en posant une fonction puis en l'étudiant... <i>dans l'espoir que son tableau de variations nous permette de conclure.</i></li></ul>	Un peu partout..
Démontrer des inégalités : <ul style="list-style-type: none"><li>• en reconstruisant chaque membre,</li><li>• en faisant la différence et se ramener à l'étude d'un signe...</li></ul>	Chapitre 1. Exercices 17,18.

### 2. Étude de fonctions.

Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.	Chapitre 1. Exercice 1. Chapitre 6. Exercice 10.
Étudier les limites d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition.	Chapitre 6. Exercices 1,2,10.
Justifier qu'une fonction est continue / dérivable / $\mathcal{C}^1$ / $\mathcal{C}^2$ / $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle.	Chapitre 6. Exercice 10. Chapitre 13. Exercice 1.
Étudier la continuité / dérivabilité d'une fonction <i>en un réel</i> .	Chapitre 13. Exercices 1,2. Chapitre 17. Exercice 1.
Dériver une fonction.	Chapitre 1. Exercice 13.
Étudier une fonction.	Chapitre 1. Exercice 14. Chapitre 6. Exercice 10. Chapitre 17. Exercice 10.
Montrer qu'une fonction est bijective à l'aide du théorème de bijection.	Chapitre 13. Exercice 3.
Déterminer, si $f$ est bijective, l'expression de sa bijection réciproque.	Chapitre 11. Exercice 2. <i>A coupler avec le théorème de bijection maintenant...</i>

### 3. Intégration.

Déterminer une primitive d'une fonction.	Chapitre 19. Exercice 1.
Calculer une intégrale : <ul style="list-style-type: none"> <li>• à vue,</li> <li>• par IPP,</li> <li>• par changement de variable.</li> </ul>	Chapitre 19. Exercices 3,4,5.
Étudier une suite d'intégrales.	Chapitre 19. Exercices 7,8,9,10.
Étudier une fonction définie par une intégrale.	Chapitre 19. Exercices 12,13,14,15.

#### 4. Équations différentielles.

Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.	Chapitre 22. Exercice 1.
Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.	Chapitre 22. Exercice 2.
Mettre en place la méthode de variation de la constante si elle est guidée.	Chapitre 22. Exercices 7,8.

#### 5. Suites.

Déterminer le terme général d'une suite usuelle (arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique, récurrente linéaire d'ordre 2).	Chapitre 2. Exercices 5,6,9,10,12.
Montrer que deux suites sont adjacentes.	Chapitre 10. Exercices 9,10.
Étudier une suite $(u_n)$ définie par une relation du type : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .	Chapitre 10. Exercices 13,14,18. Chapitre 13. Exercice 10. Chapitre 17. Exercices 7,8.
Étudier une suite implicite.	Chapitre 13. Exercices 12,13,14,15.

#### 6. Séries.

Étudier la nature d'une série et calculer sa somme : <ul style="list-style-type: none"> <li>• à l'aide des séries usuelles,</li> <li>• à l'aide d'un télescopage.</li> </ul>	Chapitre 14. Exercices 1,2,5,6,7.
Étudier la nature d'une série à l'aide du critère de comparaison sur les séries à termes généraux positifs.	Chapitre 14. Exercice 8.
Étudier la suite des sommes partielles d'une série.	Chapitre 10. Exercices 5,6,7. Chapitre 14. Exercices 11,12.

## EXERCICE 1 – INSPIRÉ D'EXERCICES DE CONCOURS

On considère la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'exécution de `suite_h(n)` renvoie la valeur de  $h_n$ .
2. Étude de la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
  - 2.a. Déterminer le sens de variation de la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
  - 2.b. Démontrer que pour tout  $x \in ]-1; +\infty[$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ .
  - 2.c. Justifier que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$ . En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n \geq \ln(n+1)$ . Déterminer alors la limite de la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
3. On considère les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = h_n - \ln(n) ; v_n = h_n - \ln(n+1)$$

- 3.a. A l'aide du résultat de la question 2.b., établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

- 3.b. Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergent toutes deux vers la même limite, notée  $\gamma$ .
- 3.c. Établir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1$$

- 3.d. Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n \leq \gamma \leq u_n$ .
  - 3.e. Écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un réel strictement positif  $p$  et renvoyant en sortie un encadrement de  $\gamma$  d'amplitude inférieure ou égale à  $p$  (cette fonction pourra utiliser la fonction de la question 1.).
4. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .
    - 4.a. Montrer par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = h_{2n} - h_n$ .
    - 4.b. En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$ .
    - 4.c. Conclure que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\ln(2)$ .



## EXERCICE 2 – INSPIRÉ D'EXERCICES DE CONCOURS

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} - \frac{x^2}{2} + x$ .

1. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def f(x)` qui prend un réel  $x$  en argument d'entrée et renvoie  $f(x)$  en sortie.
2. Étude de  $f$ .
  - 2.a. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
  - 2.b. Dresser le tableau de variations complet de  $f$  et étudier sa convexité.
  - 2.c. Démontrer que l'équation  $f(x) = x$  possède une unique solution sur  $\mathbb{R}$ , notée  $\alpha$ , dont on donnera un encadrement entre deux entiers consécutifs.
3. Étude d'une première suite.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

  - 3.a. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0; 1]$ .
  - 3.b. Démontrer que pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{e}$ .
  - 3.c. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$  puis  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$ .
  - 3.d. Conclure sur la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et préciser sa limite.
  - 3.e. Déterminer un rang à partir duquel  $u_n$  est une valeur approchée à  $10^{-10}$  près de  $\alpha$ . *Donnée* :  $\ln(10) \simeq 2,303$ .
  - 3.f. Créer une fonction **Python** d'en-tête `def u(n)` : qui prend  $n$  en valeur d'entrée et renvoie  $u_n$  en sortie.
4. Étude d'une seconde suite.
  - 4.a. Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans un intervalle à préciser. Dresser le tableau de variations complet de  $f^{-1}$ .
  - 4.b. Écrire une fonction **Python** nommée `dicho` qui prend la valeur d'un réel strictement positif  $p$  en argument d'entrée et renvoie une valeur approchée de  $f^{-1}(0)$  à  $p$  près, à l'aide de l'algorithme de dichotomie.  
*L'exécution de `dicho(0.01)` renvoie 2,11.*
  - 4.c. Déduire de la question 4.a. que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique nombre, noté  $x_n$ , tel que  $f(x_n) = \frac{1}{n}$ .
  - 4.d. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n \in [0; 3]$ .
  - 4.e. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Exprimer  $x_n$  en fonction de  $n$  et  $f^{-1}$ .
  - 4.f. En déduire la limite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .



### EXERCICE 3 - EDHEC 2013 E

Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$ .

- 1.a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ .
  - 1.b. Démontrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $\ell$  et préciser un encadrement de  $\ell$ .
  - 1.c. Déterminer ensuite la valeur de  $\ell$ .
- 2.a. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument d'entrée un entier naturel  $n$  et renvoie la valeur de  $u_n$ .
  - 2.b. En déduire un programme, rédigé en **Python**, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle  $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$ .
- On définit maintenant la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = 1 - u_n$ .
  - 3.a. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Simplifier l'expression  $\sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1})$ .
  - 3.b. Pour tout entier naturel  $k$ , exprimer  $v_k - v_{k+1}$  en fonction de  $v_k$ .
  - 3.c. Montrer alors que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$  est convergente et donner la valeur de sa somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$ .



### EXERCICE 4 - EDHEC 2010 E

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ .

- Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
- 3.a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq 2$ .
  - 3.b. Étudier les variations de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - 3.c. Établir que, pour tout réel  $x$  strictement supérieur à  $-1$ , on a :  $\ln(1+x) \leq x$ .
  - 3.d. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\ln(u_n) \leq 2$ .
- En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell$ , élément de  $[2, e^2]$ .
- On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général  $(\ell - u_n)$ .
  - 5.a. Justifier que la suite  $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que l'on a :  $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ .
  - 5.b. Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ .
  - 5.c. Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ .
  - 5.d. Déduire de la question précédente que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \ell - u_n \leq \ell \left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$ .
  - 5.e. Justifier que, pour tout réel  $x$ , on a  $1 - e^{-x} \leq x$ . En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$ .  
Conclure quant à la nature de la série de terme général  $\ell - u_n$ .
  - 5.f.
    - 5.f.i. Écrire une fonction **Python** qui prend un entier naturel  $n$  en argument d'entrée et renvoie la valeur de  $u_n$  en sortie.
    - 5.f.ii. Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\ell - u_n \leq \frac{e^2}{2^n}$ .
    - 5.f.iii. Résoudre, dans  $\mathbb{N}$ , l'inéquation  $\frac{e^2}{2^n} < 10^{-5}$ . Interpréter le résultat. Donnée :  $\frac{5 \ln(10) + 2}{\ln(2)} \simeq 19,5$ .



### EXERCICE 5 - EDHEC 2020 E

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$  et  $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

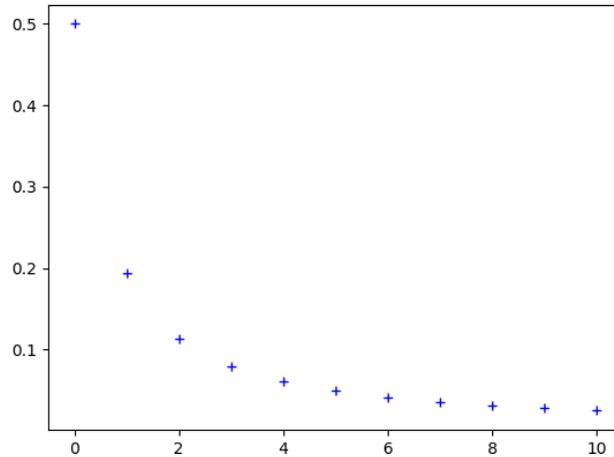
- Justifier, pour tout entier naturel  $n$ , l'existence de  $I_n$  et  $J_n$ .
- Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
- Étudier les variations de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- 4.a. Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$ .
  - 4.b. En déduire  $I_2$ .
- 5.a. A l'aide de la relation établie à la question 4.a., écrire une fonction **Python** d'en-tête **def I(n)** : qui renvoie la valeur de  $I_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
  - 5.b. On considère le programme suivant :

```

1 Labs = .....
2 Lord = .....
3 plt.plot(Labs, Lord, 'b+')
4 plt.show()

```

Recopier et compléter les lignes de ce programme, de sorte que son exécution permette d'obtenir le graphique suivant, sur lequel les termes d'indices 0 à 10 de la suite  $(I_n)$  sont représentés.



5.c. On considère la fonction **Python** suivante, dans laquelle on utilise la fonction créée à la question 5(a).

```

1 def seuil(p):
2     n=0
3     while I(n)>p:
4         n=n+1
5     return n

```

Que faudrait-il démontrer sur la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour avoir la garantie que le programme s'arrête pour toute valeur strictement positive de  $p$ ?

6. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ . En déduire que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et donner sa limite.
7. Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$ .
8. **8.a.** Calculer  $J_0$  puis exprimer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J_{n+1} + J_n$  en fonction de  $n$ .  
**8.b.** En déduire  $J_1$ .
9. Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n \left( \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

10. **10.a.** Utiliser les résultats des questions 6. et 7. pour justifier que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

**10.b.** En déduire la convergence de la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  puis donner la valeur de  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

**10.c.** Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_n = \frac{1}{2}$ .



## EXERCICE 6 - ECRICOME E

On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n : x \mapsto (1-x)^n e^{-2x}$  ainsi que l'intégrale  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .  
Le but de l'exercice est de montrer l'existence de trois réels  $a, b, c$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n)$$

où  $\varepsilon(n)$  est une expression dépendant de  $n$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$ .

1. Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n$  est bien défini et donner son signe.
2. Calculer  $I_0$ .
3. Étudier les variations de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

4. Que peut-on en déduire ?

5. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

6. Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

7. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$ .

8. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ .

9. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n(nI_n - 1))$ .

10. Donner alors les valeurs de  $a, b, c$ .



### EXERCICE 7 - EDHEC 2022 E

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx$ .

1. Calculer  $u_1$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit la fonction  $f_n$  sur  $[0; 1]$  par :  $\forall x \in [0; 1], f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ . Dresser le tableau de variations de  $f_n$  sur  $[0; 1]$ .

3. 3.a. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$ .

3.b. En déduire la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$ . On note  $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .

4. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ .

4.a. Justifier :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq \gamma$ .

4.b. Déterminer les deux réels  $a, b$  tels que pour tout  $x \in [0; 1]$  et tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :  $\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{x+k}$ .

4.c. Établir alors :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$ .

4.d. Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ .

5. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ .

5.a. Justifier que  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et préciser sa limite.

5.b. Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$ . En déduire que  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.

6. Donner finalement, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , un encadrement de  $\gamma$  à l'aide de  $T_n$  et  $S_n$ .

7. On considère la fonction Python définie ci-dessous :

```
1 import numpy as np
2 def gamma(p):
3     n=1
4     while np.log(1+1/n)>p:
5         n=n+1
6     L=[1/k for k in range(1, n+1)]
7     S=sum(L)-np.log(n+1)
8     T=sum(L)-np.log(n)
9     return S, T
```

L'exécution de la commande `gamma(10**(-3))` renvoie : `(0.5767160812351229, 0.5777155815682065)`. Interpréter ce résultat en justifiant soigneusement la réponse.



### EXERCICE 8 - INSPIRÉ D'EXERCICES DE CONCOURS

On considère la fonction  $f : x \mapsto xe^{-\frac{1}{x}}$ , définie sur  $\mathbb{R}^*$ . On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

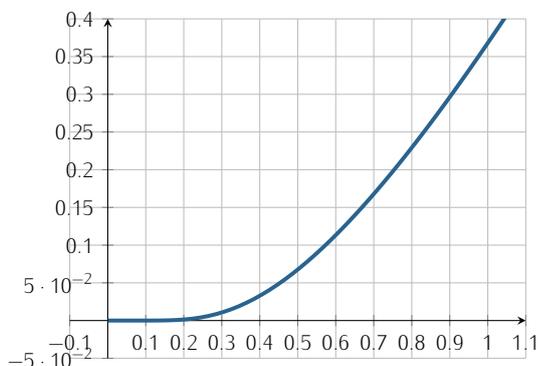
## PARTIE A. ÉTUDE DE $f$ .

- Étudier la parité de  $f$ .
- Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes de  $\mathcal{C}_f$ .
- Rappeler  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ .
  - Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$  ainsi que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x)$
  - En déduire que  $\mathcal{C}_f$  admet une droite asymptote aux voisinages de  $\pm\infty$ .
- Dresser le tableau de variations complet de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
- Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x)$ .
- Établir :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) < 1$ .
  - En déduire la position relative de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite d'équation  $y = x - 1$ .
- Représenter l'allure de  $\mathcal{C}_f$  dans un repère du plan judicieusement choisi. *On veillera à faire figurer toutes les informations établies précédemment permettant d'obtenir la courbe la plus précise possible.*

## PARTIE B. ÉTUDE D'UNE SUITE.

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ .

- Écrire une fonction **Python**, nommée  $u$ , qui prend en argument d'entrée un entier naturel  $n$  et renvoie la valeur de  $u_n$  en sortie.
- Représenter les premiers termes de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur le graphique ci-dessous, sur lequel la courbe de la fonction  $f$  est représentée. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?



- Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \in ]0; 1]$ .
- Étudier les variations de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Établir :  $\forall x \in ]0; 1], f(x) \leq \frac{1}{e}x$ .
  - En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$ .
  - Conclure sur l'existence et la valeur de la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - Résoudre l'inéquation  $\left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-20}$ , d'inconnue  $n \in \mathbb{N}$ , puis interpréter le résultat obtenu. *Donnée :  $20 \ln(10) \simeq 46,05$ .*
  - Le programme suivant (dans lequel  $u$  est la fonction **Python** définie à la question 1 de la partie B) affiche la valeur 4. Interpréter cette valeur et la comparer avec celle obtenue à la question précédente.

```

1 n=0
2 while u(n) > 10**(-20):
3     n=n+1
4 print(n)

```

- Considérons la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

- Étudier les variations de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- A l'aide du résultat établi à la question 12.b. démontrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.
- Que peut-on en déduire ?



## EXERCICE 9 - EML 2023 E

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

On considère également la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1.
  - 1.a. Dresser le tableau de variations complet de  $f$ .
  - 1.b. Vérifier que chaque terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est correctement défini et strictement positif.
2.
  - 2.a. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout réel strictement positif  $a$ , l'appel de **CB\_1(a)** renvoie le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n > a$ .
  - 2.b. On admet que l'on a également défini une fonction **Python** tel que, pour tout réel strictement positif  $a$ , l'appel de **CB\_2(a)** renvoie le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n < a$ .  
Les appels **CB\_1(10\*\*6)** et **CB\_2(10\*\*(-6))** renvoient respectivement 6 et 5.  
Qu'en déduire sur  $u_5$  et  $u_6$ ? Commenter le résultat en une ligne.
3. On définit maintenant la fonction  $g$  sur  $]0; +\infty[$  par :  $\forall x \in ]0; +\infty[, g(x) = e^{-x} - x^2$ .
  - 3.a. Démontrer que  $g$  réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  dans  $] -\infty; 1]$ .
  - 3.b. En déduire que l'équation  $f(x) = x$  possède une unique solution dans  $]0; +\infty[$ , que l'on notera  $\alpha$ .
  - 3.c. Justifier :  $e^{-1} < \alpha < 1$ .
4.
  - 4.a. Démontrer que l'on a :  $u_2 > u_0$ .
  - 4.b. En déduire que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.
  - 4.c. Justifier que la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante puis qu'elle converge vers un réel  $\ell$  appartenant à  $]0; e^{-1}]$ .
5. Pour  $x \in ]0; +\infty[$ , on pose  $h(x) = f \circ f(x)$ . On pose également  $h(0) = 0$ .
  - 5.a. Justifier que la fonction  $h$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .
  - 5.b. Déterminer, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , une expression de  $h(x)$  en fonction de  $g(x)$ .
  - 5.c. Résoudre alors l'équation  $h(x) = x$  d'inconnue  $x \in ]0; +\infty[$ .
  - 5.d. En déduire que la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 puis déterminer la limite de la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ .
6. Qu'en déduire sur la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?



## EXERCICE 10 - INSPIRÉ D'EXERCICES DE CONCOURS

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on définit la fonction  $f_n$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f_n(x) = x^n - nx + 1$ .

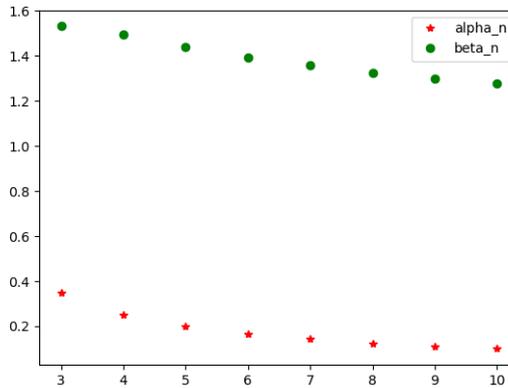
1. Écrire une fonction **Python** de sorte que l'exécution de la commande **f(n, x)** renvoie la valeur de  $f_n(x)$ , où  $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ .
2. Soit  $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ . Dresser le tableau de variations complet de  $f_n$  sur  $]0; +\infty[$ .
3.
  - 3.a. Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $f_2(x) = 0$ .
  - 3.b. Soit  $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$ . Démontrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  possède exactement deux solutions, notées  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ , vérifiant :

$$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$$

- 3.c. Démontrer que pour tout  $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$ ,  $\beta_n < 2$ .
4.
  - 4.a. Recopier et compléter les lignes 4,7,8,10,11,12 de la fonction **Python** ci-dessous (où **f** est la fonction **Python** créée à la question 1) afin qu'elle renvoie une valeur approchée à  $10^{-5}$  près de  $\alpha_n$ , pour  $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$ .

```
1 def alpha(n):
2     a=0
3     b=1
4     while .....
5         m=(a+b)/2
6         if f(n,m)==0:
7             .....
8         elif .....
9             b=m
10        elif .....
11        .....
12        return .....
```

- 4.b. On admet que l'on a écrit une fonction **beta(n)** qui renvoie une valeur approchée de  $\beta_n$  (pour  $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$ ) à  $10^{-5}$  près. Proposer un programme dont l'exécution permettrait d'obtenir le graphique ci-dessous :



5. 5.a. Justifier que la série  $\sum_{n \geq 3} \beta_n$  est divergente.
- 5.b. Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 3} \alpha_n$  est divergente. *Indication : on pourra chercher à la comparer à la série harmonique.*
6. Étude de la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 3}$ .
- 6.a. Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]0; 1[, f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ .
- 6.b. En déduire que la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 3}$  est décroissante.
- 6.c. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}, \alpha_n \leq \frac{2}{n}$  puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ .
- 6.d. Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = 1$ .
- 6.e. La série  $\sum_{n \geq 3} \frac{\alpha_n}{n}$  est-elle convergente ?
7. Convergence de la suite  $(\beta_n)_{n \geq 3}$ .
- 7.a. Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n < n^{\frac{1}{n-1}}$ .
- 7.b. En déduire que la suite  $(\beta_n)_{n \geq 3}$  converge vers 1.



### EXERCICE 11 - EDHEC 2008 E

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; 1]$ . On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.

- Montrer :  $\exists M \geq 0 / \forall (x, y) \in [0; 1]^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ .
- En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall t \in \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq M \left( t - \frac{k}{n} \right)$ .
- Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n^2}$$

- En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$ .
- Conclure finalement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$ .



## II ALGÈBRE LINÉAIRE

### A MAÎTRISER

#### 1. Systèmes linéaires.

Résoudre un système linéaire.	Chapitre 4. Exercice 1.
Déterminer les coefficients d'une décomposition en éléments simples.	Chapitre 4. Exercice 7.

#### 2. Matrices.

Étudier l'inversibilité d'une matrice et, si inversible, donner son inverse : <ul style="list-style-type: none"><li>• parce-qu'elle est triangulaire,</li><li>• par la méthode du pivot de Gauss,</li><li>• en utilisant un polynôme annulateur,</li><li>• en remarquant qu'elle est <i>clairement non inversible</i> : colonne ou ligne nulle, colonne ou ligne combinaison linéaire des autres...</li></ul>	Chapitre 9. Exercices 3,5.
Calculer les puissances d'une matrice : <ul style="list-style-type: none"><li>• directement parce-qu'elle est diagonale,</li><li>• en conjecturant une expression à démontrer par récurrence,</li><li>• en la diagonalisant,</li><li>• à l'aide de la formule du binôme de Newton (cas classiques : <math>A = aI + bN</math>, avec <math>N</math> nilpotente ; ou <math>A = aI + bM</math>, avec <math>M^k = b_k M</math>),</li><li>• en se laissant guider par l'énoncé sur une autre méthode (avec des suites, avec une division euclidienne par un polynôme annulateur, en la trigonalisant...).</li></ul>	Chapitre 9. Exercices 9,10,11,12,13,14.

#### 3. Espaces vectoriels et applications linéaires.

Une excellente connaissance du cours sur les applications linéaires permettra de faire les liens entre matrices et applications linéaires afin de dégager des méthodes efficaces.

Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un autre : <ul style="list-style-type: none"><li>• en revenant à la définition de ssev,</li><li>• en montrant qu'il est le ssev engendré par une famille de vecteurs.</li></ul>	Chapitre 15. Exercices 1,2,5.
Montrer qu'une famille de vecteurs est libre / génératrice / une base d'un espace vectoriel.	Chapitre 15. Exercices 5,10,11.
Montrer qu'une application est linéaire.	Chapitre 20. Exercices 1,3,4,5,6,7.
Montrer qu'une application linéaire entre ev de polynômes est un endomorphisme.	Chapitre 20. Exercices 4,5,8.
Déterminer le noyau / l'image / le rang d'une application linéaire.	Chapitre 20. Exercices 3,4,5,6,7,8.
Manipuler les définitions de noyau et image d'une application linéaire.	Chapitre 20. Exercices 20,21,23.
Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme en travaillant sur $rg(f - \lambda id)$ ...	Chapitre 20. Exercice 9.

## EXERCICE 12 - ECRICOME 2008 E

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket^2$ , on note  $E_{i,j}$  la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé en  $i$ -ième ligne et  $j$ -ième colonne, qui vaut 1.

### 1. Question de cours.

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie ainsi que  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- 1.a. Démontrer que  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- 1.b. Établir :  $\dim(F \cap G) \leq \min(\dim(F), \dim(G))$ .
2. 2.a. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{E}_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$  est un espace vectoriel et en donner une base ainsi que la dimension.
- 2.b. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{E}_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$  est un espace vectoriel et en donner une base ainsi que la dimension.
- 2.c. Établir :  $\mathcal{E}_1(A) \cap \mathcal{E}_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ .
- 2.d. Démontrer que la famille obtenue en concaténant les bases de  $\mathcal{E}_1(A)$  et  $\mathcal{E}_2(A)$  (obtenues en questions 2.a et 2.b.) est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

3. On considère la matrice  $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- 3.a. Justifier que la matrice  $P$  est inversible et déterminer son inverse, notée  $P^{-1}$ .
- 3.b. Calculer la matrice  $P^{-1}AP$ , notée  $D$ .
4. On considère les ensembles  $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$  et  $\mathcal{C}_D = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid DN = ND\}$ .
- 4.a. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{C}_A$  est un espace vectoriel.
- 4.b. Soient  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $N = P^{-1}MP$ . Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{C}_A \iff N \in \mathcal{C}_D$$

- 4.c. Démontrer que  $\mathcal{C}_D = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3})$ , puis justifier que la famille  $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3})$  est libre.
- 4.d. Montrer que la famille  $(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}, PE_{3,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1})$  est une base de  $\mathcal{C}_A$ .

5. Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on note  $M(a, b)$  la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On considère également :  $\mathcal{E} = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ .

- 5.a. Justifier que  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel et en déterminer une base.
- 5.b. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Prouver que la matrice  $P^{-1}M(a, b)P$  est diagonale. On note  $D(a, b)$  cette matrice.
- 5.c. 5.c.i. L'ensemble  $\{M \in \mathcal{E} \mid M^2 = I_3\}$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}$  ?
- 5.c.ii. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Démontrer :  $M(a, b)^2 = I_3 \iff D(a, b)^2 = I_3$ .  
En déduire les matrices  $M(a, b)$  telles que  $M(a, b)^2 = I_3$ .



## EXERCICE 13 - INSPIRÉ D'EXERCICES DE CONCOURS

On rappelle que si  $f$  désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$ , alors  $f \circ f$  est également un endomorphisme de  $E$  et on note :  $f^2 = f \circ f$ .

### PARTIE I. PUISSANCES D'UNE MATRICE.

#### 1. Questions préliminaires.

Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  une matrice telle que  $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I_3 = 0_3$  et  $A \neq I_3$ .

- 1.a. Démontrer que la matrice  $A$  est inversible et exprimer  $A^{-1}$  comme une combinaison linéaire de  $I_3$ ,  $A$  et  $A^2$ .
- 1.b. Déterminer les racines du polynôme  $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ .
- 1.c. A l'aide de la question précédente, démontrer que la matrice  $A - 2I_3$  n'est pas inversible.

On considère à présent la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$  et note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $A$ .

2. L'exécution du programme **Python** qui suit

```
1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as al
3
4 A=np.array([[0,1,0],[0,0,1],[4,-8,5]])
5 A2=al.matrix_power(A,2)
6 A3=al.matrix_power(A,3)
7
8 print(A3-5*A2+8*A)
```

affiche :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

En déduire un polynôme annulateur de la matrice  $A$ .

3. Quel est le rang de  $f$  ?
4. **4.a.** Soient  $\lambda$  une racine du polynôme  $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$  et  $u = (1, \lambda, \lambda^2)$ . Vérifier que  $f(u) = \lambda u$ .
4. **4.b.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Supposons qu'il existe  $u \in \mathbb{R}^3$  non nul tel que  $f(u) = \lambda u$ .
  4. **4.b.i.** Exprimer  $f^2(u)$  en fonction de  $\lambda$  et  $u$ .
  4. **4.b.ii.** En déduire que  $\lambda$  est racine du polynôme  $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ .
4. **4.c.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Déduire des questions précédentes que :  $f - \lambda \text{id}$  n'est pas bijectif si, et seulement si,  $\lambda \in \{1; 2\}$ .
5. Déterminer le rang de la matrice  $A - I_3$ . Donner alors une base de  $\ker(f - \text{id})$  constituée d'un unique vecteur, noté  $u_1$ , dont la première composante est égale à 1.
6. Notons  $u_2 = (1, 2, 4)$ . Vérifier que  $u_2 \in \ker(f - 2\text{id})$ .
7. Résoudre l'équation  $f(v) = 2v + u_2$ , d'inconnue  $v \in \mathbb{R}^3$ , puis en donner une solution, notée  $u_3$ , dont la première composante est nulle.
8. **8.a.** Montrer que la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
8. **8.b.** Sans effectuer de calcul matriciel, déterminer, en justifiant, la matrice de  $f$  dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$ . On notera  $T$  la matrice obtenue.
9. Posons maintenant  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ .
  9. **9.a.** Montrer que la matrice  $P$  est inversible et calculer son inverse. On admet que l'on a alors :  $A = PTP^{-1}$ .
  9. **9.b.** Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$ .
  9. **9.c.** Posons  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  de sorte que  $T = D + N$ . En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression de  $T^n$ .
  9. **9.d.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Conclure sur l'expression de  $A^n$ .

## PARTIE II. APPLICATION À L'ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTÉ LINÉAIRE D'ORDRE 3.

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$ .

10. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument d'entrée un entier naturel  $n$  et qui renvoie la valeur de  $u_n$  en sortie.
11. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ . Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$ .
12. En utilisant les résultats de la partie I, conclure sur le terme général de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .



## EXERCICE 14 - EDHEC 2011 E

On note  $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[x]$ ; on rappelle qu'on a ainsi, pour tout réel  $x$  :  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$  et  $P_2(x) = x^2$ . On note également  $\text{id}$  l'endomorphisme identité sur  $\mathbb{R}_2[x]$ .

On considère l'application  $f$  qui, à toute fonction polynomiale  $P \in \mathbb{R}_2[x]$ , associe la fonction polynomiale  $f(P)$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(P)(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x)$$

1. **1.a.** Montrer que  $f$  est une application linéaire.
1. **1.b.** Écrire  $f(P_0)$ ,  $f(P_1)$  et  $f(P_2)$  comme des combinaisons linéaires de  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ . En déduire que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[x]$  puis donner sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ . On notera  $A$  cette matrice.
1. **1.c.** En déduire le rang de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il un automorphisme ?
2. Justifier que  $\ker(f)$  est de dimension un puis en donner une base constituée d'un seul polynôme, noté  $Q_0$ .
3. **3.a.** Déterminer les réels  $\lambda$  tels que  $f - \lambda \text{id}$  ne soit pas bijectif.
3. **3.b.** Pour chaque valeur de  $\lambda$  trouvée à la question précédente : justifier que  $\ker(f - \lambda \text{id})$  est de dimension un puis en donner une base constituée d'un seul polynôme noté  $Q_\lambda$ .
3. **3.c.** On admet que les polynômes  $Q_\lambda$  obtenus à la question précédente forment une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Donner la matrice de  $f$  dans cette base.



## EXERCICE 15 - EDHEC 2019 E

On considère l'application  $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y + z \\ -2x + 3y + 2z \\ x - y \end{pmatrix}$ , et on note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

1. Justifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et donner sa matrice canoniquement associée, notée  $A$ .
2. Déterminer les réels  $\lambda$  de sorte que  $A - \lambda I_3$  ne soit pas inversible.
3.
  - 3.a. Calculer  $(A - I_3)^2$ .
  - 3.b. En déduire que  $A$  est inversible et écrire  $A^{-1}$  comme combinaison linéaire de  $I_3$  et  $A$ .
  - 3.c. Que peut-on en déduire sur l'endomorphisme  $f$  ?
4. On pose  $N = A - I_3$ .
  - 4.a. Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ , la matrice  $A^n$  comme combinaison linéaire de  $I_3$  et  $A$ .
  - 4.b. Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour  $n = -1$ .
5. On pose  $u_1 = (f - \text{id})(e_1)$  et  $u_2 = e_1 + e_3$ .
  - 5.a. Montrer que  $\text{rg}(f - \text{id}) = 1$ .
  - 5.b. Justifier que  $(u_1, u_2)$  est une base de  $\ker(f - \text{id})$ .
6.
  - 6.a. Montrer que la famille  $(u_1, u_2, e_1)$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .
  - 6.b. Déterminer la matrice  $T$  de  $f$  dans cette même base.



## EXERCICE 16 - EDHEC 2020 E

On dit qu'une matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est antisymétrique lorsqu'elle vérifie  ${}^tM = -M$  et on note  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On considère une matrice  $A$  fixée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et l'application  $f$ , qui à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  associe la matrice  $f(M)$  définie par :

$$f(M) = {}^tAM + MA$$

2.
  - 2.a. Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . Établir que  $f(M)$  est une matrice antisymétrique.
  - 2.b. En déduire que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

Dans toute la suite, on étudie le cas  $n = 3$  et on choisit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. On considère les trois matrices  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 
  - 3.a. Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (J, K, L)$  est une famille génératrice de  $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ .
  - 3.b. Montrer que  $\mathcal{B}$  est une famille libre et en déduire la dimension de  $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ .
4.
  - 4.a. Calculer  $f(J)$ ,  $f(K)$  et  $f(L)$ , puis les exprimer comme combinaisons linéaires de  $J$  et  $L$  seulement.
  - 4.b. En déduire une base de  $\text{Im}(f)$  ne contenant que des matrices de  $\mathcal{B}$ .
  - 4.c. Déterminer la dimension de  $\ker(f)$  puis en donner une base.

# III PROBABILITÉS

## A MAÎTRISER

### 1. Probabilités générales.

Avant de commencer, il est nécessaire, en plus de s'assurer d'une excellente connaissance du cours, de :

- comprendre la signification de  $\bigcap_{i \in I} A_i$  et  $\bigcup_{i \in I} A_i$ , où  $I$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$ ,
- ne pas confondre les objets : variables aléatoires, évènements, issues, réels...

Décrire un évènement en union et/ou intersection d'autres évènements.	Chapitre 12. Exercices 4,5,6. Chapitre 16. Exercices 3,4,6,7,8.
Déterminer une probabilité : <ul style="list-style-type: none"><li>• d'un union de deux évènements (formule de Poincaré) ou d'une union (finie ou infinie) d'évènements 2 à 2 incompatibles,</li><li>• d'une intersection finie d'évènements mutuellement indépendants ou non (formule des probabilités composées),</li><li>• d'un évènement à l'aide de la formule des probabilités totales,</li><li>• conditionnelle.</li></ul>	

### 2. Variables aléatoires discrètes.

Déterminer l'ensemble image d'une variable aléatoire.	Chapitre 12. Exercices 12,15. Chapitre 18. Exercices 1,2,3,4,5,6,8,9. Chapitre 21. Exercices 6,17.
Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète dans des cas simples : le travail se fait sur les évènements (éventuelles disjonctions de cas à faire).	
Étudier l'existence de l'espérance / variance d'une variable aléatoire discrète, et dans le cas échéant, savoir la calculer.	
Déterminer la loi d'un minimum / maximum de variables aléatoires indépendantes.	Chapitre 12. Exercices 16,17. Chapitre 21. Exercice 15.
Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes ou non.	Chapitre 21. Exercices 12,16,22.

## EXERCICE 17 - ECRICOME 2014 E

Soient  $p \in ]0; 1[$  et  $q = 1 - p$ .

On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut  $p$  et on procède à l'expérience suivante  $\mathcal{E}$  : "On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce". On suppose les résultats des lancers indépendants les uns des autres.

On note :

- pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des  $n$  premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul  $j$ ,  $F_j$  l'événement : "La pièce donne FACE lors du  $j$ -ième lancer"; et  $P_j = \overline{F_j}$ ;
- $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre "FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE", alors  $Y = 4$ .

On admet que les variables aléatoires  $X_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et  $Y$  sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience  $\mathcal{E}$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Reconnaitre la loi de  $X_n$  puis donner  $\mathbb{P}(X_n = k)$  pour  $k \in X_n(\Omega)$ . Préciser  $\mathbb{E}(X_n)$  et  $\mathbb{V}(X_n)$ .
2. Donner  $Y(\Omega)$ .
3. Soit  $n$  un entier naturel. Justifier que les événements  $[Y = n]$  et  $[X_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}$  sont égaux.
4. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y = n) = (n + 1)p^2q^n$$

5. Démontrer que la variable aléatoire  $Y$  possède une espérance et la calculer.
6. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On note  $Y_k$  la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du  $k$ -ième PILE. En particulier, on a  $Y_2 = Y$ .
  - 6.a. Soit  $Z$  la variable aléatoire égale au rang du premier PILE. Rappeler la loi de  $Z$  ainsi que son espérance et sa variance.
  - 6.b. Exprimer  $Y_1$  en fonction de  $Z$  puis en déduire la loi de  $Y_1$  ainsi que son espérance.
  - 6.c. En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la loi de  $Y_k$ .



## EXERCICE 18 - ECRICOME 2004 E

Une personne envoie chaque jour un mail codé par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur  $A$  ou le serveur  $B$ .

On constate que le serveur  $A$  est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur  $B$  est choisi dans 30% des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur  $A$  est de 0,1, alors qu'elle est de 0,05 avec le serveur  $B$ .
  - 1.a. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un mail.
  - 1.b. Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur  $A$ ?
2. Un jour donné, appelé jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite  $AABBBA...$  signifie que les deux premiers jours, l'ordinateur a choisi le serveur  $A$ , les jours 3,4,5 il a choisi le serveur  $B$  et le jour 6 le serveur  $A$ . Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième de longueur 3 (ce qui est également le cas de la série  $BBAAAB...$ ).

On note  $L_1$  la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et  $L_2$  celle de la deuxième série.

Ainsi, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , dire que  $L_1 = k$  signifie que pendant les  $k$  premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_n$  l'évènement "le serveur  $A$  a été choisi le jour  $n$ ", et on définit de même l'évènement  $B_n$ .

- 2.a. Déterminer  $\mathbb{P}(L_1 = 2)$ .
- 2.b. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\mathbb{P}(L_1 = k) = 0,3^k \times 0,7 + 0,7^k \times 0,3$$

- 2.c. Vérifier que  $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(L_1 = k)$  converge et que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = k) = 1$ .

- 2.d. Montrer que  $L_1$  admet une espérance et la calculer.

- 2.e. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Justifier soigneusement que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbb{P}([L_1 = k] \cap [L_2 = n]) = 0,3^{k+1} \times 0,7^n + 0,7^{k+1} \times 0,3^n$$

- 2.f. En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, la valeur de  $\mathbb{P}(L_2 = n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .



## EXERCICE 19 - EDHEC 2018 E

On dispose de trois pièces indiscernables au toucher :

- une pièce numérotée 0 donnant PILE avec une probabilité  $\frac{1}{2}$  et FACE avec une probabilité  $\frac{1}{2}$
- une pièce numérotée 1 donnant PILE à coup sûr
- une pièce numérotée 2 donnant FACE à coup sûr

L'expérience consiste à choisir de façon équiprobable l'une de ces trois pièces puis la lancer indéfiniment. On note  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé associé à cette expérience.

Pour  $i \in \{0; 1; 2\}$ , on note  $A_i$  l'évènement "on a choisi la pièce numérotée  $i$ ". Ainsi,  $(A_0, A_1, A_2)$  est un système complet d'évènements.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $P_k$  l'évènement : "on obtient PILE au lancer numéro  $k$ " et  $F_k = \overline{P_k}$ .

On considère les deux variables aléatoires :

- $X$  donnant le rang d'apparition du premier PILE
- $Y$  donnant le rang d'apparition du premier FACE

On convient de donner à  $X$  la valeur 0 si l'on obtient jamais PILE et de donner à  $Y$  la valeur 0 si l'on obtient jamais FACE.

### 1. Loi de $X$ .

1.a. Donner  $X(\Omega)$ .

1.b. Déterminer  $\mathbb{P}(X = 1)$ .

1.c. Montrer que :  $\forall n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

1.d. En déduire la valeur de  $\mathbb{P}(X = 0)$ .

2. Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.

3. Montrer que  $X$  admet une variance et la calculer.

4. Justifier que  $Y$  suit la même loi que  $X$ .

5. 5.a. Montrer que pour tout  $j \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([Y = j])$ .

5.b. Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = i])$ .

5.c. Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

6. On considère la variable aléatoire  $Z = X + Y$ .

6.a. Expliquer pourquoi  $Z$  prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

6.b. Montrer que  $\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{2}{3}$ .

6.c. Justifier que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on a :

$$[Z = n] = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

6.d. En déduire que :

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \mathbb{P}(Z = n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7. **Simulation informatique.** On rappelle que, en **Python**, la commande `rd.random()` renvoie un réel aléatoire de  $]0; 1[$ , et que la commande `rd.randint(a,b)` renvoie un entier aléatoire de  $\llbracket a; b \llbracket$ .

7.a. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** suivant afin que la fonction `simulX` renvoie une réalisation de la variable aléatoire  $X$ .

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 def simulX():
6     piece=rd.randint(...,...)
7     x=1
8     if piece==0:
9         lancer=rd.random()
10        while .....
11            .....
12            .....
13    else:
14        if piece==2:
15            .....
16    return(x)
```

7.b. Justifier que le cas où l'on joue la pièce numérotée 1 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

7.c. On souhaite obtenir un histogramme des fréquences des valeurs de  $X$  sur 10000 réalisations de l'expérience.

7.c.i. Créer une liste **L** contenant 10000 réalisations de la variable aléatoire  $X$  (on pourra faire appel à la fonction `simulX` précédente).

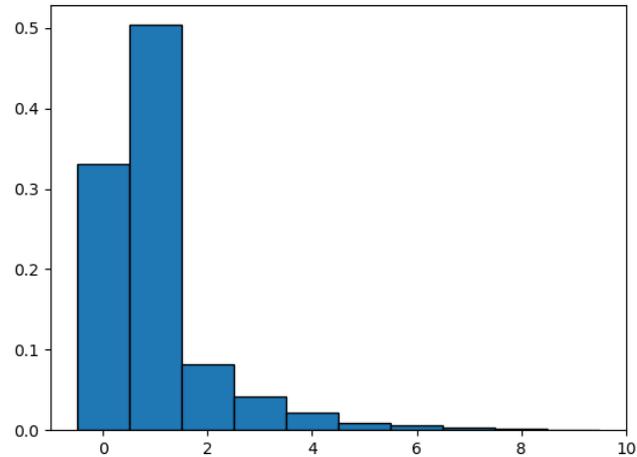
7.c.ii. A l'aide d'une écriture en compréhension, recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que la liste **Labs** contiennent les valeurs  $-0.5, 0.5, \dots, 9.5$ .

```

1 Labs = .....
2 plt.hist(L,Labs, density=True, edgecolor='k')
3 plt.show()

```

7.c.iii. L'exécution des lignes précédentes permet d'obtenir le graphique suivant :



Expliquer l'intérêt des options `density=True` et `edgecolor='k'`.  
Ce graphique permet-il de confirmer la loi obtenue pour la variable aléatoire  $X$ ?



## EXERCICE 20 - EML 2018 E

Deux joueurs,  $A$  et  $B$ , décident de s'affronter dans un jeu de hasard.

- Le joueur  $A$  lance une pièce donnant PILE avec la probabilité  $\frac{2}{3}$ , et FACE avec la probabilité  $\frac{1}{3}$  jusqu'à l'apparition du second PILE. On note  $X_A$  la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues.
- Le joueur  $B$  lance une pièce donnant PILE avec la probabilité  $p$  ( $p \in ]0; 1[$ ), et FACE avec la probabilité  $q = 1 - p$  jusqu'à l'apparition du premier PILE. On note  $X_B$  la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues.

Dans ces conditions de jeu,  $X_A$  et  $X_B$  sont indépendantes. Le gagnant est celui ayant obtenu le moins de FACE. En cas d'égalité, aucun des deux joueurs ne gagne : il y a match nul.

On note :

- $G$  l'évènement "A gagne",
- $H$  l'évènement "B gagne",
- $N$  l'évènement "il y a match nul".

On admet que le jeu se termine presque-sûrement.

1. **Loi de  $X_B$ .** On note  $Y_B$  le nombre de lancers effectués par le joueur  $B$ .

- Reconnaître la loi de  $Y_B$ . Préciser  $Y_B(\Omega)$ ,  $\mathbb{P}(Y_B = k)$  pour tout  $k \in Y_B(\Omega)$ , puis rappeler son espérance et sa variance.
- En déduire la loi de  $X_B$  ainsi que son espérance et sa variance.
- On note  $E$  l'évènement "le joueur  $B$  obtient un nombre pair de FACE". Calculer  $\mathbb{P}(E)$ .

2. **Loi de  $X_A$ .**

- Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire  $X_A$ .
- Soit  $n \in X_A(\Omega)$ . Écrire l'évènement  $[X_A = n]$  comme union d'évènements deux à deux incompatibles. En déduire :

$$\mathbb{P}([X_A = n]) = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$$

2.c. Justifier que  $X_A$  possède une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.

3. **Le jeu.** L'objectif de cette question est d'étudier le jeu en question.

3.a. **Simulation informatique.**

- Écrire une fonction **Python** de sorte que la commande `simulXB(p)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire  $X_B$  lorsque la probabilité d'obtenir PILE est  $p$ .
- Expliquer ce que permet d'obtenir la fonction `mystere` suivante :

```

1 import numpy.random as rd
2
3 def mystere():
4     n=0
5     while rd.random() < 1/3:
6         n=n+1
7     while rd.random() < 1/3:
8         n=n+1
9     return n

```

3.a.iii. Recopier et compléter les lignes manquantes de la fonction ci-dessous de sorte que les variables locales  $pG, pH, pN$  contiennent respectivement des valeurs approchées de  $\mathbb{P}(G), \mathbb{P}(H), \mathbb{P}(N)$ .

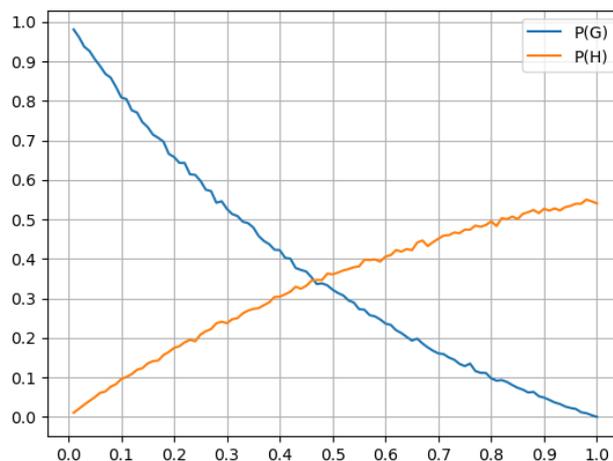
```

1 def probas(p):
2     nG, nH, nN=0,0,0
3     for k in range(10000):
4         XA=mystere()
5         XB=simulXB(p)
6         if .....
7             nG=nG+1
8         elif .....
9             .....
10        else:
11            .....
12        pG, pH, pN = .....
13    return pG, pH, pN

```

3.a.iv. L'exécution de la commande `probas(0.66)` renvoie :  $(0.1911, 0.4344, 0.3745)$ . Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

3.a.v. Cette fonction nous permet de tracer, en fonction de  $p$ , une estimation de  $\mathbb{P}(G)$  et  $\mathbb{P}(H)$ . On obtient le graphique suivant :



Interpréter, dans le contexte de l'exercice, l'abscisse du point d'intersection entre ces deux courbes.

3.b. Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_B > n) = q^{n+1}$ .

3.c. Justifier l'égalité  $\mathbb{P}(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_A = n) \mathbb{P}(X_B > n)$ . En déduire que  $\mathbb{P}(G) = \frac{4q}{(3-q)^2}$ .

3.d. Déterminer  $\mathbb{P}(N)$ .

3.e. En déduire la valeur de  $p$  à choisir pour que le jeu soit équitable.



## EXERCICE 21 - MÉLANGE EML 2010 E ET EDHEC 2007 E

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés  $C_1, C_2, C_3$  arrivent en même temps. Les clients  $C_1$  et  $C_2$  se font servir tandis que le client  $C_3$  attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit  $X_1$  et  $X_2$  les variables aléatoires égales aux durées respectives des opérations des clients  $C_1$  et  $C_2$ . Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  suivent la loi géométrique de paramètre  $p$ , avec  $p \in ]0; 1[$  et qu'elles sont indépendantes. On note  $q = 1 - p$ .

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

1. 1.a. Rappeler la loi de la variable aléatoire  $X_1$  ainsi que son espérance et sa variance.

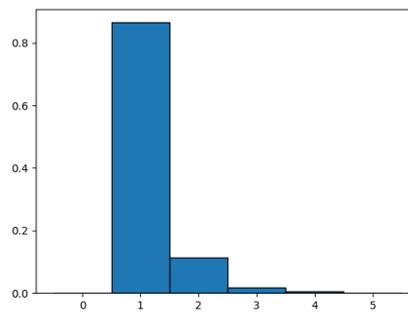
1.b. Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X_1 \leq n) = 1 - q^n$ . Cette relation est-elle encore valable quand  $n = 0$  ?

2. On note  $T$  la variable aléatoire égale au temps d'attente du client  $C_3$  avant de pouvoir se présenter à un guichet. De cette façon,  $T = \min(X_1, X_2)$ .

- 2.a. Sans utiliser la commande `min`, écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simulT(p)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire  $T$  dans le cas où  $X_1$  et  $X_2$  suivent des lois géométriques de paramètre  $p$ .
- 2.b. Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la probabilité  $\mathbb{P}(T > n)$ .
- 2.c. En déduire que  $T$  suit la loi géométrique de paramètre  $1 - q^2$ .
3. On définit maintenant la variable aléatoire  $\Delta$  par  $\Delta = |X_1 - X_2|$ .
- 3.a. Calculer la probabilité  $\mathbb{P}(\Delta = 0)$ .
- 3.b. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Établir :

$$\mathbb{P}(\Delta = n) = 2 \frac{pq^n}{1+q}$$

- 3.c. Justifier alors que  $\Delta(\Omega) = \mathbb{N}$ .
- 3.d. Montrer que  $\Delta$  admet une espérance et la calculer.
4. Dans cette question, on suppose que  $p = \frac{1}{2}$ . Ainsi, d'après le résultat de la question 2.c. la variable aléatoire  $T$  suit la loi géométrique de paramètre  $\frac{3}{4}$ . Afin de compenser son attente, le client  $C_3$  se voit proposer une réduction sur son prochain billet de train. Si  $n \in \mathbb{N}^*$  désigne l'attente subie par  $C_3$  (représentée par la variable aléatoire  $T$ ), alors celui-ci pioche au hasard un jeton dans une urne composée de  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , le tirage du jeton numéro  $k$  entraînera une réduction de  $k$  euros. On note  $R$  la variable aléatoire égale au montant de la réduction obtenue par le client  $C_3$ .
- 4.a. Soient  $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $\mathbb{P}_{\{T=n\}}(\{R = k\})$ . On distinguera les cas  $k > n$  et  $k \leq n$ .
- 4.b. En déduire que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(\{R = k\}) = 3 \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .
- 4.c. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simulR()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire  $R$ .
- 4.d. Écrire un programme **Python** dont l'exécution permettrait d'obtenir le graphique ci-dessous, représentant l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire  $R$ .



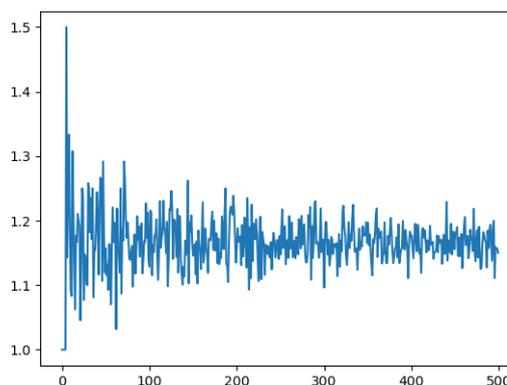
- 4.e. On considère la fonction `mystere` écrite en **Python** :

```

1 def mystere():
2     LE=[]
3     for n in range(1,501):
4         LR=[simulR() for k in range(n)]
5         E=sum(LR)/n
6         LE.append(E)
7     plt.plot(range(500),LE)
8     plt.show()

```

L'exécution de `mystere()` affiche le graphique ci-dessous :



Interpréter ce graphique. On veillera en particulier à décrire le contenu de la liste `LE` après l'exécution de `mystere()`.

4.f. 4.fi. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Écrire explicitement en fonction de  $x$  et  $n$  la somme  $\sum_{k=1}^n x^{k-1}$ .

4.f.ii. En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \ln(4) - \ln(3) - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x} dx$ .

4.f.iii. Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x} dx = 0$ .

4.f.iv. Établir alors que  $\mathbb{P}([R = 1]) = 3(\ln(4) - \ln(3))$  puis donner la valeur de  $\mathbb{P}([R = 2])$ .

4.f.v. Utiliser les résultats précédents pour donner une valeur approchée de  $\mathbb{P}([R \geq 3])$ . On donne :  $\mathbb{P}([R = 1]) \simeq 0,86$ .



## EXERCICE 22 - EDHEC 2019 E

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Une urne contient une balle noire non numérotée et  $n - 1$  balles blanches, dont  $n - 2$  portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces balles au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la balle noire.

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , on note  $B_i$  l'événement : "le  $i$ -ème tirage donne une balle blanche", on pose  $N_i = \overline{B_i}$  et on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la balle noire.

1. Donner l'ensemble  $X_n(\Omega)$  des valeurs que peut prendre la variable  $X_n$ .

2. 2.a. Pour tout  $i \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$ , déterminer  $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i)$ .

2.b. Établir alors :

$$\forall k \in X_n(\Omega), \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{n}$$

2.c. En déduire l'espérance et la variance de  $X_n$ , notées respectivement  $\mathbb{E}(X_n)$  et  $\mathbb{V}(X_n)$ .

3. On note  $Y$  la variable aléatoire qui vaut 1 si la balle numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

3.a. Pour tout  $k \in X_n(\Omega)$ , montrer que :

$$\mathbb{P}([X_n = k] \cap [Y = 0]) = \frac{n - k}{n(n - 1)}$$

3.b. En déduire, grâce à la formule des probabilités totales, la valeur de  $\mathbb{P}([Y = 0])$ .

3.c. Déduire alors la loi de  $Y$ .

4. 4.a. Recopier et compléter le script **Python** suivant de sorte que l'exécution de **simul\_X(n)** simule une réalisation de l'expérience décrite ci-dessus, où  $n$  est le nombre total de balles, et renvoie la valeur de  $X_n$  associée. On admettra que la balle noire est codée tout au long de ce script par le nombre **N**.

```

1 import numpy.random as rd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def simul_X(n):
5     N=n
6     u=rd.randint(1,N+1)
7     X=1
8     while u!=N:
9         N=...
10        u=...
11        X=...
12    return X

```

4.b. En utilisant la fonction créée à la question précédente, écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **esp\_var\_X(n)** renvoie une valeur approchée de  $\mathbb{E}(X_n)$  et une de  $\mathbb{V}(X_n)$ .

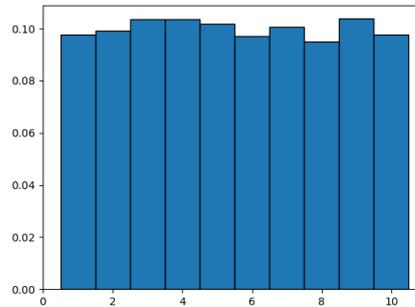
4.c. Recopier et compléter le programme suivant afin que son exécution affiche l'histogramme obtenu à partir de 10000 réalisations de la variable aléatoire  $X_n$ , où  $n$  est saisi par l'utilisateur.

```

1 n=int(input("n=?"))
2 Labs=
3 LX=
4 plt.hist(LX,Labs,edgecolor='k',density=True)
5 plt.show()

```

4.d. On a exécuté le programme de la question précédente en saisissant  $n = 10$  et on a obtenu le graphique qui suit. Expliquer en quoi le graphique est cohérent avec la loi de  $X_n$  obtenue en question 2.b.



4.e. Écrire une fonction de sorte que l'exécution de `simul_XY(n)` simule une réalisation de l'expérience décrite ci-dessus, où  $n$  est le nombre total de balles, et renvoie les valeurs de  $X_n$  et  $Y$  associées.



### EXERCICE 23 - EML 2018 S

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0. Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisse  $0, 1, \dots, n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  l'abscisse de ce point à l'instant  $n$  (on a donc  $X_0 = 0$ ).

On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n$  est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Reconnaitre la loi de  $X_n$  puis donner son espérance et sa variance.
2. On note  $Y$  l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement initial), et on attribue à  $Y$  la valeur 0 si le mobile ne revient jamais à l'origine. On admet que  $Y$  est une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .
  - 2.a. Justifier que  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ .
  - 2.b. Pour tout entier naturel  $i$  non nul, exprimer l'événement  $[Y = i]$  à l'aide des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_i$ .
  - 2.c. En déduire :  $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Y = i]) = \frac{1}{i(i+1)}$ .
  - 2.d. Vérifier par le calcul que l'on a :  $\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = i]) = 1$ .
  - 2.e. Déterminer alors  $\mathbb{P}([Y = 0])$  et interpréter le résultat.
  - 2.f. Démontrer que la variable aléatoire  $Y$  n'admet pas d'espérance.
3. On note  $Z$  l'instant auquel le mobile se trouve pour la deuxième fois à l'origine (sans compter son positionnement initial), et on attribue à  $Z$  la valeur 0 si le mobile revient au plus une fois à l'origine. On admet que  $Z$  est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et que  $\mathbb{P}([Z = 0]) = 0$ .
  - 3.a. Sans justifier, donner  $Z(\Omega)$ .
  - 3.b. Soient  $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 2; +\infty \llbracket$  tel que  $i \geq j$ . Déterminer la probabilité  $\mathbb{P}_{|Y=i}([Z = j])$ .
  - 3.c. Soient  $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \llbracket 2; +\infty \llbracket$  tel que  $i \leq j - 1$ . Établir :  $\mathbb{P}_{|Y=i}([Z = j]) = \frac{i+1}{j(j+1)}$ .
  - 3.d. Écrire, pour tout entier naturel  $j$  supérieur ou égal à 2, la probabilité  $\mathbb{P}([Z = j])$  comme une somme finie.
  - 3.e. La variable aléatoire  $Z$  admet-elle une espérance ?
4. 4.a. Recopier et compléter le programme suivant de sorte que l'exécution de `simulYZ()` renvoie une réalisation de  $Y$  et  $Z$ .

```

1 import numpy.random as rd
2 def simulYZ():
3     n=1
4     while .....:
5         n = .....
6     Y = .....
7     n=n+1
8     while .....:
9         n = .....
10    Z = .....
11    return Y, Z

```

4.b. En utilisant la fonction de la question précédente, écrire un programme **Python** dont l'exécution permettrait d'obtenir l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire  $Y$ .



## EXERCICE 24 - INSPIRÉ D'EXERCICES DE CONCOURS

Un objet se déplace sur les sommets d'un triangle, nommés  $A, B, C$ , selon le schéma suivant :

- si l'objet est en  $A$ , il y reste avec une probabilité  $\frac{3}{8}$ , ou il se dirige vers  $B$  avec une probabilité  $\frac{3}{8}$ , sinon il se dirige vers  $C$  avec une probabilité  $\frac{1}{4}$ .
- si l'objet est en  $B$ , il y reste avec une probabilité  $\frac{1}{4}$ , ou il se dirige vers  $A$  avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ , sinon il se dirige vers  $C$  avec une probabilité  $\frac{1}{4}$ .
- si l'objet est en  $C$ , il y reste.

Initialement, l'objet se situe au sommet  $A$ .

On note, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  l'évènement "l'objet est en  $A$  à l'étape  $n$ " et  $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ . Ainsi,  $a_0 = 1$ . On définit de la même façon les notations  $B_n, C_n$  et  $b_n, c_n$ .

### PARTIE A.

1. Donner  $a_1$  puis calculer  $a_2$ .
2. Si à l'étape 2, l'objet était en  $B$ , quelle est alors la probabilité qu'il ait été en  $A$  à l'étape 1 ?
3. En utilisant la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{8}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + c_n \end{cases}$$

4. **4.a.** Dédire de la question précédente que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_{n+1} = \frac{3}{4}c_n + \frac{1}{4}$ .
- 4.b.** Déterminer alors le terme général de  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- 4.c.** En déduire la limite de la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et interpréter ce résultat.
5. **5.a.** Établir :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $b_{n+2} = \frac{5}{8}b_{n+1} + \frac{3}{32}b_n$ .
- 5.b.** Déterminer alors le terme général de la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
6. Dédire des questions précédentes le terme général de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
7. On considère le programme incomplet suivant :

- 7.a.** Compléter les lignes manquantes du programme suivant de sorte que la commande `simulation(n)` renvoie une liste contenant la simulation des sommets parcourus par l'objet lors des étapes 0 à  $n$  du jeu.

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simulation(n):
4     objet="A"
5     Lobjet=[objet]
6     for k in range(1,n+1):
7         p=rd.rand() #réel aléatoire entre 0 et 1
8         if objet=="A":
9             if p<3/8:
10                objet="B"
11            elif p>=3/8 and p<5/8:
12                objet="C"
13            elif .....
14                .....
15                .....
16                .....
17                .....
18            Lobjet.append(objet)
19            return (.....)
20
21 def mystere(L,x):
22     for k in range(0,len(L)):
23         if L[k]==x:
24             return k
```

- 7.b.** On exécute successivement les deux instructions suivantes : `L=simulation(15)` et `mystere(L,"C")`. Voici le résultat obtenu :

```
>>> L=simulation(15)
>>> mystere(L,"C")
4
```

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

## PARTIE B.

Le contexte de cette partie est le même qu'au début de l'exercice ; et les résultats de la partie A pourront être utilisés.

A chaque déplacement de l'objet, on définit des points de la façon suivante :

- chaque fois que l'objet arrive en  $A$ , 1 point est crédité
- chaque fois que l'objet arrive en  $B$ , 1 point est débité
- aucun point n'est attribué quand l'objet arrive en  $C$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de points accumulés jusqu'à l'étape  $n$  (aucun point n'est attribué pour le point de départ en  $A$ ).

Notons également  $Y_n$  et  $Z_n$  les variables aléatoires définies par :

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ; \quad Z_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 8. Variable aléatoire $X_1$ .

8.a. Donner  $X_1(\Omega)$ .

8.b. Déterminer la loi de  $X_1$ .

8.c. En déduire  $\mathbb{E}(X_1)$  et  $\mathbb{V}(X_1)$ .

### 9. Donner $X_2(\Omega)$ .

10. 10.a. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Exprimer  $X_{n+1}$  en fonction de  $X_n$ ,  $Y_{n+1}$  et  $Z_{n+1}$ .

10.b. Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n(\Omega) = \llbracket -n; n \rrbracket$ .

10.c. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\mathbb{P}(\{X_n = n\})$ .

10.d. Soit  $n \in \llbracket 3; +\infty \rrbracket$ . Donner deux événements inclus dans l'événement  $\{X_n = 0\}$ .

10.e. Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + a_{n+1} - b_{n+1}$ .

10.f. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En déduire que  $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)$  puis déterminer une expression simplifiée de  $\mathbb{E}(X_n)$ .



## EXERCICE 25 - ORAL HEC, ESSEC 2016 E II

1. 1.a. Montrer que pour tout entier naturel  $j$  non nul :  $\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X > j - 1) - \mathbb{P}(X > j)$ .

1.b. Soit  $p$  un entier naturel non nul. Montrer que :  $\sum_{j=1}^p j\mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j) - p\mathbb{P}(X > p)$ .

2. 2.a. On suppose que  $X$  admet une espérance  $\mathbb{E}(X) = \mu$ .

2.a.i. Justifier la convergence de la série de terme général  $k\mathbb{P}(X = k)$ .

2.a.ii. Montrer que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = 0.$$

2.a.iii. En déduire que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p\mathbb{P}(X > p) = 0.$$

2.a.iv. Montrer que la série de terme général  $\mathbb{P}(X > j)$  converge.

2.a.v. Montrer que

$$\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j).$$

2.b. On suppose que  $\sum_{j \geq 0} \mathbb{P}(X > j)$  converge.

2.b.i. Déterminer le sens de variation de la suite  $(v_p)_{p \geq 1}$  définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j).$$

2.b.ii. Comparer  $\sum_{j=1}^p j\mathbb{P}(X = j)$  et  $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > j)$ .

2.b.iii. En déduire que  $X$  admet une espérance.

2.c. Conclure des questions précédentes que  $X$  admet une espérance si et seulement si la série de terme général  $\mathbb{P}(X > j)$  converge.

3. **Une application.** On dispose d'une urne contenant  $N$  balles indiscernables au toucher, numérotées de 1 à  $N$ . On effectue  $n$  tirages successifs et avec remise d'une balle ; et on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au maximum des nombres obtenus sur ces  $n$  tirages.

Pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $Y_i$  la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du  $i$ -ème tirage.

3.a. Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Donner la loi de  $Y_i$ .

3.b. Déterminer, pour tout  $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(\{X_n \leq k\})$ .

3.c. En déduire que  $X_n$  possède une espérance et l'exprimer sous forme d'une somme.

