ECG 1→2 - Eté 2022
ENC Bessières, Paris 17e
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Ahou tcha tcha tcha - Cahier de vacances

(*) Facile (**) Classique/intermédiaire (***) Difficile (****) Approfondissement

Mini exercices / Questions classiques

Les questions de cette partie sont indépendantes et reprennent des techniques, calculs et notions qui balaient l'ensemble du programme de première année. On n'aura pas non plus la naïveté de croire que leur maîtrise "suffit". Cela dit, il serait plus que pénalisant de débuter l'année sans que ce soit le cas.

Naturellement, il est indispensable de connaître parfaitement les différentes formules du cours (formule de sommes classiques, formule du binôme, somme des séries usuelles, lois usuelles, etc...)

Ces exercices sont à rendre au plus tard le **25 août** en **un seul fichier** (format *.pdf*). Il s'agit d'un travail individuel.

Il n'y aura pas de solution de cette planche mise en ligne. Le premier programme de colle de l'année scolaire sera entièrement consacré à la reprise de ces mini-exercices et le devoir surveillé du jour de la rentrée piochera également dans ce cahier.

Calcul

(1) (*) Résoudre le système suivant $\left\{\begin{array}{rcr} x+y-3z-t &=& 0\\ 2x+y-5z+4t &=& 4\\ x-2y+3t &=& -2\\ -x+y+z-2t &=& 1 \end{array}\right.$

(2) (*) Montrer de deux manières (par récurrence, puis à l'aide des formules de sommes usuelles) que
$$\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.$$

(3) (**) Calculer les sommes doubles suivantes
$$(i)\ \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j), \qquad (ii)\ \sum_{1\leq i<k\leq n} \frac{i}{j}$$

(4) (*) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0;n]\!]$,
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(5) (**) Montrer, par la méthode de votre choix, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \geq p+1$,

$$\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}.$$

Analyse

(6) (*) Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

(7) (**) Montrer, à l'aide de l'IAF, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

(8) (*) Nature de la branche en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{e^{3x}+x-1}\right)$.

(9) (*/**) Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(10) (*/**) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n^2+1)/2$ est croissante, majorée par 1 et donc convergente vers une limite à préciser.

(11) (**) Montrer que la fonction f définie ci-dessous est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On commencera par montrer f est continue en 0. Puis, après avoir justifié que f dérivable en dehors de 0 on calculera $f'(x)$, pour $x \neq 0$. On montrera que f dérivable en 0, à l'aide du *développement limité* à l'ordre 2 ci-dessous

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x), \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0,$$

et enfin que f' est continue en 0.

(12) (*/**)Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\exp(x^2)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser et donner l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} en 0.

(13) (*/**)
   (a) Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) = 2\varphi(t).$$
   (b) Soit c un réel. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{2t}$ est solution (particulière) de l'équation différentielle
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}.$$
   (c) Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t}.$$

(14) (*) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

(*On essaiera de faire apparaître une somme télescopique.*)

(15) (*/**) Montrer la convergence et calculer la somme des séries ci-dessous

$$(i)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n},\qquad (ii)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

(16) (*/**) Calculer, avec un changement de variable, les intégrales

$$(i)\ \int_1^2\frac{\mathrm{d}t}{3t-1},\quad (u=3t-1),\quad (ii)\ \int_1^4\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t,\quad (u=1-\sqrt{t})),$$

$$(iii)\ \int_0^{\ln(2)}\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x,\quad (u=1+e^x),\quad (iv)\ \int_1^A\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t,\quad (u=\ln(t)).$$

(17) (**/***) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=0,\quad \text{et}\quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t=0$$

(18) (***) Soit $x\in[0;1[$ fixé.

(a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^n\frac{x^p}{p}=-\ln(1-x)-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$$

(b) Utiliser une technique semblable à la Question (17) pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t=0.$$

(c) Conclure.

(19) (****) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1]$. Soit $x\in]0;1[$. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$f(x)=\sum_{k=0}^n f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$

où $f^{(0)}=f$ et, pour $k\in\mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k-$ième de f.
(*On pourra s'aider d'une intégration par parties.*)

(20) (*Python) Écrire un programme qui calcule et affiche le plus petit entier N tel que $u_N\geq A$, où la suite (u_n) est définie par

$$u_0=2,\qquad \text{et}\qquad u_{n+1}=\exp(u_n)-e\ln(u_n).$$

(21) (**Python) Écrire un programme de dichotomie permettant de donner une valeur approchée à 10^{-4} de la solution de l'équation $e^x+x=3$ (dont on aura au préalable rigoureusement justifié l'existence).

(22) (**Python) Écrire un programme permettant de calculer le terme u_n où la suite (u_n) est définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par

$$u_0=0,\quad u_1=2,\quad \text{et}\quad u_{n+2}=\frac{7}{2}u_{n+1}-\frac{3}{2}u_n.$$

(Écrire un programme permettant de) Représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite $(u_n/3^n)$. Représenter, interpréter.
Déterminer ensuite l'expression du terme général de (u_n).

Algèbre Linéaire

(23) (*/**) Déterminer **soigneusement**, par la formule du binôme, les puissances A^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(24) (*/**) On considère la matrice A ci-dessous
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) À l'aide du pivot de Gauss, vérifier que A est inversible et calculer son inverse.
(b) Calculer $A^2 - 4A + 3I$. En déduire une nouvelle preuve que A est inversible et donner une expression de A^{-1} en fonction de A et de I.

(25) (*) Résoudre les équations $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$où, A est la matrice ci-dessous.
On présentera les solutions sous forme de *sous- espace vectoriel (de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) engendré* par une famille (finie) de vecteurs.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(26) (*) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 + B$ et déduire que B n'est pas inversible.

(27) (*/**) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *nilpotente*, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.
(a) Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + ... + A^{p-1})$.
(b) En déduire que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

(28) (*/**) À l'aide du *déterminant*, déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(29) (**) Pour chacune des matrices M suivantes, déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels $M - \lambda I$ n'est pas inversible. Pour chaque valeur λ trouvée, résoudre $(M - \lambda I)X = 0$ où $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
$$(i)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(30) (*) Montrer que la famille de vecteurs ci-dessous forme une base de $\mathbb{R}^3$.
$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(31) (*) Écrire la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ puis celle dans la base $\mathcal{F} = \{-e_1, e_1 - e_2, -e_1 + e_2 + 4e_3\}$, où
$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, -y + z, 3z).$$

(32) (*/**) **Sans aucun calcul**, déterminer le rang de la matrice ci-dessous. En déduire, toujours sans calcul, une base de son noyau.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probabilités (élémentaires)

(33) (*/**) Montrer que, si C et D sont deux évènements d'un même espace probabilisé, alors

$$P(C \cup D) \leq P(C) + P(D).$$

En déduire que, si (A_j) est une suite d'évènements du même espace, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \geq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

(34) (***) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer, par récurrence sur n (et à l'aide de la formule du crible) que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1).$$

(35) (**) Un voyageur prend l'avion. À chaque voyage, la probabilité que sa valise soit retardée est de $1/12$ et les incidents de bagages sont indépendants à chaque vol. En introduisant les évènements A_n correspondant à "le voyageur ne subit pas de retard de bagage au cours des n premiers vols", montrer à l'aide du résultat de la limite monotone que, presque sûrement, ce voyageur subira un retard de valise lors d'une répétition infinie de trajets en avion.

Variables aléatoires réelles

(36) (**) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. La valeur renvoyée par X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ? Quelle réponse élémentaire aurait-on pu proposer si $p = 1/2$?

(37) (*/**) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; n]\!])$. **Montrer** que $E(X) = (n+1)/2$.

(38) (**/***) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. **Montrer**, à l'aide de la formule du binôme, que $E(X) = np$.

(39) (**/***) Soit X une v.a. finie telle que $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j).$$

(40) (**/***) On effectue des tirages **sans remise** d'une boule dans une urne contenant $N-1$ boules blanches et une boule noire. On note X le rang d'apparition de la boule noire. Montrer soigneusement que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; N]\!])$.

(41) (*) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Montrer que X **admet** une espérance et que $E(X) = 1/p$.

(42) (***/****) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On suppose que, **sachant** $(X = n)$, la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $Y \hookrightarrow P(p\lambda)$.

(43) (***/****) Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. Montrer que $\min(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2)$.
☞ Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites *indépendantes* si et seulement si pour tout $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P([X=i] \cap [Y=j]) = P(X=i)P(Y=j).$$

On commencera par calculer $P(X \geq k)$, puis, notant $Z = \min(X,Y)$, $P(Z \geq k)$ et on utilisera le fait que,

$$P(Z=k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k+1).$$

(44) (*/**Python)) Écrire une fonction `simul_geo(p)` permettant de simuler une loi géométrique de paramètre p.
Écrire une fonction `simul_bino(n,p)` permettant de simuler une loi binomiale de paramètres n et p.

Algorithmique. Python

(45) (*/**) Compléter la fonction `tri(L)` ci-dessous, qui prend en argument une liste `L` et renvoie une liste dont les éléments sont ceux de `L` listés par ordre croissant.

```
def tri(L):
    n=len(L)
    for i in range(n):
        i_min=i
        for j in range(i+1, n):
            if L[j]<L[i_min]:
                i_min=......
        aux=L[i]
        L[i]=.......
        L[i_min]=.......
    return L
```

(46) (**) Écrire une fonction `recherche(x, L)` qui prend en argument un réel `x` et une liste `L` (déjà triée par ordre croissant) dont on sait que le premier termes est inférieur (ou égal) à`x` et le dernier supérieur (strict) à `x` et qui renvoie le plus grand terme de la liste `L` qui soit inférieur ou égal à `x`.

(47) (**/***) Écrire une fonction `selection(L)` qui prend en argument une liste `L` et renvoie à la fois un élément `x` sélectionné au hasard (uniformément) dans `L` et la nouvelle liste `U` obtenue à partir de `L` en retirant `x`.

(48) (**) Écrire une fonction `symetrie(P,Q)` qui prend en argument deux listes de même longueur `P`=$[p_0, ..., p_n]$ et `Q`=$[q_0, ..., q_n]$ et qui calcule et renvoie la valeur de la somme `s` où

$$\texttt{s} = \sum_{i=0}^{n} p_i q_{n-i}.$$

(49) (**) Une guirlande électrique est composée de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 et change d'état de la manière suivante:
- à l'instant $t=0$, le spot S_1 est allumé;
- si, à l'instant $t=n$ le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots s'allume à l'instant $t=n+1$, et ceci de manière équiprobable;
- si, à l'instant $t=n$ le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t=n+1$. On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant où le spot S_2 s'allume.

Écrire une fonction `spot()` (sans argument) qui simule la variable aléatoire X.

(50) (***/****) Écrire une fonction `ordre_inverse(x)` qui prend en argument un nombre entier `x` et renvoie un nombre qui composé des mêmes chiffres que `x` mais dans l'ordre opposé. Par exemple, `ordre_inverse(8973)` renverra 3798.
On commencera par écrire une fonction `taille(x)` qui renvoie le nombre de chiffres dont `x` est composé.

Simple. Basique.

Exercice 1. (*/**)

(1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $p \leq n$ sont deux entiers naturels non nuls, alors $0 \leq x^p \leq 1 + x^n$.
(2) On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que, si X admet un moment d'ordre n, alors X admet aussi un moment d'ordre p pour tout $p \leq n$.

Exercice 2. (**Pour en finir avec les accroissements) On considère la fonction f, dont la courbe est notée C_f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 2 + \exp(-x).$$

(1) (a) Calculer
$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$
(b) Montrer que la courbe C_f admet en $+\infty$ une droite asymptote Δ d'équation $y = x - 2$.
(c) Calculer
$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \text{puis} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$
Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de f en $-\infty$?

(2) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x. Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

(3) Justifier que C_f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β, le premier étant positif, le deuxième étant négatif.

On donne $e \approx 2{,}7$. Prouver que $\alpha \in]1, 2[$.

(4) Tracer l'allure de C_f et Δ. On donne $\alpha \approx 1{,}84$ et $\beta \approx -1{,}14$.

(5) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 - \exp -x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.

(a) Montrer que pour tout réel x, on a : $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$.
(b) Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g.
Montrer alors que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.
(c) Établir que pour tout réel x appartenant à $[1, 2]$: $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$.
(d) En déduire, en appliquant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n
$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|.$$
(e) Montrer par récurrence que
$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{\exp(n)}.$$
Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.
(f) Compléter le programme ci-dessous afin qu'il permette d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

```
u=1
n=0
while ..........
    ......
    u=.......
return ......
```

Exercice 3. (**Pour intégrer l'intégration)
Pour tout entier n on note:

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n \mathrm{d}x.$$

(1) (a) Former le tableau de variation sur [0,1] de $x \to xe^{-x^2}$.
(b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}.$$

(c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}.$$

(b) En déduire la limite de I_n et celle de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. (*) Dans $\mathbb{R}^4$, on note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique et on considère l'endomorphisme $f\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_4, \quad f(e_2) = f(e_1) - e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_4) = -3e_1 - 2e_2 + e_3 - 2e_4.$$

(1) Écrire la matrice K de f dans la base $\mathcal{B}$.
(2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire $\mathrm{Im}(f)$. Que peut-on dire de l'inversibilité de K?
(3) Déterminer la matrice de $f^2 = f \circ f$ dans la base canonique.
(4) On introduit alors les vecteurs

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

(a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
(b) Exprimer, pour $i = 1, 2, 3, 4$, $f(v_i)$ en fonction de v_1, v_2, v_3 et v_4. En déduire la matrice de f, notée L, dans la base $\mathcal{C}$.

(5) On introduit la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{C}$.
(a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
(b) Que vaut $P^{-1}KP$?

Exercice 5. Un après midi de canicule. Vous êtes allongé.e sur le canapé du salon de votre appartement composé de 2 pièces (une chambre et un salon). La fenêtre du salon est ouverte. Une mouche se balade tranquille dans l'appartement en produisant un bruit bien agaçant comme les mouches savent le faire et qui perturbe votre sieste. Au départ, elle se trouve dans le salon. À chaque seconde, la mouche se déplace selon le protocole suivant:

- Si elle est dans le salon, elle y reste avec probabilité 1/2, sort de l'appartement par la fenêtre avec probabilité 1/4 ou va faire un petit tour dans la chambre avec probabilité 1/4;
- Si elle est dans la chambre, elle y reste avec probabilité 3/4 ou retourne dans le salon avec probabilité 1/4;
- Une fois qu'elle est sortie, elle ne rentre plus et va embêter quelqu'un d'autre.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire qui vaut 0 (resp. 1, resp. 2) si la mouche se trouve dehors (resp. dans le salon, resp. dans la chambre) après n déplacements. En particulier, $X_0 = 1$. Toujours pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}, \qquad \Pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Écrire le graphe et la matrice d'adjacence A correspondant à la chaîne de Markov (X_n). Que vaut $A\Pi$? Écrire une relation entre U_n, A et U_0 que l'on démontrera.

(2) (a) Écrire une fonction Python `simul_X(n)` qui simule n déplacements de la mouche et renvoie la *trajectoire* de X_n.

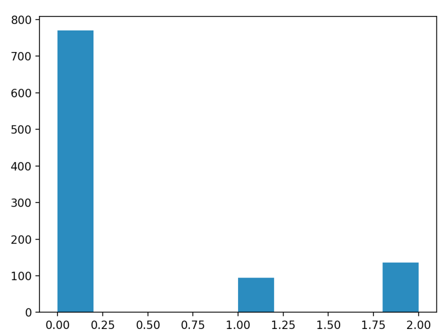
(b) On rajoute les instructions suivantes et on fait varier n en prenant les valeurs $n = 10$, $n = 25$ et $n = 50$ ce qui permet d'obtenir les figures ci-jointes. Que peut-on conjecturer?

```
n=10 # on fait ensuite varier les valeurs de n
sample=[simul_X(n)[n] for k in range(1000)]

plt.hist(sample)
plt.show()
```

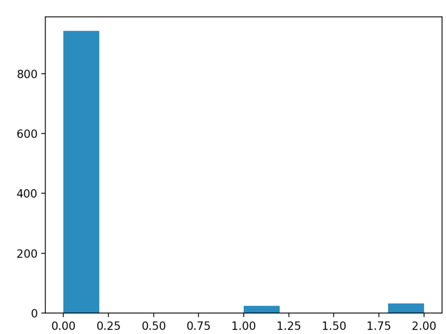
Affichage Python

$n = 10$



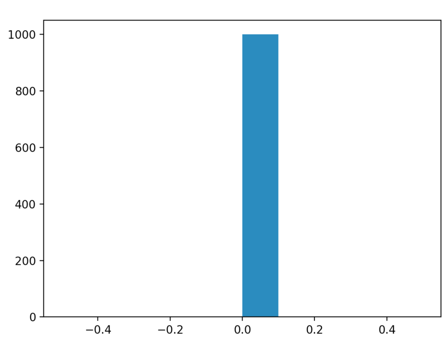
Affichage Python

$n = 25$



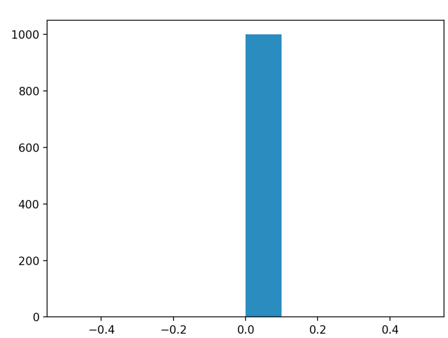
Affichage Python

$n = 50$



Affichage Python

$n = 100$



Problème 1 : apparition du premier roi rouge

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (carreau et coeur), et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie 1 - Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge.

(1) (Simulation avec Python).

(a) Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule la variable X.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n):
    y=1
    T=2*n #nombre de cartes à retourner
    while ............ :
        .........
        .........
    return .......
```

(b) On suppose qu'on dispose[1] d'une fonction `tri(L)` qui, pour une liste de valeurs `L` renvoie une liste triée par ordre croissant (les éléments étant éventuellement répétés s'ils apparaissent plusieurs fois dans la liste initiale). Écrire une fonction `tab_freq(L)` qui, prenant en argument une liste de valeurs `L`, renvoie une matrice dont la première ligne correspond aux différentes valeurs de `L` et la deuxième ligne aux fréquences respectives d'apparition de chaque valeur dans la liste.

(c) On prend $n = 16$. On ajoute les commandes suivantes qui permettent l'affichage ci-après:

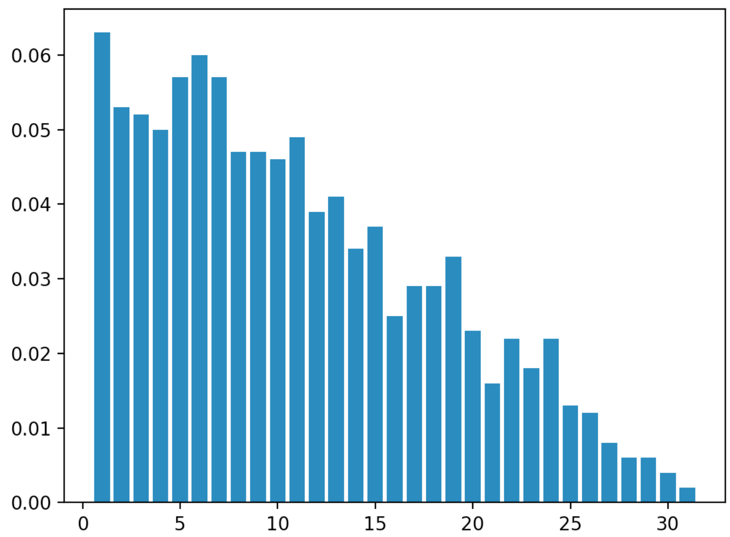
```
import matplotlib.pyplot as plt

sample=[simul_X(16) for k in range(1000)]
T=tab_freq(sample)

plt.bar(T[0], T[1])
plt.show()
```

[1] L'écriture de cette fonction est déjà l'objet de la Question (45) de la section Python ci-avant

Affichage Python



(i) Quelles instructions permettent d'obtenir une *estimation* de $E(X)$?

(ii) Donner une estimation graphique de $P(X = 1)$. Que vaut vraiment $P(X = 1)$?. Donner des estimations de $P(X = 2), P(X = 3)$.

(2) Que vaut $X(\Omega)$?

(3) Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \frac{2n - k}{n\,(2n - 1)}.$$

(4) Montrer que $E(X) = \dfrac{2n + 1}{3}$.

Le joueur perd un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge.
On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.

(5) Exprimer G_1 en fonction de a et X. En déduire l'expression de $E(G_1)$ en fonction de a et n.

(6) Avec quelles instructions supplémentaires peut-on simuler G_1?

Partie 2 - Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur perd un euro à chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros losqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

(7) Écrire, en reprenant une partie du programme précédent, une fonction `simul_G_2(a,n)`, qui simule la variable G_2.

(8) Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, déterminer $P\left(G_2 = a - k\right)$.

(9) Vérifier que

$$P(G_2 = -n) = \frac{n-1}{2\,(2n-1)}.$$

(10) Obtenir alors que

$$E\left(G_2\right) = \frac{3\,(3n-1)\,a - (7n^2-1)}{6\,(2n-1)}.$$

(11) On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer (éventuellement avec l'aide de Python, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Approfondissement* : intégration généralisée

Définition

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a; +\infty[$. On dit que intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

converge si la limite

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(t)\mathrm{d}t$$

existe. Auquel cas, on note

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(t)\mathrm{d}t$$

Ceci permet de généraliser la notion d'intégrale à un intervalle non borné. Un chapitre du cours de deuxième année sera consacré à ces intégrales dites *impropres*. Naturellement, on montre parfois que l'intégrale est convergente (c'est à dire que la limite de l'intégrale *partielle* existe) sans nécessairement la calculer explicitement mais avec les théorèmes habituels sur l'existence des limites (comparaison, encadrement, etc...).

Un premier exercice classique

(1) En calculant explicitement l'intégrale, $\displaystyle\int_0^A e^{-t}\mathrm{d}t$, puis en passant à la limite, montrer la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$. On note cette intégrale I_0.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à la suite d'intégrales (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

(a) Soit $A > 0$ fixé. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que

$$\int_0^A t^{n+1}e^{-t}\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}\mathrm{d}t - A^{n+1}e^{-A}.$$

(b) En déduire, à l'aide d'une récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est une intégrale convergente et que $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

(3) Obtenir alors une formule pour I_n, que l'on démontrera par récurrence.

Un autre exercice ambiance EDHEC

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

(2) Montrer que, pour tout $u \in [0;1]$

$$0 \leq 1 - u \leq e^{-u}.$$

(3) Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$. En particulier, on a, pour tout $A \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \int_0^A e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

(4) En déduire, à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{n}u$ que

$$I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

(5) En déduire la limite de (I_n).

(6) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

(7) En déduire, par récurrence, que

$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Remarque

S'il est possible de montrer la convergence de l'intégrale, les outils du cours d'ECG ne permettent pas de calculer la valeur de celle-ci. On ne résiste cependant pas, à titre informatif, de la donner quand même.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Approfondissement*** : une annale ESSEC II

Préliminaires

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** suivant toutes deux des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

(1) Montrer que
$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

(2) Généraliser le résultat par récurrence (on admettra que si $X_1, ..., X_n, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes, le *lemme des coalitions* permet d'affirmer que $X_1 + ... + X_n$ est indépendante de X_{n+1}).

Partie I - Distance en variation

On considère un ensemble $\mathcal{K}$ qui peut être ou bien une partie finie de $\mathbb{N}$ ou bien égal à $\mathbb{N}$ tout entier. Sur l'espace probabilisable $(\mathcal{K}, \mathcal{P}(\mathcal{K}))$, on définit deux probabilités P et Q et on note
$$p_k = P(\{k\}) \quad \text{et} \quad q_k = Q(\{k\}) \qquad (k \in \mathcal{K}).$$
En particulier, on a $p_k, q_k \geq 0$,
$$\sum_{k\in\mathcal{K}} p_k = \sum_{k\in\mathcal{K}} q_k = 1,$$
et, si A est une partie de $\mathcal{K}$,
$$P(A) = \sum_{k\in A} p_k.$$
Si $\mathcal{K}$ est fini, on introduit la *distance en variation entre les probabilités* P et Q par la formule
$$D(P, Q) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{K}} |p_k - q_k|.$$

(3) On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \{0; 1\}$.

Exprimer $D(P, Q)$, en fonction de p_1 et q_1.

(4) On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \mathbb{N}$.

(a) Montrer, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que la série de terme général $|p_k - q_k|$ est convergente.

On généralise alors la définition de distance en variation entre des probabilités P et Q définies sur $\mathbb{N}$ en posant
$$D(P, Q) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k|.$$

(b) Vérifier que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, $|P(A) - Q(A)| \leq 1$.

(c) Montrer que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,
$$2|P(A) - Q(A)| = \left|\sum_{k\in A}(p_k - q_k)\right| + \left|\sum_{k\in\overline{A}}(p_k - q_k)\right|.$$

(d) En déduire que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,
$$|P(A) - Q(A)| \leq D(P, Q).$$

(e) Montrer qu'en prenant $A = \{k \in \mathbb{N} : \ q_k \geq p_k\}$, l'inégalité précédente devient une égalité.

(f) En déduire que

$$D(P,Q) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \min(p_k, q_k).$$

(g) On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que X soit de loi $P = (p_k)$ et Y de loi $Q = (q_k)$. Montrer que

$$D(P,Q) \leq P(X \neq Y).$$

Partie II - Couplage binomiale-Poisson

Soient n un entier strictement positif et $\lambda > 0$ avec $\lambda < n$.

(5) Soit $(Y_1, ..., Y_n)$ un $n-$échantillon[2] de $\mathcal{P}(\lambda/n)$. Donner sans démonstration la loi de $\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

(6) Vérifier que, pour tout $x \in [0;1]$,

$$f(x) = 1 - (1-x)e^x \in [0;1].$$

Soit $(U_1, ..., U_n)$ un $n-$échantillonde $\mathcal{B}(f(\lambda/n))$ tel que les variables U_i sont indépendantes des variables Y_i. Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{si } U_i = Y_i \\ 1, & \text{sinon} \end{cases}$$

(7) Vérifier que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre λ/n et donner la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(8) Montrer que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$P(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}$$

(On pourra établir et utiliser que $1 + x \leq \exp(x)$.)

(9) Montrer que

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n} [X_i \neq Y_i]\right).$$

(10) En déduire que

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \leq \frac{\lambda^2}{n}$$

et conclure.

[2] c'est à dire n variables mutuellement indépendantes et de même loi

©Bill Watterson, *Calvin & Hobbes*

Si le délai de réponse est naturellement rallongé pendant la période estivale, la communication reste maintenue et on invite néanmoins à lister les difficultés rencontrées clairement formulées et à prendre contact par courriel (`frederic@gaunard.com`) afin de ne pas rester *bloqué.e* trop longtemps. En particulier, les échanges peuvent être réguliers lors de la deuxième quinzaine du mois d'Août. (Il est par ailleurs capital de s'y *remettre* (bien) avant la rentrée, pour une reprise sous les meilleures auspices.)

Bonnes et belles vacances à tou.te.s!