Exercices de révisions

Savoir-faire, technique et exercices classiques type concours

Ce document est un guide de travail pour les révisions estivales avant d'entrer en deuxième année. Dans celui-ci, j'ai listé les différents savoir-faire essentiels (par thème) avec des références d'exercices traités durant l'année à retravailler pour s'assurer de l'assimilation des techniques et méthodes.
Ensuite, par thème, j'ai ajouté des exercices "type concours" ou d'annales de concours, dont certains ont été traités, qui permettent de se tester sur des sujets plus complets.

Le travail de cette fiche est naturellement insuffisant pour aborder sereinement la 2A. En effet, un point est fondamental avant de s'atteler à ces exercices : **LE COURS, LE COURS, LE COURS** ! Définitions, théorèmes et propriétés (avec leurs hypothèses), méthodes doivent être parfaitement connus pour espérer réussir l'année et les concours. Un travail régulier et précis du cours de 1A est indispensable durant l'été mais également durant toute l'année de 2A.

Plan du document

I Analyse

A maîtriser

1. **Éléments calculatoires.**

Calculer des sommes et produits : sommes usuelles, télescopages...	Chapitre 2. Exercices 1,2,4,5.
Résoudre des équations et inéquations : • du premier et second degré, • faisant intervenir les fonctions usuelles (en justifiant bien les inégalités par des arguments de *stricte monotonie*)	Chapitre 1. Exercices 10,11.
Factoriser un polynôme après connaissance d'une racine.	Chapitre 3. Exercice 1.
Étudier le signe d'une expression : • en remarquant qu'elle est somme de termes positifs / somme de termes négatifs / produit de facteurs positifs / produit de facteurs négatifs... (signe "évident") • parce-qu'elle est de degré 1 ou 2, • en la factorisant puis en se ramenant aux deux premiers points... • en résolvant une *inéquation* • en posant une fonction puis en l'étudiant... *dans l'espoir que son tableau de variations nous permette de conclure*.	Un peu partout...
Démontrer des inégalités : • en reconstruisant chaque membre, • en faisant la différence et se ramener à l'étude d'un signe...	Chapitre 1. Exercices 17,18.

2. **Étude de fonctions.**

Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.	Chapitre 1. Exercice 1. Chapitre 6. Exercice 10.
Étudier les limites d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition.	Chapitre 6. Exercices 1,2,10.
Justifier qu'une fonction est continue / dérivable / $\mathscr{C}^1$ / $\mathscr{C}^2$ / $\mathscr{C}^\infty$ *sur un intervalle*.	Chapitre 6. Exercice 10. Chapitre 13. Exercice 1.
Étudier la continuité / dérivabilité d'une fonction *en un réel*.	Chapitre 13. Exercices 1,2. Chapitre 17. Exercice 1.
Dériver une fonction.	Chapitre 1. Exercice 13.
Étudier une fonction.	Chapitre 1. Exercice 14. Chapitre 6. Exercice 10. Chapitre 17. Exercice 10.
Montrer qu'une fonction est bijective à l'aide du théorème de bijection.	Chapitre 13. Exercice 3.
Déterminer, si f est bijective, l'expression de sa bijection réciproque.	Chapitre 11. Exercice 2. *A coupler avec le théorème de bijection maintenant...*

3. **Intégration.**

Déterminer une primitive d'une fonction.	Chapitre 19. Exercice 1.
Calculer une intégrale : • à vue, • par IPP, • par changement de variable.	Chapitre 19. Exercices 3,4,5.
Étudier une suite d'intégrales.	Chapitre 19. Exercices 7,8,9,10.
Étudier une fonction définie par une intégrale.	Chapitre 19. Exercices 12,13,14,15.

4. **Équations différentielles.**

Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.	Chapitre 22. Exercice 1.
Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.	Chapitre 22. Exercice 2.
Mettre en place la méthode de variation de la constante si elle est guidée.	Chapitre 22. Exercices 7,8.

5. **Suites.**

Déterminer le terme général d'une suite usuelle (arithmétique, géométrique, artithmético-géométrique, récurrente linéaire d'ordre 2).	Chapitre 2. Exercices 5,6,9,10,12.
Montrer que deux suites sont adjacentes.	Chapitre 10. Exercices 9,10.
Étudier une suite (u_n) définie par une relation du type : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.	Chapitre 10. Exercices 13,14,18. Chapitre 13. Exercice 10. Chapitre 17. Exercices 7,8.
Étudier une suite implicite.	Chapitre 13. Exercices 12,13,14,15.

6. **Séries.**

Étudier la nature d'une série et calculer sa somme : • à l'aide des séries usuelles, • à l'aide d'un télescopage.	Chapitre 14. Exercices 1,2,5,6,7.
Étudier la nature d'une série à l'aide du critère de comparaison sur les séries à termes généraux positifs.	Chapitre 14. Exercice 8.
Étudier la suite des sommes partielles d'une série.	Chapitre 10. Exercices 5,6,7. Chapitre 14. Exercices 11,12.

Exercice 1 – Inspiré d'exercices de concours

On considère la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de **suite_h(n)** renvoie la valeur de h_n.
   Deux possibilités :

```python
def suite_h(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+1/k
    return S

def suite_h_bis(n):
    L=[1/k for k in range(1,n+1)]
    return sum(L)
```

> **Petite remarque**
> Dans le premier programme, il est aussi possible d'initialiser avec `S=1` et, dans ce cas, la ligne suivante est `for k in range(2,n+1):`.

2. Étude de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   2.a. Déterminer le sens de variation de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} h_{n+1} - h_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

   Par conséquent : $h_{n+1} > h_n$.

   Conclusion : la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

   2.b. Démontrer que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
   Posons $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$, définie sur $]-1;+\infty[$.
   Posons également $u : x \longmapsto 1+x$ de sorte qu $f = \ln\circ u - \text{id}$.
   La fonction u est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et à valeurs strictement positives sur cet intervalle ; donc $\ln\circ u$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$. Ainsi, f est une somme de deux fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$, elle l'est donc également. Soit $x \in]-1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{-x}{1+x} \end{aligned}$$

   D'où :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	||	$\nearrow$	0	$\searrow$	

   On en déduit que f possède un maximum sur $]-1;+\infty[$ égal à 0, atteint en 0.

   Conclusion : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.

> **Autre méthode**
> La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_*^+$ donc sa courbe est au-dessous de toutes ses tangentes ; et en particulier celle en $(1;0)$.
> Pa conséquent :
> $$\forall y \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(y) \leq y-1$$
> D'où le résultat voulu...

> **Petite remarque**
> Les limites ne sont pas demandées, et ne sont pas nécessaires...

   2.c. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n \geq \ln(n+1)$. Déterminer alors la limite de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\dfrac{1}{k} \geq 0$, on peut utiliser le résultat établi ci-dessus et obtenir ainsi : $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$.

     Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$.

   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     D'après le résultat précédent :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

     En sommant cette inégalité pour k allant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

     Autrement dit :

$$h_n \geq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

     Or, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \quad \text{télescopage} \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

> **✍ Rédaction**
> Je quantifie le k avec "$\forall k \in$ ..." : c'est une quantification qui n'est valable que sur la ligne en cours. C'est approprié ici, puisque le k devient muet à la ligne suivante.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n \geq \ln(n+1)$.

- On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \geq \ln(n+1)$; de plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$.

Conclusion : par théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = +\infty$.

3. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = h_n - \ln(n) \ \ ; \ \ v_n = h_n - \ln(n+1)$$

3.a. A l'aide du résultat de la question 2.b., établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Inégalité de gauche.**
Remarquons déjà que :

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

Or, d'après le résultat de la question 2.b., avec $x = \dfrac{1}{n+1} > -1$ (car $n > 0$), on obtient :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

Conclusion :

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

- **Inégalité de droite.**
Remarquons déjà que :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) \\ &= -\ln\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Or, d'après le résultat de la question 2.b., avec $x = \dfrac{-1}{n+1} > -1$ (car $n > 0$), on obtient :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{-1}{n+1}$$

D'où :

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n+1}$$

Conclusion :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+1} \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

3.b. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers la même limite, notée γ.

➟Réflexe !
L'énoncé est clair !!

Pour cela, démontrons qu'elles sont adjacentes.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= h_{n+1} - \ln(n+1) - (h_n - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

question précédente

Conclusion : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= h_{n+1} - \ln(n+2) - (h_n - \ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

question précédente

Conclusion : la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= h_n - \ln(n) - h_n + \ln(n+1) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$$

On a :

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$

Par conséquent, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Conclusion : les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite, notée γ.

☞ Pour info...
γ est appelée constante d'Euler-Mascheroni.
On a ainsi, pour n suffisamment grand : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \simeq \ln(n) + \gamma$.

3.c. Établir :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n = u_n + \ln(n)$$

D'où, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$ (ainsi $\ln(n) \neq 0$) :

$$\frac{h_n}{\ln(n)} = \frac{u_n}{\ln(n)} + 1$$

Petite remarque
Sinon, on se place "pour n suffisamment grand", puisqu'il est de toute façon destiné à tendre vers $+\infty$... (mais on veut tout de même voir que $\ln(n) \neq 0$)

Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie, d'où, par opération :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 0$$

Et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} + 1 = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1$.

3.d. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma \leq u_n$.

- Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et qu'elle converge vers γ, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq \gamma$.
- De même, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge vers ℓ, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq \gamma$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma \leq u_n$.

3.e. Écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un réel strictement positif p et renvoyant en sortie un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à p (cette fonction pourra utiliser la fonction de la question 1.).

Là encore, deux possibilités.
La première utilise la fonction de la question 1., la seconde non.

```python
import numpy as np

def gamma(p):
    n=1
    u=1
    v=1-np.log(2)
    while abs(u-v)>p:
        n=n+1
        h=suite_h(n)
        u=h-np.log(n)
        v=h-np.log(n+1)
    return v,u

def gamma_bis(p):
    k=1
    S=1
    u=1
    v=1-np.log(2)
    while abs(u-v)>p:
        k=k+1
        S=S+1/k
        u=S-np.log(k)
        v=S-np.log(k+1)
    return v,u
```

Petite remarque
L'avantage de la seconde : moins de calculs pour l'ordinateur...
Dans la première, on pourrait aussi avoir **u=suite_h(n)-np.log(n)** et **v=suite_h(n)-np.log(n)**, mais cela ferait calculer deux fois h_n...

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

4.a. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = h_{2n} - h_n$.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
  On a :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} - 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'où :

$$S_1 = h_2 - h_1$$

L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $S_n = h_{2n} - h_n$ et montrons que $S_{n+1} = h_{2n+2} - h_{n+1}$.
  On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= h_{2n} - h_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} && h_{n+1} = h_n + \frac{1}{n+1} \\ &= h_{2n} - \left(h_{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= h_{2n} - h_{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{2-1}{2n+2} \\ &= h_{2n} - h_{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= h_{2n+2} - h_{n+1} \end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = h_{2n} - h_n$.

4.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} S_n &= h_{2n} - h_n && u_n = h_n - \ln(n) \\ &= u_{2n} + \ln(2n) - (u_n + \ln(n)) \\ &= u_{2n} - u_n + \ln(2n) - \ln(n) \\ &= u_{2n} - u_n + \ln(2) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

4.c. Conclure que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

On a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

Or on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ, c'est donc également le cas de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ (suite extraite). Et ainsi, par opérations sur les limites ($\gamma \neq \infty$, car convergence...) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} - u_n = 0$$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$.

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

☞ **Pour info...**
En fait, c'est également le cas de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$...

★★★★★★★

Exercice 2 - Inspiré d'exercices de concours

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \dfrac{x^2}{2} + x$.

1. Écrire une fonction **Python** d'en-tête **def f(x)** qui prend un réel x en argument d'entrée et renvoie $f(x)$ en sortie.

```python
import numpy as np

def f(x):
    y=np.exp(-x)-x**2/2+x
    return y
```

2. **Étude de f.**

2.a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

- En $-\infty$:
  Pour x suffisamment proche de $-\infty$:
  $$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 - \frac{x^2}{2\mathrm{e}^{-x}} + \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}}\right)$$
  Or, par croissance comparée : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2\mathrm{e}^{-x}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}} = 0$.
  D'où, par opérations :
  $$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$
- En $+\infty$:
  On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{2} + x = -\infty$... D'où, par opérations :
  $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2.b. Dresser le tableau de variations complet de f et étudier sa convexité.

f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - x + 1 \quad ; \quad f''(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$$
Et :
$$\begin{aligned} f''(x) \geq 0 &\iff \mathrm{e}^{-x} - 1 \geq 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} \geq 1 \\ &\iff -x \geq 0 \quad \text{stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff x \leq 0 \end{aligned}$$

Important ! La **stricte** croissance est nécessaire pour remonter l'équivalence !

D'où le tableau de variations de f' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f'		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, puisque le maximum de f' sur $\mathbb{R}$ est 0, atteint en 0, on en déduit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Petite remarque On aurait aussi pu avoir le signe de $f'(x)$ en utilisant : $\forall y \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^y \geq 1 + y$, avec $y = -x$...

Convexité.
On vient d'obtenir le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$...

Conclusion : f est convexe sur $\mathbb{R}^-$, concave sur $\mathbb{R}^+$, et $\mathscr{C}_f$ possède un point d'inflexion de coordonnées $(0;1)$.

2.c. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α, dont on donnera un encadrement entre deux entiers consécutifs.

✘ Attention ! Ce n'est pas sur f qu'il faut appliquer le théorème de bijection... C'est sur g !

On pose $g : x \longmapsto f(x) - x = \mathrm{e}^{-x} - \dfrac{x^2}{2}$. On a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x \iff g(x) = 0$.

- ◇ g est continue sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$,
  ◇ f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto -x$ également. Ainsi, g est une somme de deux fonctions strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

  Par conséquent, d'après le théorème de bijection, g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- De plus, puisque $0 \in g(\mathbb{R})$, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$; ce qui est donc le cas de l'équation $f(x) = x$. Notons α cette solution.
- Enfin : $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = e^{-1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2} < 0$ car $e > 2$.
  Ainsi :
  $$g(0) > g(\alpha) > g(1)$$
  Et, par stricte décroissance de g sur $\mathbb{R}$, on obtient :
  $$0 < \alpha < 1$$

Petite remarque Sinon, on dérive, et on remarque que $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$...

Petite remarque On a le choix : "désappliquer" la fonction g ; ou appliquer la fonction g^{-1}...

Conclusion : l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution réelle α, et $\alpha \in [0;1]$.

3. **Étude d'une première suite.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.

Récurrence immédiate, f étant décroissante sur $[0,1]$ et en utilisant : $f(0) = 1$ et $f(1) = e^{-1} + \dfrac{1}{2} \geq 0$.

3.b. Démontrer que pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{e}$.

➠Réflexe !
Avant de se lancer dans les calculs en majorant / minorant des expressions : est-ce que l'inégalité est trivialisée par les variations de f' ? Ah bah oui !

Soit $x \in [0;1]$. Puisque f' est décroissante sur $[0;1]$, on a :

$$f'(0) \geq f'(x) \geq f'(1)$$

Autrement dit :

$$0 \geq f'(x) \geq \frac{-1}{e}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{e} > 0 \geq f'(x) \geq \frac{-1}{e}$$

Conclusion : pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{e}$.

3.c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$ puis $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - ◇ f est dérivable sur $[0;1]$
  - ◇ $\forall x \in [0;1],\ |f'(x)| \leq \dfrac{1}{e}$

  Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :

  $$\forall (x,y) \in [0;1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{e}|x-y|$$

  Or : $u_n \in [0;1]$ et $\alpha \in [0;1]$. D'où :

  $$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$$

  Et, d'après la question **2.c.**, $f(\alpha) = \alpha$.

  Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$.

- Par récurrence...
  - ◇ **Initialisation.** Pour $n = 0$:
    On a : $|u_0 - \alpha| = \alpha$. Or, on a vu que $\alpha \in [0;1]$. On a donc bien : $|u_0 - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^0$. L'initialisation est vérifiée.
  - ◇ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ et montrons $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^{n+1}$.
    Par hypothèse de récurrence, on a :

    $$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

    d'où, en multipliant par $\dfrac{1}{e} > 0$:

    $$\frac{1}{e}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

    Et ainsi d'après le point précédent et par transitivité :

    $$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

    L'hérédité est établie.

  Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$.

3.d. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

- D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$.
- De plus, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$. Autrement dit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n - \alpha = 0$.

★Subtile...★
Tout serait différent si on avait $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 1$: on ne pourrait même pas conclure que (u_n) converge...

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

3.e. Déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée à 10^{-10} près de α. *Donnée :* $\ln(10) \simeq 2,303$.

★Subtile...★
On ne demande pas le premier rang à partir duquel c'est le cas...

D'après le résultat de la question **3.c.**, il suffit de trouver un n à partir duquel $\left(\dfrac{1}{e}\right)^n < 10^{-10}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-10} &\iff n\ln\left(\frac{1}{e}\right) \leq -10\ln(10) \quad \text{par stricte décroissance de ln sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\iff -n \leq -10\ln(10) \\
&\iff n \geq 10\ln(10)
\end{aligned}$$

Conclusion : pour $n \geq 24$, on peut affirmer que $|u_n - \alpha| < 10^{-10}$; ce qui répond à la question.

3.f. Créer une fonction **Python** d'en-tête **def u(n):** qui prend n en valeur d'entrée et renvoie u_n en sortie.

```
def u(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=f(u) #où f est la fonction de la question 1
    return u
```

4. Étude d'une seconde suite.

4.a. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser. Dresser le tableau de variations complet de f^{-1}.

On sait que :

- f est continue sur $\mathbb{R}$,
- f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (question **2.b.**)

Ainsi, d'après le théorème de bijection, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(R) = \mathbb{R}$.

On a également :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
variations de f^{-1}	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$

4.b. Écrire une fonction **Python** nommée **dicho** qui prend la valeur d'un réel strictement positif p en argument d'entrée et renvoie une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ à p près, à l'aide de l'algorithme de dichotomie.

L'exécution de **dicho(0.01)** *renvoie* $2,11$.

On sait que $f(0) = 1$ et on remarque que $f(3) = e^{-3} - \dfrac{3}{2} < 0$... D'où :

$$f(0) > 0 > f(3)$$

Et ainsi, par stricte décroissance de f^{-1} sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$0 < f^{-1}(0) < 3$$

Ceci nous permet d'obtenir un premier intervalle sur lequel débuter !

Petite remarque

L'intervalle $[2;3]$ convenait également...

```
def dicho(p):
    a=0
    b=3
    while b-a>p:
        m=(a+b)/2
        if f(m)==0: #où f est la fonction de la question 1
            a,b=m,m
        elif f(m)*f(a)<0:
            b=m
        elif f(m)*f(a)>0:
            a=m
    return (a+b)/2
```

4.c. Déduire de la question **4.a.** que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre, noté x_n, tel que $f(x_n) = \dfrac{1}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque $\dfrac{1}{n} \in f(\mathbb{R})$ et que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$, il existe un unique antécédent à $\dfrac{1}{n}$ par f, noté x_n.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel x_n tel que $f(x_n) = \dfrac{1}{n}$.

4.d. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0;3]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $f(x_n) = \dfrac{1}{n} \in]0;1]$, ainsi que $f(0) = 1$ et $f(3) < 0$... D'où :

$$f(0) > f(x_n) > f(3)$$

Et par stricte décroissance de f^{-1} sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$0 < x_n < 3$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0;3]$.

4.e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer x_n en fonction de n et f^{-1}.

On a $f(x_n) = \dfrac{1}{n}$, et comme f est bijective : $x_n = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ x_n = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

4.f. En déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et que f^{-1} est continue en 0, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = f^{-1}(0)$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = f^{-1}(0) \simeq 2,11$.

Pourquoi ?

dicho(0.01) renvoie une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ à 10^{-2} près.

★★★★★★★

Exercice 3 - EDHEC 2013 E

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1. **1.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 = 0$, donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
  Par hypothèse de récurrence :
  $$0 \leq u_n \leq 1$$
  Ainsi, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ (nous sommes ici sur $[0;1]$) :
  $$0 \leq u_n^2 \leq 1$$
  D'où :
  $$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$
  Et par transitivité :
  $$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$
  L'hérédité est vérifiée.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

1.b. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ et préciser un encadrement de ℓ.

- Étudions les variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
  $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2+1}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n^2+1-2u_n}{2} \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{(u_n-1)^2}{2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$
  Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- D'après la question précédente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par 1).

Donc, par théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
Et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 0 et 1, on a $\ell \in [0;1]$.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et $\ell \in [0;1]$.

1.c. Déterminer ensuite la valeur de ℓ.

On sait que :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

D'où :
$$\ell = \frac{\ell^2+1}{2}$$
Or :
$$\begin{aligned} \ell = \frac{\ell^2+1}{2} &\iff 2\ell = \ell^2+1 \\ &\iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \\ &\iff (\ell-1)^2 = 0 \\ &\iff \ell = 1 \end{aligned}$$
Par conséquent : $\ell = 1$.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

☞ **Rappel...**
SI :
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$
- (u_n) converge vers ℓ
- f est continue en ℓ

ALORS : $f(\ell) = \ell$.

2. **2.a.** Écrire une fonction **Python** qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n.

```
def suite_u(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=(u**2+1)/2
    return u
```

2.b. En déduire un programme, rédigé en **Python**, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.

```
n=0
while 1-suite_u(n)>10**(-3):
    n=n+1
print(n)
```

Petite remarque
L'exécution de ce programme affiche 1991 : la convergence est lente !

Remarque

L'énoncé a guidé ainsi, mais on pourrait également écrire un programme permettant de répondre à cette question sans utiliser la précédente :

```
u=0
n=0
while 1-u>10**(-3):
    u=(u**2+1)/2
    n=n+1
print(n)
```

Cette solution a l'avantage d'être moins coûteuse en calculs ! En effet, avec les deux algorithmes précédents, pour tout $n \in [\![1;1991]\!]$, le calcul de u_n nécessite de recalculer tous les u_k, pour $k \in [\![1;n]\!]$... C'est un peu dommage !

3. On définit maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 - u_n$.

3.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1})$.

Simple télescopage...

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) &= v_0 - v_{n+1}\\ &= 1 - u_0 - (1 - u_{n+1})\\ &= u_{n+1} - u_0\\ &= u_{n+1}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) = u_{n+1}$.

3.b. Pour tout entier naturel k, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}v_k - v_{k+1} &= 1 - u_k - (1 - u_{k+1})\\ &= u_{k+1} - u_k\\ &= \frac{(u_k - 1)^2}{2}\\ &= \frac{v_k^2}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N},\ v_k - v_{k+1} = \dfrac{v_k^2}{2}$.

3.c. Montrer alors que la série $\sum v_n^2$ est convergente et donner la valeur de sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} v_k^2 &= 2\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1}) && \text{d'après la question précédente}\\ &= 2u_{n+1} && \text{d'après la question 3.a.}\end{aligned}$$

Or, d'après la question **1.c.**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} v_k^2 = 2$$

Conclusion : la série $\sum v_n^2$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = 2$.

★★★★★★★

Exercice 4 - EDHEC 2010 E

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
   $u_0 = 2$
   $u_1 = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3$
   $u_2 = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)u_n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

3. **3.a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
   Par récurrence...
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$:
     $u_0 = 2$, donc l'initialisation est vérifiée.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \geq 2$ et montrons que $u_{n+1} \geq 2$.
     Par hypothèse de récurrence, on a :
     $$u_n \geq 2$$
     D'où, en multipliant par $1+\frac{1}{2^{n+1}}$ (strictement positif) :
     $$u_n \times \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \geq 2\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
     C'est à dire :
     $$u_{n+1} \geq 2 + \frac{1}{2^n}$$
     Et comme $\frac{1}{2^n} > 0$, on obtient, par transitivité :
     $$u_{n+1} \geq 2$$
     L'hérédité est ainsi établie.

   Conclusion : pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.

   3.b. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n \times \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^n - u_n \\ &= u_n \times \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

   Or $u_n > 0$ (car $u_n \geq 2$) et $\frac{1}{2^n} > 0$.
   Ainsi
   $$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Petite remarque
   Puisque l'on sait que (u_n) est à termes strictement positifs, on peut aussi remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$...

   3.c. Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
   Posons $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$, définie sur $]-1;+\infty[$.
   Posons également $u : x \longmapsto 1+x$ de sorte qu $f = \ln \circ u - \mathrm{id}$.
   La fonction u est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et à valeurs strictement positives sur cet intervalle ; donc $\ln \circ u$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$. Ainsi, f est une somme de deux fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$, elle l'est donc également. Soit $x \in]-1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{-x}{1+x} \end{aligned}$$

   Autre méthode
   La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_*^+$ donc sa courbe est au-dessous de toutes ses tangentes ; et en particulier celle en $(1;0)$.
   Pa conséquent :
   $$\forall y \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(y) \leq y - 1$$
   D'où le résultat voulu...

   D'où :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	↗	0	↘	

   Petite remarque
   Les limites ne sont pas demandées, et ne sont pas nécessaires...

   On en déduit que f possède un maximum sur $]-1;+\infty[$ égal à 0, atteint en 0.

   Conclusion : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.

3.d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\ln(u_n) \leq 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On a :

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) \quad \forall k \in [\![0;n]\!],\ 1+\frac{1}{2^k} > 0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

✘ Attention ! Pour que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ il faut que $a, b > 0$ (sinon, petit souci...).

- D'après la question précédente, licite car pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\frac{1}{2^k} > -1$:

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

➠Réflexe ! Pour majorer une somme, on commence par majorer son terme général...

D'où, en sommant :

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Et ainsi, par transitivité :

$$\ln(u_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad \text{car } \frac{1}{2^{n+1}} \geq 0 \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) \leq 2$.

4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.

D'après la question précédente, par croissance de l'exponentielle, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq e^2$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (question **3.b.**).
Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ.
Et puisque pour tout n, $u_0 \leq u_n \leq e^2$, on en déduit que $\ell \in [2; e^2]$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.

✍ Rédaction Il vaut mieux distinguer les 2 points :
- la CV, assurée par th de CV monotone
- l'encadrement de ℓ, par l'encadrement de (u_n)

5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

5.a. Justifier que la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in [2 : e^2]$ et que la fonction ln est continue en ℓ (car continue sur $]0;+\infty[$), on en déduit que la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(\ell)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$...

✓ Rigueur ! Ne pas oublier la continuité de ln en ℓ pour justifier que $\big(\ln(u_n)\big)$ converge vers $\ln(\ell)$!

Conclusion : La suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

5.b. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n > 0$ et $\ell > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n) \quad \text{question précédente} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

✘ Attention ! Pour que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ il faut que $a, b > 0$ (sinon, petit souci...).

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

5.c. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Puisque :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2^k} \geq 0$$

  On a :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

➠Réflexe ! D'après la question précédente $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
Et pour encadrer une somme, on commence par encadrer son terme général...

D'où, en sommant de $n+1$ à $+\infty$, licite car les deux séries en jeu sont convergentes :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

- Or, par changement d'indice $i = k-(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1+i}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

:et par transitivité :

$$0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.

> **Pourquoi ?**
> L'une est une série géométrique...
> La convergence de $\sum \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ est en fait établie à la question 5.a. ; mais on pourrait la justifier par critère de comparaison sur les SATP, puisque :
> $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$

5.d. Déduire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1-e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante de limite ℓ, on a déjà : $\ell - u_n \geq 0$.
- Ensuite, considérons la différence :

$$\ell - u_n - \ell(1-e^{-\frac{1}{2^n}}) = -u_n + \ell e^{-\frac{1}{2^n}}$$

D'après la question précédente, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on a : $\frac{\ell}{u_n} \leq e^{\frac{1}{2^n}}$.
D'où, puisque $u_n > 0$:

$$\ell e^{-\frac{1}{2^n}} \leq u_n$$

Par conséquent :

$$-u_n + \ell e^{-\frac{1}{2^n}} \leq 0$$

Et ainsi :

$$\ell - u_n - \ell(1-e^{-\frac{1}{2^n}}) \leq 0$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1-e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

5.e. Justifier que, pour tout réel x, on a $1-e^{-x} \leq x$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $\ell - u_n$.

- On pose et on étudie la fonction $g : x \longmapsto 1-e^{-x}-x$... On obtient sans difficulté que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1-e^{-x} \leq x$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique le résultat que l'on vient de trouver avec $x = \frac{1}{2^n} \in \mathbb{R}$:

$$1-e^{-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{1}{2^n}$$

Or, d'après la question précédente : $0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1-e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.
D'où, par transitivité :

$$0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$$

- Or, la série $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $\frac{1}{2} \in]-1;1[$), donc, par théorème de comparaison sur les séries à termes généraux positifs, la série $\sum(\ell - u_n)$ est également convergente.

Conclusion : la série $\sum \ell - u_n$ converge.

> **✍ Rédaction**
> On compare seulement les termes généraux !

5.f. 5.f.i. Écrire une fonction **Python** qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la valeur de u_n en sortie.

```python
def u(n):
    U=2
    for k in range(1,n+1):
        U=U*(1+1/2**k) #ATTENTION : k, pas k+1...
    return U
```

5.f.ii. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell - u_n \leq \frac{e^2}{2^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question5.e. :

$$\ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$$

Mais on sait aussi, d'après la question 4., que $\ell \leq e^2$, d'où (car $2^n > 0$) : $\frac{\ell}{2^n} \leq \frac{e^2}{2^n}$.
Le résultat en découle, par transitivité.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell - u_n \leq \dfrac{e^2}{2^n}$.

5.f.iii. Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $\dfrac{e^2}{2^n} < 10^{-5}$. Interpréter le résultat. *Donnée :* $\dfrac{5\ln(10)+2}{\ln(2)} \simeq 19,5$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{2^n} < 10^{-5} &\iff 2^n > e^2 \times 10^5 \\ &\iff n\ln(2) > 2 + 5\ln(10) \quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff n > \frac{5\ln(10)+2}{\ln(2)} \quad \text{car } \ln(2) > 0 \\ &\iff n \geq 20 \end{aligned}$$

- Interprétation :

  Pour $n \geq 20$, on a $\dfrac{e^2}{2^n} < 10^{-5}$; ainsi, d'après la question précédente et par transitivité, si $n \geq 20$, alors $\ell - u_n < 10^{-5}$.
  Et comme on sait que $\ell - u_n \geq 0$, on obtient que, si $n \geq 20$, u_n fournit une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près.

✘ Attention !
20 n'est pas nécessairement la plus petite valeur à partir de laquelle u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près, puisque nous n'avons que des majorations...

★★★★★★★

Exercice 5 - EDHEC 2020 E

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

1. Justifier, pour tout entier naturel n, l'existence de I_n et J_n.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x}$ sont définies et continues sur le segment $[0;1]$; donc I_n et J_n existent.

   ✓ Rigueur !
   On veut voit le mot **segment**.

2. Calculer I_0 et I_1.

   •
   $$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{x^0}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   •
   $$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1+x-1}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \ln(2) - I_0 \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Petite remarque
   Plutôt que d'utiliser cette astuce, on aurait aussi pu effectuer le changement de variable $t = 1+x$; ou même procéder par IPP.

3. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

   $$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x)^2}\,dx \end{aligned}$$

   linéarité de l'intégrale

   Or, pour tout $x \in [0;1]$:
   - $x^n \geq 0$
   - $x - 1 \leq 0$
   - $(1+x)^2 > 0$

   D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $1 > 0$:

   $$\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x)^2}\,dx \leq 0$$

   Conclusion : la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   ✍ Rédaction
   Cette question doit être parfaitement justifiée !! En particulier, on mentionne la "linéarité de l'intégrale" et "la croissance de l'intégrale, avec bornes dans l'ordre croissant". C'est la première fois qu'elles apparaissent, on fait donc un effort !

4. 4.a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

   $$\begin{aligned} I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2}\,dx + 2\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + 2x^n}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 x^n \frac{x^2+2x+1}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 x^n\,dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

   linéarité de l'intégrale

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   4.b. En déduire I_2.

   D'après le résultat précédent, on obtient :

   $$I_2 + 2I_1 + I_0 = 1$$

   Puis on utilise les résultats de la question 2....

   Conclusion : $I_2 = \dfrac{3}{2} - 2\ln(2)$.

5. 5.a. A l'aide de la relation établie à la question 4.a., écrire une fonction **Python** d'en-tête `def I(n):` qui renvoie la valeur de I_n pour $n \in \mathbb{N}$.

```python
import numpy as np

def I(n):
    if n==0:
        return 1/2
    if n==1:
        return np.log(2)-1/2
    else:
        i=1/2
        j=np.log(2)-1/2
        for k in range(2,n+1):
            i,j=j, 1/(k-1)-2*j-i
        return j
```

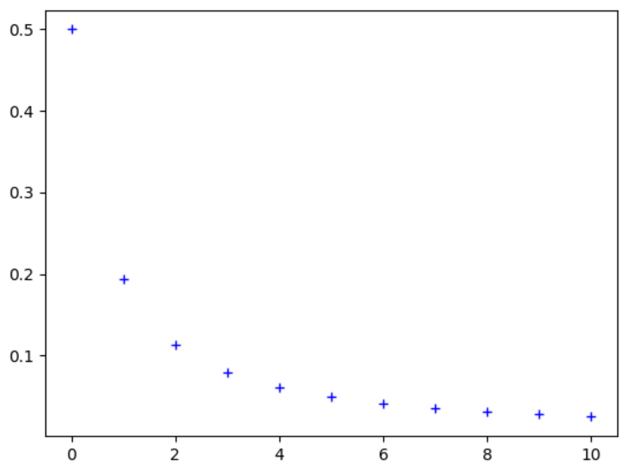
Petite remarque

Bien entendu, Émile préfère les fonctions récursives, qui sont toutefois plus gourmandes en calculs !

5.b. On considère le programme suivant :

```python
1 Labs = ...............
2 Lord = ...............
3 plt.plot(Labs,Lord,'b+')
4 plt.show()
```

Recopier et compléter les lignes de ce programme, de sorte que son exécution permette d'obtenir le graphique suivant, sur lequel les termes d'indices 0 à 10 de la suite (I_n) sont représentés.



`L1 : Labs=range(0,11)`
`L2 : Lord=[I(n) for n in abs]`

5.c. On considère la fonction **Python** suivante, dans laquelle on utilise la fonction créée à la question 5(a).

```python
def seuil(p):
    n=0
    while I(n)>p:
        n=n+1
    return n
```

Que faudrait-il démontrer sur la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour avoir la garantie que le programme s'arrête pour toute valeur strictement positive de p ?

Le programme permet d'obtenir le premier rang à partir duquel u_n devient inférieur ou égale à p ; par conséquent, le programme s'arrête si I_n devient inférieur ou égal à p à un certain moment...

Conclusion : pour s'assurer que la boucle `while` s'arrête pour chaque valeur strictement positive de p, il faudrait démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

➟Réflexe !

Pour encadrer une intégrale, on commence par encadrer l'intégrande...

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - Soit $x \in [0;1]$. On a :
  $$1+x \geq 1$$
  D'où, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$:
  $$(1+x)^2 \geq 1$$
  Et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:
  $$\frac{1}{(1+x)^2} \leq 1$$
  Puis, du fait que $x^n \geq 0$:
  $$\frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$$

Or, $x^n \geq 0$ et $(1+x)^2 > 0$, d'où :

$$0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$$

◇ On a ainsi établi :

$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$$

Par croissance de l'intégrale, licite car $1 > 0$ (les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0;1]$) :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \, dx$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

- On a :
  ◇ d'après ce qui vient d'être démontré : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$
  ◇ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

Conclusion : par théorème d'encadrement, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

> ☞ **Rappel...**
> La conclusion du théorème d'encadrement est "(I_n) converge et sa limite est 0"; il n'est donc pas nécessaire de mentionner le théorème de convergence monotone (ça démontre un manque de recul, et plus généralement, le théorème d'encadrement permet justement parfois de conclure alors que la suite n'est pas monotone !).

7. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \quad ; \quad J_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons : $\left| \begin{array}{l} u : x \longmapsto x^n \\ v : x \longmapsto \dfrac{-1}{1+x} \end{array} \right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$: $\left| \begin{array}{l} u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} \end{array} \right.$.

> ✓ **Rigueur !**
> Ne pas oublier la seule hypothèse pour l'IPP : les fonctions doivent être de classe $\mathscr{C}^1$ sur le **segment** d'intégration.

Par intégration par parties, on a alors :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[x^n \times \frac{-1}{1+x} \right]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1} \times \frac{-1}{1+x} dx \\ &= \frac{-1}{2} + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx \\ &= nJ_{n-1} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

8. 8.a. Calculer J_0 puis exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} + J_n$ en fonction de n.

- $$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \big[\ln(1+x) \big]_0^1 \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} J_{n+1} + J_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x} dx \quad \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 x^n \, dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N},\ J_{n+1} + J_n = \dfrac{1}{n+1}$.

8.b. En déduire J_1.

D'après la question précédente :

$$J_1 + J_0 = 1$$

or $J_0 = \ln(2)$...

Conclusion : $J_1 = 1 - \ln(2)$.

9. Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:

On a

$$\begin{aligned} (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) &= (-1)^1 \left(\ln(2) - \frac{(-1)^0}{1} \right) \\ &= -(\ln(2) - 1) \\ &= 1 - \ln(2) \\ &= J_1 \end{aligned}$$

l'initialisation vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $J_n = J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$ et montrons que $J_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

  On a, d'après la question **8.a.** :

$$\begin{aligned}
J_{n+1} &= -J_n + \frac{1}{n+1} && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= -(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{1}{n+1}\\
&= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{1}{n+1} && (-1)^{n+1} \times (-1)^{n+1} = (-1)^{2n+2} = 1\\
&= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\\
&= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n}}{n+1}\right)\right)\\
&= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)
\end{aligned}$$

- **Conclusion :** $\forall n \in N^*, \quad J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

10. **10.a.** Utiliser les résultats des questions **6.** et **7.** pour justifier que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

De la question **7.**, on déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \dfrac{I_{n+1} + \frac{1}{2}}{n+1}$.
Et d'après la question **6.** : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
Ainsi, par opération, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

Conclusion : la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Petite remarque
On peut également justifier de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_{n-1} = 0$, puis conclure.

10.b. En déduire la convergence de la série $\sum_{k\geq1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ puis donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

D'après ce qui précède et le résultat de la question **9.** :

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = 0$$

D'où, par continuité de la fonction valeur absolue en 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right| = 0$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\left|(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right| &= \left|(-1)^n\right| \left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|\\
&= \left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 0$$

☞ Rappel...
$\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0 \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$... Mais l'implication $\boxed{\Longrightarrow}$ est fausse si la limite est autre que 0...

Et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

Conclusion : la série $\sum_{k\geq1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

10.c. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nJ_n = \dfrac{1}{2}$.

On a, d'après la question **7.**, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
nJ_n &= \frac{n(I_{n+1} + \frac{1}{2})}{n+1}\\
&= \frac{n}{n+1}\left(I_{n+1} + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Or :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

D'où, par opération :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\left(I_{n+1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} nJ_n = \frac{1}{2}$.

☞ **Pour info...**

On en déduit : $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

★★★★★★★

Exercice 6 - Ecricome E

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \longmapsto (1-x)^n e^{-2x}$ ainsi que l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

Le but de l'exercice est de montrer l'existence de trois réels a, b, c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)$$

où $\varepsilon(n)$ est une expression dépendant de n telle que $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien défini et donner son signe.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - La fonction f_n est continue sur le segment $[0;1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 f_n(x)dx$ est bien définie.
   - On a : $\forall x \in [0;1],\ f_n(x) \geq 0$.
     D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $1 > 0$: $I_n \geq 0$.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien défini et $I_n \geq 0$.

2. Calculer I_0.

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 f_0(x)dx \\ &= \int_0^1 e^{-2x}dx \\ &= \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_0^1 \\ &= \frac{-e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1-e^{-2}}{2} \end{aligned}$$

➟Réflexe !
On vérifie la cohérence du signe...

3. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x)dx - \int_0^1 f_n(x)dx \quad \text{linéarité de l'intégale} \\ &= \int_0^1 f_{n+1}(x) - f_n(x)dx \\ &= \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}(1-x-1)dx \\ &= \int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x}dx \end{aligned}$$

   Or, pour tout $x \in [0;1]$:

$$-x \leq 0 \quad ; \quad (1-x)^n \geq 0 \quad ; \quad e^{-2x} > 0$$

   D'où, pas croissance de l'intégrale, licite car $1 > 0$, on obtient :

$$\int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x}dx \leq 0$$

   Autrement dit :

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

   Conclusion : la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Que peut-on en déduire ?
   D'après les questions précédentes, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.

   Conclusion : d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - Soit $x \in [0;1]$. On a :

$$0 \leq e^{-2x} \leq 1$$

     D'où, puisque $(1-x)^n \geq 0$:

$$0 \leq e^{-2x}(1-x)^n \leq (1-x)^n$$

   - On a ainsi établi :

$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leq f_n(x) \leq (1-x)^n$$

     Et par croissance de l'intégrale, licite car $1 > 0$, on obtient :

$$I_n \leq \int_0^1 (1-x)^n dx$$

   Or :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x)^n dx &= \left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

➟Réflexe !
Pour encadrer une intégrale, on commence par encadrer l'intégrande...

Petite remarque
On peut également effectuer le changement de variable $t = 1-x$ pour se rendre compte que $\int_0^1 (1-x)^n dx = \int_0^1 t^n dt$...

6. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a :

- d'après les questions **1.** et **5** : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

7. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a : $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x}\, dx$.
Posons : $\left| \begin{array}{l} u : x \longmapsto (1-x)^{n+1} \\ v : x \longmapsto \dfrac{-1}{2} e^{-2x} \end{array}\right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$: $\left| \begin{array}{l} u'(x) = -(n+1)(1-x)^n \\ v'(x) = e^{-2x} \end{array}\right.$.
Par intégration par parties, on a alors :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{-1}{2}(1-x)^{n+1} e^{-2x}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n \frac{-1}{2} e^{-2x}\, dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} I_n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.

8. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.
D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1} = 1 - nI_n - I_n$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ nI_n = 1 - 2I_{n+1} - I_n$$

Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$ également.
Et ainsi, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$.

9. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(n(nI_n - 1)\big)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On reprend ce qui a été obtenu dans la question précédente :

$$nI_n = 1 - 2I_{n+1} - I_n$$

Et donc :

$$nI_n - 1 = -2I_{n+1} - I_n$$

Ce qui donne :

$$n(nI_n - 1) = -2nI_{n+1} - nI_n$$

Or :

$$\begin{aligned} -2nI_{n+1} &= -2(n+1-1)I_{n+1} \\ &= -2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1} \end{aligned}$$

D'où :

$$n(nI_n - 1) = -2(n+1)I_{n+1} + 2I_{n+1} - nI_n$$

On passe ensuite à la limite, en utilisant le résultat de la question précédente !

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(nI_n - 1) = -3$.

✘ Attention !
$\lim\limits_{N\to+\infty} NI_N = 1$; mais *a priori*, $\lim\limits_{N\to+\infty} NI_{N+1} \neq \lim\limits_{N\to+\infty} NI_N$...
Attention quand on compose des limites !
Dans le même genre, on sait que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} \neq 1$ (même si $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$)...

10. Donner alors les valeurs de a, b, c.
D'après la question précédente, il existe donc une fonction e telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} e(n) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(nI_n - 1) = -3 + e(n)$.
Ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{e(n)}{n^2}$$

On reconnaît alors la forme donnée dans l'énoncé, avec $\varepsilon(n) = e(n)$.

Conclusion : $a = 0$, $b = 1$ et $c = -3$.

☞ Pour info...
On dit que l'on a obtenu un développement asymptotique de (I_n).

★★★★★★★

Exercice 7 - EDHEC 2022 E

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}dx$.

1. Calculer u_1.

   On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx \\ &= \int_0^1 1-\frac{1}{x+1}dx \\ &= \left[x-\ln(|x+1|)\right]_0^1 \\ &= 1-\ln(2) \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $[0;1]$ par : $\forall x \in [0;1],\ f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0;1]$.

   La fonction f_n est un quotient de deux fonctions dérivables sur $[0;1]$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$ (car $n>0$). Par conséquent, f_n est dérivable sur $[0;1]$ et, pour tout $x \in [0;1]$:

$$f_n'(x) = \frac{n}{(x+n)^2}$$

   D'où :

x	0	1
$f_n'(x)$	$+$	
f_n	$0 \nearrow$	$\dfrac{1}{n+1}$

3. **3.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   - D'après le tableau de la question précédente, on a :

$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$$

     D'où, puisque $n>0$:

$$\forall x \in [0;1],\ 0 \leq \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

     D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $1 \geq 0$ (les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0;1]$) :

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)}dx$$

     Autrement dit :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

   - Or $n(n+1) = n^2+n$, et comme $n>0$, on a :

$$n(n+1) \geq n^2$$

     Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

   Par transitivité :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$$

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.

➠Réflexe !
L'encadrement d'une intégrale vient toujours d'un encadrement de l'intégrande… Et avant de se lancer dans l'inconnu, on regarde sur les questions précédentes peuvent nous aider !

   3.b. En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$. *On note* $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

   On sait que :

   - $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$,
   - la série $\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (exposant $\alpha = 2 > 1$).

   Conclusion : par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ est convergente.

✍ Rédaction
ON NE SOMME PAS ! Le critère consiste à comparer les termes généraux.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

   4.a. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq \gamma$.

   - D'après la question précédente, la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ est convergente de somme égale à γ ; autrement dit, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ.

Pourquoi ?
On pense à procéder ainsi, puisque γ est la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$…

- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= u_{n+1} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

question **3.a.**

Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Par conséquent, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers γ.

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par γ.
Autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq \gamma$.

> ☞ **Rappel...**
> Une suite croissante qui converge vers ℓ est majorée par ℓ.
> Une suite décroissante qui converge vers ℓ est minorée par ℓ (chapitre 10, exercice 1).

4.b. Déterminer les deux réels a, b tels que pour tout $x \in [0;1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{x+k}$.

On remarque que :

$$\forall x \in [0;1],\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{x}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}$$

> ♡ **Astuce du chef !** ♡
> En fait, on l'a fait dans le cas où $k = 1$ à la question 1....
> Et comme les réels a et b sont indépendants de k (d'après la formulation de la question)...
> Vous voyez où je veux en venir...

Conclusion : $a = 1$ et $b = -1$
$\forall x \in [0;1],\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{x+k}$

4.c. Établir alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \dfrac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_k &= \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)}\,dx && \text{question précédente} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}\,dx && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{k}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+k}\,dx \\ &= \frac{1}{k} - \left[\ln(|x+k|)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \dfrac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$.

4.d. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k && \text{question précédente} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) && \text{linéarité de la somme} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) && \text{télescopage} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(1) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

5.a. Justifier que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n+1) \\ &= S_n + \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= S_n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= S_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Or :

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \gamma$,
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et ln est continue en 1, donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$.

Conclusion : $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers γ.

5.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$. En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par décroissance de la fonction inverse sur $[n; n+1]$ (car $[n; n+1] \subset \mathbb{R}_*^+$), on a :
$$\forall x \in [n; n+1],\ \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$
Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $n+1 \geq n$:
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n}dx$$
Autrement dit :
$$\frac{n+1-1}{n+1} \leq \big[\ln(|x|)\big]_n^{n+1} \leq \frac{n+1-1}{n}$$
D'où :
$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}$.

Petite remarque
Il est également possible de démontrer ce résultat en utilisant l'IAF appliquée à la fonction ln sur le segment $[n; n+1]$...

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln(n) && \text{télescopage} \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) && \text{résultat précédent} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

6. Donner finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n.
Puisque $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers γ, elle est minorée par γ. Puis, en utilisant le résultat de la question **4.a.**, on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq \gamma \leq T_n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leq \gamma \leq T_n$.

7. On considère la fonction `Python` définie ci-dessous :

```python
import numpy as np
def gamma(p):
    n=1
    while np.log(1+1/n)>p:
        n=n+1
    L=[1/k for k in range(1,n+1)]
    S=sum(L)-np.log(n+1)
    T=sum(L)-np.log(n)
    return S,T
```

L'exécution de la commande `gamma(10**(-3))` renvoie : `(0.5767160812351229, 0.5777155815682065)`.
Interpréter ce résultat en justifiant soigneusement la réponse.
Le résultat de la question **4.d.** et la définition de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nous permettent d'affirmer que la fonction renvoie, pour un certain n, les valeurs S_n et T_n.
Par conséquent, d'après le résultat de la question **6.**, la fonction renvoie un encadrement de γ.
Ensuite, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned} T_n - S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \ln(n+1) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$
La fonction renvoie donc les valeurs de S_n et T_n dès que $T_n - S_n$ devient inférieur ou égal à p.
Par conséquent : la fonction renvoie un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à p.

Conclusion : `(0.5767160812351229, 0.5777155815682065)` est un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3}.

Petite remarque
On pourrait aussi dire que 0,5767160812351229 est une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de γ et 0,5777155815682065 en est une valeur approchée par excès.

★★★★★★★

Exercice 8 - Inspiré d'exercices de concours

On considère la fonction $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Partie A. Étude de f.

1. Étudier la parité de f.
   $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$ et $f(-1) = -\mathrm{e}^{1}$.
   Par conséquent :
   - $f(-1) \neq f(1)$: f n'est pas paire ;
   - $f(-1) \neq -f(1)$: f n'est pas impaire.

   Conclusion : f n'est ni paire ni impaire.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}_f$.
   - En $-\infty$:
     $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x} = 0, \text{ donc par composition : } \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-1/x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty\end{array}\right\} \text{ ainsi, par opérations : } \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$
   - En 0, à gauche :
     $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{-1}{x} = +\infty \\ \text{par croissance comparée : } \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{-X} = -\infty\end{array}\right\} \text{ ainsi, par composition : } \boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} x\mathrm{e}^{-1/x} = -\infty}$$
   - En 0, à droite :
     $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{-1}{x} = -\infty, \text{ donc par composition : } \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \mathrm{e}^{-1/x} = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x = 0^+\end{array}\right\} \text{ ainsi, par opérations : } \boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = 0}$$
   - En $+\infty$:
     $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0, \text{ donc par composition : } \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-1/x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\} \text{ ainsi, par opérations : } \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

   Conclusion : $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote "verticale" d'équation $x = 0$, en 0 à gauche.

3. **3.a.** Rappeler $\lim\limits_{X\to0} \dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{X}$.
   $\lim\limits_{X\to0} \dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{X} = 1$.

   3.b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x)$
   - En $+\infty$:
     Soit x suffisamment proche de $+\infty$. On a :
     $$f(x) - x = x\mathrm{e}^{-1/x} - x = x\left(\mathrm{e}^{-1/x} - 1\right)$$
     Posons $X = \dfrac{-1}{x}$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} X = 0^-$. D'où :
     $$\lim_{x\to+\infty} x\left(\mathrm{e}^{-1/x} - 1\right) = \lim_{\substack{X\to0\\X<0}} -\frac{\mathrm{e}^X - 1}{X} = -1$$

     Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - x\big) = -1$.
   - En $-\infty$:
     On procède de la même façon, pour obtenir le même résultat.

     Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(f(x) - x\big) = -1$.

   3.c. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une droite asymptote aux voisinages de $\pm\infty$.
   De la question précédente, on déduit :
   $$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (x-1)\big) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (x-1)\big) = 0$$

   Conclusion : la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe de f aux voisinages de $\pm\infty$.

4. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}^*$.
   Posons $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \dfrac{-1}{x}$ de sorte que $f = u \times \exp\circ v$.
   v est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc $\exp\circ v$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, f, étant un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, est également dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-1/x} + x \times \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x} \\ &= \mathrm{e}^{-1/x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \mathrm{e}^{-1/x}\frac{x+1}{x} \end{aligned}$$

On obtient ainsi directement :

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ ‖	$+$
variations de f	$-\infty$ ↗ $-e$ ↘ $-\infty$ ‖	0 ↗ $+\infty$

➠Réflexe !
On vérifie la cohérence du tableau...

5. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)$.

Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1+\frac{1}{x}}{e^{1/x}} \end{aligned}$$

Or : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \text{par croissance comparée : } \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1+X}{e^X} = 0 \end{array}\right\}$ ainsi, par composition : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{e^{1/x}} = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 0$.

Interprétation
Graphiquement, la courbe de f admet en quelque sorte une demi-tangente horizontale en 0, à droite (en quelque sorte, car f n'est pas définie en 0...

6. 6.a. Établir : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 1$.

On a : $f' : x \longmapsto e^{-1/x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; ainsi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x^2}e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}e^{-1/x} \\ &= e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{e^{-1/x}}{x^3} \end{aligned}$$

On en déduit :

x	$-\infty$ $\quad$ 0	$+\infty$
signe de $f''(x)$	$-$ ‖	$+$
variations de f'	1 ↘ ... ‖	0 ↗ 1

Petite remarque
La limite en 0 à gauche n'est pas utile pour conclure... Tout comme celle en 0 à droite, mais on l'avait déjà obtenue à la question 5.

Détaillons les limites apparentes dans ce tableau de variations :

- En $-\infty$:
  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x} = 0, \text{ donc par composition : } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-1/x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\}$ ainsi, par opérations : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$
- En $-\infty$:
  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0, \text{ donc par composition : } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-1/x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\}$ ainsi, par opérations : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

Ce tableau de variations permet bien d'obtenir le résultat voulu.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 1$.

6.b. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x - 1$.

Pour cela, posons $g : x \longmapsto f(x) - (x-1)$ et étudions son signe.
Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, g l'est également et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = f'(x) - 1$$

D'après la question précédente, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) < 0$$

Et comme la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ aux voisinages de $\pm\infty$, on a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$$

D'où :

x	$-\infty$ $\quad$ 0	$+\infty$
signe de $g'(x)$	$-$ ‖	$-$
variations de g	0 ↘ ... ‖	... ↘ 0

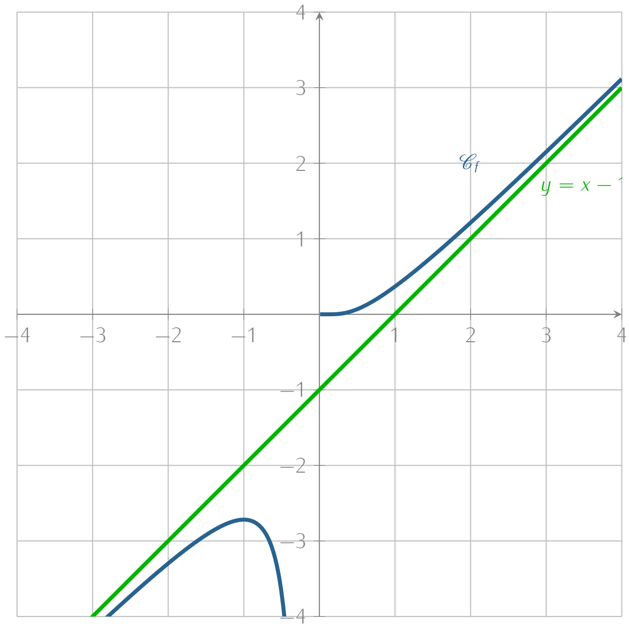
Petite remarque
Là encore, les limites de g en 0 à gauche et droite ne sont pas nécessaires ; mais puisqu'on a celles de f, on aurait facilement : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 1$.

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty;0[,\ g(x) < 0 \quad ; \quad \forall x \in]0;+\infty[,\ g(x) > 0$$

Conclusion : $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y = x - 1$ sur $]0;+\infty[$;
$\mathscr{C}_f$ est au-dessous de la droite d'équation $y = x - 1$ sur $]-\infty;0[$;
$\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x - 1$ n'ont aucun point d'intersection.

7. Représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi. *On veillera à faire figurer toutes les informations établies précédemment permettant d'obtenir la courbe la plus précise possible.*



Petite remarque

Sont visibles :
- Tangente horizontale en $x = -1$.
- "demi-tangente horizontale" en $x = 0$, à droite.
- Asymptote en $x = 0$, à gauche.
- Asymptote en $\pm\infty$.

Partie B. Étude d'une suite.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

8. Écrire une fonction **Python**, nommée u, qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n en sortie.

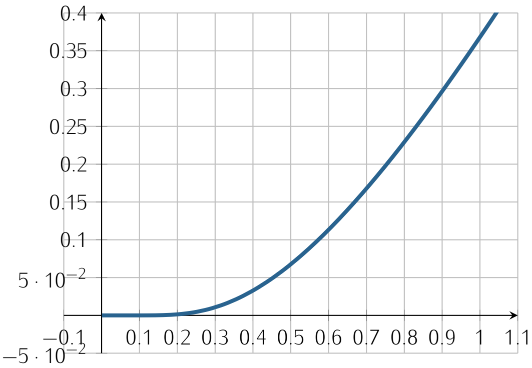
```
import numpy as np

def u(n):
    U=1
    for k in range(1,n+1):
        U=U*np.exp(-1/U)
    return U
```

Pour info...

`u(3)` renvoie environ 3×10^{-20}...

9. Représenter les premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le graphique ci-dessous, sur lequel la courbe de la fonction f est représentée. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?



On conjecture que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de limite nulle.

Attention !

Les unités...

10. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in]0;1]$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  u_0 existe et $u_0 = 1 \in]0;1]$. L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons "u_n existe et $u_n \in]0;1]$" et montrons "u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in]0;1]$".
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$; donc $f(u_n)$ existe puisque f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Autrement dit : u_{n+1} existe.
  - Également : $u_{n+1} = u_n e^{-1/u_n}$; et comme, par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$, on a aussi $u_{n+1} > 0$.
  - Enfin, par hypothèse de récurrence :
    $$0 < u_n \leq 1$$
    Puis, par croissance de f est $\mathbb{R}_*^+$, on a :
    $$f(u_n) \leq f(1)$$
    C'est à dire :
    $$u_{n+1} \leq e^{-1}$$
    Puisque $e^{-1} \leq 1$, on obtient (par transitivité) :
    $$u_{n+1} \leq 1$$

Attention !

$f(0)$ n'existe pas !
On écrit $0 < u_n \leq 1$ pour rappeler que l'on utilise les variations de f sur $\mathbb{R}_*^+$ (et même $]0;1]$) seulement.

Finalement : "u_{n+1} existe et $u_{n+1} \in]0;1]$". L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in]0;1]$.

11. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left(e^{-1/u_n} - 1\right)$$

Or, d'après la question précédente $u_n > 0$. On a ainsi :

$$-\frac{1}{u_n} < 0$$

Et par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$e^{-1/u_n} < 1$$

Par conséquent :

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

Conclusion : la suite (u_n) est strictement décroissante.

12. **12.a.** Établir : $\forall x \in]0;1],\ f(x) \leq \frac{1}{e}x$.

Pour changer un peu, raisonnons pas équivalence pour transformer le résultat à établir...

Soit $x \in]0;1]$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) \leq \frac{1}{e}x &\iff xe^{-1/x} \leq \frac{1}{e}x && \text{car } x>0 \\ &\iff e^{-1/x} \leq \frac{1}{e} \\ &\iff e^{-1/x} \leq e^{-1} && \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff -\frac{1}{x} \leq -1 \\ &\iff \frac{1}{x} \geq 1 \end{aligned}$$

Or $x \in]0;1]$, donc la dernière inégalité est vraie (décroissance de la fonction inverse sur $]0;1]$) ; par équivalence, l'inégalité initiale est ainsi également vraie.

> **Petite remarque**
> On aurait aussi pu travailler sur $f(x) - \frac{1}{e}x$; mais il est important de rédiger de cette façon parfois, afin que vous compreniez bien quand et comment le faire.

Conclusion : $\forall x \in]0;1],\ f(x) \leq \frac{1}{e}x$.

12.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 = 1$ et $\left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1$; par conséquent, $u_0 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^0$. L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$ et montrons que $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$$
  D'où, puisque $\frac{1}{e} > 0$:
  $$\frac{1}{e}u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$
  Mais $u_n \in]0;1]$ d'après la question 3, donc, d'après la question précédente :
  $$f(u_n) \leq \frac{1}{e}u_n$$
  Par transitivité, on a ainsi :
  $$f(u_n) \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$
  Autrement dit :
  $$u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$
  L'hérédité est établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

12.c. Conclure sur l'existence et la valeur de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$, car $\frac{1}{e} \in]-1;1[$.

Conclusion : par théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

12.d. Résoudre l'inéquation $\left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-20}$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$, puis interpréter le résultat obtenu. *Donnée :* $20\ln(10) \simeq 46,05$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-20} &\iff n\ln\left(\frac{1}{e}\right) \leq -20\ln(10) \quad \text{par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+\\ &\iff -n \leq -20\ln(10)\\ &\iff n \geq 20\ln(10)\end{aligned}$$

Conclusion : $\left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-20}$ lorsque $n \geq 20\ln(10)$.

Petite remarque
On peut aussi dire "lorsque $n \geq \lfloor 20\ln(10)\rfloor + 1$".

- Interprétation :

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Ainsi, d'après ce qui précède (et par transitivité) :

$$\forall n \geq 20\ln(10),\ \ u_n \leq 10^{-20}$$

Conclusion : on peut affirmer que pour tout $n \geq 45$, $u_n \leq 10^{-20}$.

12.e. Le programme suivant (dans lequel **u** est la fonction **Python** définie à la question 1 de la partie B) affiche la valeur 4. Interpréter cette valeur et la comparer avec celle obtenue à la question précédente.

```
n=0
while u(n)>10**(-20):
    n=n+1
print(n)
```

On peut déjà dire que le programme s'arrêtera forcément, puisque (u_n) converge vers 0. Il existe donc un rang à partir duquel u_n est toujours inférieur ou égal à 10^{-20}.
Ici, 4 est d'ailleurs le premier rang à partir duquel c'est vrai.
Comparaison avec la valeur précédente : il est naturel de trouver une valeur inférieure à la question précédente ; puisque dans la question précédente, nous avions utilisé une majoration de u_n (établie à la question 5(b)) pour obtenir cette information.

☞ Pour info...
On peut cependant s'interroger sur l'écart important entre le résultat obtenu par majoration et le résultat réel...
En fait, la suite (u_n) converge très vite vers 0. En effet, au 4ème terme, l'écart avec 0 est déjà inférieur à 10^{-20}. Cela est dû au fait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 0$. On dit que le point fixe 0 (car on peut prolonger f par continuité à droite en 0 en posant $f(0) = 0$) est ici **super attractif**.

13. Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

13.a. Étudier les variations de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k\\ &= u_{n+1}\end{aligned}$$

Or $u_{n+1} > 0$...

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

13.b. A l'aide du résultat établi à la question 12.b. démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On avait obtenu, à la question 12.b. :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \leq (\mathrm{e}^{-1})^k$$

D'où, en sommant sur $[\![0;n]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{-1})^n$$

➟Réflexe !
Pour majorer une somme, on majore son terme général...

Or $\mathrm{e}^{-1} \neq 1$, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{-1})^n &= \frac{1-\mathrm{e}^{-n-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}}\\ &= \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}-1}\\ &= \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}-1}\end{aligned}$$

✘ Attention !
la quantité $\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}-1}$ ne peut pas être un majorant de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puisqu'elle dépend de n...

Or $\frac{\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}-1} > 0$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{-1})^n \leq \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$).

13.c. Que peut-on en déduire ?
Étant croissante et majorée, le théorème de convergence monotone permet d'obtenir que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

✘ Attention !
$\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$ est un majorant de (S_n), mais n'est pas sa limite ! Il est d'ailleurs très probable qu'il nous soit impossible de déterminer explicitement sa limite...

★★★★★★★

Exercice 9 - EML 2023 E

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

On considère également la suit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **1.a.** Dresser le tableau de variations complet de f.

- f est le quotient de deux fonctions usuelles dérivables sur $]0;+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$; par conséquent, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

- Limites :
Par opérations, on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

- D'où :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$
f	|| $+\infty$ ↘	0

1.b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

Démontrons par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
u_0 existe et $u_0 > 0$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que "u_n existe et $u_n > 0$" et montrons que "u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$".
  - ◇ Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$, donc $f(u_n)$ existe. Autrement dit, u_{n+1} existe.
  - ◇ Et, on a aussi : $u_{n+1} > 0$, comme quotient de deux réels strictement positifs.

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.
Autrement dit, chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. **2.a.** Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout réel strictement positif a, l'appel de `CB_1(a)` renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n > a$.

```python
import numpy as np

def CB_1(a):
    u=1
    n=0
    while u<a:
        u=np.exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

2.b. On admet que l'on a également défini une fonction **Python** tel que, pour tout réel strictement positif a, l'appel de `CB_2(a)` renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n < a$.
Les appels `CB_1(10**6)` et `CB_2(10**(-6))` renvoient respectivement 6 et 5.
Qu'en déduire sur u_5 et u_6 ? Commenter le résultat en une ligne.

- On en déduit que $u_5 < 10^{-6}$ et $u_6 > 10^6$.
- L'écart entre u_5 et u_6 est considérable... la suite $(u_n)_{n_in\mathbb{N}}$ serait-elle divergente ?

3. On définit maintenant la fonction g sur $[0;+\infty[$ par : $\forall x \in [0;+\infty[$, $g(x) = e^{-x} - x^2$.

3.a. Démontrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans $]-\infty;1]$.

- La fonction carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc la fonction $x \longmapsto -x^2$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
La fonction g est donc la somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $[0;+\infty[$. Par conséquent : g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
- Ensuite :

$$g(0) = 1$$

et, par opérations :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

- Pour finir :
  - ◇ g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$,
  - ◇ g est continue sur $[0;+\infty[$, comme somme de telles fonctions.

Ainsi, par théorème de bijection, g est bijective de $[0;+\infty[$ dans $g([0;+\infty[) =]-\infty;1]$.

Conclusion : g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans $]-\infty;1]$.

3.b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $]0;+\infty[$, que l'on notera α.

Commençons par remarquer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{e^{-x}}{x} - x = 0 \\ &\iff \frac{e^{-x} - x^2}{x} = 0 \\ &\iff e^{-x} - x^2 = 0 \quad \text{car } x \neq 0 \\ &\iff g(x) = 0 \end{aligned}$$

Or, puisque g est bijective de $[0;+\infty[$ dans $]-\infty;1]$ et que $0 \in]-\infty;1]$, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $[0;+\infty[$, notée α.

Mais, comme $g(0) \neq 0$, on a même $\alpha \in]0;+\infty[$.

Conclusion : l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $]0;+\infty[$, que l'on notera α.

3.c. Justifier : $e^{-1} < \alpha < 1$.

On a :

- $g(1) = e^{-1} - 1$.
  Or $-1 < 0$, et donc, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$:
  $$e^{-1} < 1$$
  Ainsi :
  $$g(1) < 0$$
- $g(e^{-1}) = e^{-e^{-1}} - e^{-2}$.
  Or : $e^{-1} < 1 < 2$, d'où :
  $$-e^{-1} > -2$$
  Et, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$:
  $$e^{-e^{-1}} > e^{-2}$$
  Ainsi :
  $$g(e^{-1}) > 0$$

Par conséquent :

$$g(e^{-1}) > g(\alpha) > g(1)$$

Et donc, par stricte décroissance de g sur $[0;+\infty[$:

$$e^{-1} < \alpha < 1$$

Conclusion : $e^{-1} < \alpha < 1$.

Petite remarque
On peut également raisonner par équivalences en partant de $g(e^{-1}) > 0$ pour arriver à une "trivialité".

4. **4.a.** Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.

On sait que $u_0 = 1$ et ainsi, $u_1 = e^{-1}$ puis :

$$u_2 = \frac{e^{-e^{-1}}}{e^{-1}} = e^{1-e^{-1}}$$

Or : $e^{-1} < 1$, donc :

$$1 - e^{-1} > 0$$

Et, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$:

$$e^{1-e^{-1}} > 1$$

Autrement dit :

$$u_2 > u_0$$

Conclusion : $u_2 > u_0$.

4.b. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Démontrons, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} < u_{2n+2}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  Fait dans la question précédente.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{2n} < u_{2n+2}$ et montrons que $u_{2n+2} < u_{2n+4}$.
  D'après l'hypothèse de récurrence, on a :
  $$u_{2n} < u_{2n+2}$$
  Puis, en appliquant f, strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs) :
  $$f(u_{2n}) > f(u_{2n+2})$$
  Autrement dit :
  $$u_{2n+1} > u_{2n+3}$$
  Puis, en appliquant à nouveau f, toujours strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$, on obtient finalement :
  $$u_{2n+2} < u_{2n+4}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} < u_{2n+2}$.
Autrement dit : la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

☞ Pour info...
On peut aller un peu plus vite en appliquant directement $f \circ f$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$...
Au passage, puisque l'intervalle $]0;+\infty[$ est stable par f, la fonction $f \circ f$ est bien également définie sur $]0;+\infty[$.

4.c. Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante puis qu'elle converge vers un réel ℓ appartenant à $[0;e^{-1}]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  D'après la question précédente :
  $$u_{2n} < u_{2n+2}$$
  D'où, en appliquant f, strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, on obtient :
  $$u_{2n+1} > u_{2n+3}$$
  Conclusion : la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

- Or, d'après la question **1.b.**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 ; c'est donc également le cas de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
  Conclusion : par théorème de convergence monotone, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.
  Et comme $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a $\ell \leq u_1$.

> **Conclusion :** la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et converge vers un réel ℓ appartenant à $[0; e^{-1}]$.

5. Pour $x \in]0; +\infty[$, on pose $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.

5.a. Justifier que la fonction h est continue sur $[0; +\infty[$.

- La fonction f est continue sur $]0; +\infty[$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$; ainsi, par composition, la fonction h est continue sur $]0; +\infty[$.
- Ensuite :
  - ◇ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$
  - ◇ $\lim\limits_{X\to+\infty} f(X) = 0$

  D'où, par composition :
  $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f \circ f(x) = 0$$
  Ainsi :
  $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = h(0)$$
  La fonction h est donc continue en 0.

> **Conclusion :** la fonction h est continue sur $[0; +\infty[$.

5.b. Déterminer, pour tout $x \in]0; +\infty[$, une expression de $h(x)$ en fonction de $g(x)$.

Soit $x \in]0; +\infty[$. On a :
$$\begin{aligned} h(x) &= f \circ f(x) \\ &= f\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right)}{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}} \\ &= x\exp\left(-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} + x\right) \\ &= x\exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right) \end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall x \in]0; +\infty[,\ h(x) = x\exp\left(-\dfrac{g(x)}{x}\right)$.

5.c. Résoudre alors l'équation $h(x) = x$ d'inconnue $x \in [0; +\infty[$.

- Remarquons déjà que $h(0) = 0$, donc 0 est solution de cette équation.
- Soit ensuite $x \in]0; +\infty[$. On a, en commençant par la question précédente :

$$\begin{aligned} h(x) = x &\iff x\exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right) && x \neq 0 \\ &\iff \exp\left(-\frac{g(x)}{x}\right) = 1 && \text{injectivité de exp sur } \mathbb{R} \\ &\iff -\frac{g(x)}{x} = 0 && x \neq 0 \\ &\iff g(x) = 0 && x \neq 0 \text{ et travail fait en question } \textbf{3.b.} \\ &\iff x = \alpha \end{aligned}$$

> **Conclusion :** les solutions de l'équation $h(x) = x$ sur $[0; +\infty[$ sont 0 et α.

5.d. En déduire que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 puis déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

- On sait, d'après **4.c.**, que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0; \mathrm{e}^{-1}]$.
  Or, on a :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$$
  D'où, par continuité de h en ℓ (car continue sur $[0; +\infty[$ et que $\ell \in [0; +\infty[$) et unicité de la limite :
  $$\ell = h(\ell)$$
  D'après la question précédente, on a donc :
  $$\ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = \alpha$$
  Mais on sait que $\ell \in [0; e^{-1}]$ et que (question **3.c.**) $\alpha > e^{-1}$.
  Par conséquent $\ell \neq \alpha$ et donc :
  $$\ell = 0$$

  > **Conclusion :** la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

- On a aussi :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = f(u_{2n+1})$$
  Or :
  - ◇ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$
  - ◇ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

Donc, par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_{2n+1}) = +\infty$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+2} = +\infty$$

Conclusion : la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

6. Qu'en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

D'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$$

Conclusion : par propriété de recouvrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sans avoir de limite.

★★★★★★★

Exercice 10 - Inspiré d'exercices de concours

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Écrire une fonction **Python** de sorte que l'exécution de la commande **f(n,x)** renvoie la valeur de $f_n(x)$, où $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $x \in \mathbb{R}^+$.

```
def f(n,x):
    return x**n-n*x+1
```

Petite remarque Pas nécessaire de traiter les cas où $n \notin [\![2;+\infty[\![$ et $x < 0$ en fait...

Petite remarque Le n est introduit dans l'énoncé... Il n'y avait donc pas à écrire "soit $n \in [\![2;+\infty[\![$ sur les copies (j'avais oublié !).

2. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $[0;+\infty[$.
La fonction f_n est dérivable sur $[0;+\infty[$ car c'est une fonction polynômiale, et, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1} - n \\ &= n(x^{n-1} - 1) \end{aligned}$$

D'où (la limite en $+\infty$ étant obtenue en factorisant $f_n(x)$ par x^n) :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	1	$\searrow$	$2-n$	$\nearrow$	$+\infty$

3. **3.a.** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f_2(x) = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f_2(x) = 0 &\iff x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\iff (x-1)^2 = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

3.b. Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions, notées α_n et β_n, vérifiant :

$$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$$

- Sur $]0;1[$:
  - f_n est continue sur l'intervalle $]0;1[$
  - f_n est strictement décroissante sur $]0;1[$

  D'après le théorème de bijection f_n est bijective de $]0;1[$ dans $f_n(]0;1[) =]2-n;1[$.
  Or, puisque $n \geq 3$, on a $2 - n < 0$. Ainsi, $0 \in]2-n;1[$.
  Par conséquent, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $]0;1[$.
- De même sur $]1;+\infty[$.
  L'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution β_n sur $]1;+\infty[$.

Conclusion : pour tout $n \geq 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions, notées α_n et β_n, vérifiant : $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

✍ Rédaction On rédige proprement un des deux cas, mais pas l'autre !

♡ Astuce du chef ! ♡ Pour éviter d'avoir à justifier les inégalités strictes par un argument supplémentaire, on met en place le théorème de bijection sur les intervalles ouverts.

3.c. Démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $\beta_n < 2$.
Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On sait que $\beta_n > 1$, et ainsi, par stricte croissance de f_n sur $]1;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \beta_n < 2 &\iff f_n(\beta_n) < f_n(2) \\ &\iff 0 < 2^n - 2n + 1 \\ &\iff 2n - 1 < 2^n \\ &\iff 2n \leq 2^n \end{aligned}$$

Hum... Lançons-nous dans une récurrence pour démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $2^n \geq 2n$.

- **Initialisation.** Pour $n = 3$, c'est immédiat.
- **Hérédité.** Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Supposons que $2^n \geq 2n$ et montrons que $2^{n+1} \geq 2(n+1)$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$2^n \geq 2n$$
  D'où :
  $$2^{n+1} \geq 4n$$
  Mais :
  $$4n - 2(n+1) = 2n - 2 = 2(n-1) \underset{n \geq 3}{>} 0$$
  D'où $4n \geq 2(n+1)$, et par transitivité :
  $$2^{n+1} \geq 2(n+1)$$

Par conséquent :

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![, \; 2^n \geq 2n$$

Conclusion : par équivalences, on a établi que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $\beta_n < 2$.

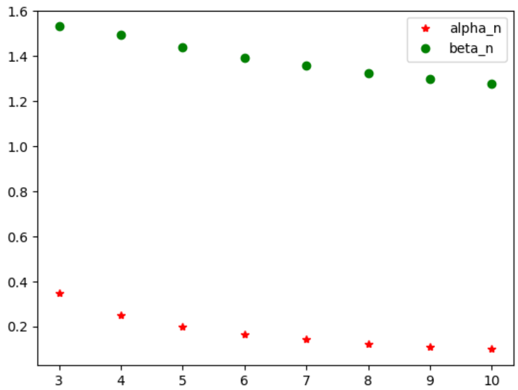
✓ Rigueur ! La phrase "par stricte croissance de f_n^{-1} sur $]1;+\infty[$" n'est pas rigoureuse. En fait, il n'y a pas qu'une bijection réciproque ici, il y en a 2.
La bijection réciproque de la restriction de f_n sur $]0;1[$ et celle de la restriction de f_n sur $]1;+\infty[$... On préfère donc l'argument sur f_n ici (qui est équivalent, et plus simple à énoncer).

4. **4.a.** Recopier et compléter les lignes 4,7,8,10,11,12 de la fonction **Python** ci-dessous (où **f** est la fonction **Python** créée à la question 1) afin qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de α_n, pour $n \in [\![3;+\infty[\![$.

```python
def alpha(n):
    a=0
    b=1
    while ......
        m=(a+b)/2
        if f(n,m)==0:
            ......
        elif ......
            b=m
        elif ......
            ......
    return ......
```

```python
def alpha(n):
    a=0
    b=1
    while b-a>10**(-5):
        m=(a+b)/2
        if f(n,m)==0:
            a,b=m,m
        elif f(n,m)*f(n,a)<0:
            b=m
        elif f(n,m)*f(n,a)>0:
            a=m
    return (a+b)/2
```

4.b. On admet que l'on a écrit une fonction **beta(n)** qui renvoie une valeur approchée de β_n (pour $n \in [\![3;+\infty[\![$) à 10^{-5} près.
Proposer un programme dont l'exécution permettrait d'obtenir le graphique ci-dessous :




```python
import matplotlib.pyplot as plt

N=range(3,11)
A=[alpha(n) for n in N]
B=[beta(n) for n in N]
plt.plot(N,A,'r*',label="alpha_n")
plt.plot(N,B,'go',label="beta_n")
plt.legend()
plt.show()
```

5. **5.a.** Justifier que la série $\sum_{n\geq 3} \beta_n$ est divergente.

D'après la question **3.**, la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1, elle ne peut pas converger vers 0. Par conséquent, $\sum_{n\geq 3} \beta_n$ diverge grossièrement.

> **✓ Rigueur !**
> A ce stade, nous ne savons pas si la suite (β_n) a une limite en $+\infty$... Il ne serait donc pas rigoureux d'écrire $\lim_{n\to+\infty} \beta_n \neq 0$...

5.b. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 3} \alpha_n$ est divergente. *Indication : on pourra chercher à la comparer à la série harmonique.*

- Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On a : $f_n(\alpha_n) = 0$, ce qui donne :
$$\alpha_n = \frac{\alpha_n^n + 1}{n}$$
Or $\alpha_n \geq 0$, donc $\dfrac{\alpha^n + 1}{n} \geq \dfrac{1}{n}$ et ainsi :
$$\alpha_n \geq \frac{1}{n}$$
- On a ainsi :

- $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \alpha_n \geq \dfrac{1}{n}$
- $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente

Conclusion : par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \alpha_n$ est divergente.

6. Étude de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$.

6.a. Démontrer que : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \forall x \in]0;1[,\ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

Soient $n \in [\![3;+\infty[\![$ et $x \in]0;1[$.
On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{n+1} - (n+1)x + 1 - (x^n - nx + 1) \\ &= x^{n+1} - x^n - x \\ &= x^n(x-1) - x \end{aligned}$$

Or, $x \in]0;1[$, donc :

$$x^n \geq 0 \ ; \ \ x - 1 \leq 0$$

Et ainsi :

$$x^{n+1} - x^n \leq 0$$

Par conséquent, puisque $x \geq 0$:

$$x^{n+1} - x^n - x \leq 0$$

Conclusion : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ \forall x \in]0;1[,\ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

6.b. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Puisque $\alpha_n \in]0;1[$ (question 3.), d'après le résultat de la question précédente, on obtient :

$$f_{n+1}(\alpha_n) \leq f_n(\alpha_n)$$

Or $f_n(\alpha_n) = 0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$. D'où

$$f_{n+1}(\alpha_n) \leq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

Et puisque f_{n+1} est strictement décroissante sur $]0;1[$, on en déduit :

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$$

Conclusion : la suite $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

> **✓ Rigueur !**
> Ne pas oublier de mentionner que $\alpha_n \in]0;1[$ pour pouvoir utiliser la question précédente !

6.c. Démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $\alpha_n \leq \dfrac{2}{n}$ puis en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$.

- Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On sait que $f_n(\alpha_n) = 0$, et, de plus :

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{2}{n}\right) &= \left(\frac{2}{n}\right)^n - n\frac{2}{n} + 1 \\ &= \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 \qquad \text{car } n \geq 3, \text{ donc } \frac{2}{n} < 1 \\ &< 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right) < f_n(\alpha_n)$$

Et comme f_n est strictement décroissante sur $]0;1[$ (on a bien $\dfrac{2}{n}$ et α_n dans $]0;1[$).
Par conséquent :

$$\frac{2}{n} > \alpha_n$$

- On a ainsi (puisque $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est minorée par 0) :

$$\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ 0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{b}$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$. Le théorème d'encadrement permet finalement de conclure...

Conclusion : la suite (α_n) converge vers 0.

> **Petite remarque**
> On pouvait aussi faire ainsi : $\alpha_n = \dfrac{\alpha_n^n + 1}{n}$.
> Or $\alpha_n \in [0;1]$, donc $\alpha_n^n \in [0;1]$ et donc $\dfrac{\alpha_n^n + 1}{n} \leq \dfrac{2}{n}$. Par conséquent : $\alpha_n \leq \dfrac{2}{n}$.
> Ce sont des arguments plus élémentaires, mais j'ai plutôt vu la méthode exposée à gauche dans les copies.

> **➠Réflexe !**
> On obtient une majoration et on veut une limite... Théorème d'encadrement ? Relisons l'énoncé à la recherche d'une minoration...

6.d. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$.

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$.

- Du fait que $f_n(\alpha_n) = 0$, on déduit $n\alpha_n = \alpha_n^n + 1$.
- Or : $\alpha_n^n = \exp\big(n\ln(\alpha_n)\big)$ et $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ converge vers 0. Ainsi, par composition et opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$$

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$.

> **☞ Pour info...**
> Pour n suffisamment grand, on a donc $n\alpha_n \simeq 1$, c'est à dire $\alpha_n \simeq \dfrac{1}{n}$.
> L'an prochain, on dira que $\dfrac{1}{n}$ **est un équivalent de α_n en $+\infty$.**

6.e. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{\alpha_n}{n}$ est-elle convergente ?

On a, d'après la question 6.c., pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$:

$$0 < \frac{\alpha_n}{n} \leq \frac{2}{n^2}$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{2}{n^2}$ est une série de Riemann convergente...

Conclusion : par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{\alpha_n}{n}$ est convergente.

7. **Convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geq 3}$.**

7.a. Établir : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![, \quad \beta_n < n^{\frac{1}{(n-1)}}$.

Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. On a :

$$\begin{aligned} f_n\left(n^{\frac{1}{(n-1)}}\right) &= n^{\frac{n}{n-1}} - n \times n^{\frac{1}{(n-1)}} + 1 \\ &= n^{\frac{n}{n-1}} - n^{1+\frac{n}{n-1}} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et comme $f_n(\beta_n) = 0$, on obtient :

$$f_n(\beta_n) < f_n\left(n^{\frac{1}{(n-1)}}\right)$$

Et par stricte croissance de f_n sur $]1;+\infty[$, on obtient :

$$\beta_n < n^{\frac{1}{(n-1)}}$$

Conclusion : $\forall n \geq 3,\ \beta_n < n^{\frac{1}{(n-1)}}$.

7.b. En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geq 3}$ converge vers 1.

- D'après ce qui précède et la question 3.b. : $\forall n \in [\![3;+\infty[\![,\ 1 < \beta_n < n^{\frac{1}{(n-1)}}$
- Or, pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$:

$$n^{\frac{1}{(n-1)}} = \exp\left(\frac{1}{n-1}\ln(n)\right)$$

Et, par croissance comparée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n-1} = 0$$

Ainsi, par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{(n-1)}} = 1$$

Petit coup de théorème d'encadrement...

Conclusion : la suite $(\beta_n)_{n\geq 3}$ converge vers 1.

★★★★★★★

Exercice 11 - EDHEC 2008 E

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$. On se propose, dans cette question, de démontrer un résultat classique sur les sommes de Riemann associées à cette fonction.

➠Réflexe !
Ca empeste l'IAF à des kilomètres...

1. Montrer : $\exists M \geq 0 \ / \ \forall (x,y) \in [0;1]^2 \ , |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$.

   - La fonction f est dérivable sur $[0;1]$, car de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$.
   - Puisque f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$, on a aussi que f' est continue sur le segment $[0;1]$. Par composition, la fonction $|f'|$ est également continue sur le segment $[0;1]$.
     Ainsi, par théorème des bornes, la fonction $|f'|$ admet un maximum sur $[0;1]$.
     En particulier :
     $$\exists M \geq 0 \ / \ \forall x \in [0;1], \ |f'(x)| \leq M$$

Petite remarque
M n'a pas besoin d'être le maximum de $|f'|$; il suffit qu'il en soit un majorant.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on obtient, pour un tel M :
$$\forall (x,y) \in [0;1]^2 \ , |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

Conclusion : $\exists M \geq 0 \ / \ \forall (x,y) \in [0;1]^2 \ , |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$.

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \ \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right)$.

★Subtile...★
En toute rigueur, l'énoncé devrait mentionner que dans la suite, on considère un tel réel M, vérifiant le résultat de la question 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Soit $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$.
On a :
$$0 \leq k < k+1 \leq n$$
Et comme $n > 0$, on obtient :
$$0 \leq \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} \leq 1$$
Par conséquent :
$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subset [0;1]$$
D'après la question précédente, en prenant $x = t$ et $y = \frac{k}{n}$, licite d'après ce qui précède, on obtient :
$$\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left|t - \frac{k}{n}\right|$$
Or $t \geq \frac{k}{n}$, donc $t - \frac{k}{n} \geq 0$, et ainsi : $\left|t - \frac{k}{n}\right| = t - \frac{k}{n}$.
On obtient finalement :
$$\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right)$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \ \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right)$.

3. Montrer alors que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \ \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{2n^2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$.

   - Commençons par remarquer que :
     $$\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$$
     Par conséquent :
     $$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dt$$

Pourquoi ?
On intègre une constante par rapport à t...

   - On a ainsi :
     $$\begin{aligned} \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt - \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dt\right| && \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) dt\right| && \text{inégalité triangulaire sur l'intégrale, licite car } \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} \\ &= \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| dt \end{aligned}$$
   - Or, d'après la question précédente :
     $$\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \ \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq M\left(t - \frac{k}{n}\right)$$
     D'où, par croissance de l'intégrale, licite car $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n}$:
     $$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| dt \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} M\left(t - \frac{k}{n}\right) dt$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}\int_{k/n}^{(k+1)/n} M\left(t-\frac{k}{n}\right)dt &= M\int_{k/n}^{(k+1)/n}\left(t-\frac{k}{n}\right)dt\\ &= M\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n}\\ &= M\frac{1}{2n^2}\end{aligned}$$

♡ **Astuce du chef !** ♡

Ici, je choisis $\longmapsto \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2$ comme primitive de $t\longmapsto t-\frac{k}{n}$ (on a bien une fonction de la forme $u'u$ à primitiver...) : c'est en fait la primitive qui rend le calcul suivant

Par transitivité, on obtient finalement :

$$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n^2}$$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n^2}$.

4. En déduire : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n^2}$$

D'où, en sommant de 0 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{2n^2}$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n}$$

- Or, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| && \text{linéarité de la somme}\\ &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| && \text{inégalité trangulaire sur la somme}\\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\end{aligned}$$

Des deux points ci-dessus, on conclut sur le résultat voulu par transitivité.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n}$.

5. Conclure finalement que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)\,dt$.

On a :

- $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq\left|\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M}{2n}=0$

Par théorème d'encadrement, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^1 f(t)\,dt-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|=0$$

☞ **Rappel...**

(u_n) CV vers 0 ssi $(|u_n|)$ CV vers 0.
C'est faux pour les autres réels que 0 (prendre $u_n=(-1)^n$ par exemple).

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)\,dt$.

★★★★★★★

II Algèbre linéaire

A maîtriser

1. **Systèmes linéaires.**

Résoudre un système linéaire.	Chapitre 4. Exercice 1.
Déterminer les coefficients d'une décomposition en éléments simples.	Chapitre 4. Exercice 7.

2. **Matrices.**

Étudier l'inversibilité d'une matrice et, si inversible, donner son inverse : • parce-qu'elle est triangulaire, • par la méthode du pivot de Gauss, • en utilisant un polynôme annulateur, • en remarquant qu'elle est *clairement non inversible* : colonne ou ligne nulle, colonne ou ligne combinaison linéaire des autres...	Chapitre 9. Exercices 3,5.
Calculer les puissances d'une matrice : • directement parce-qu'elle est diagonale, • en conjecturant une expression à démontrer par récurrence, • en la diagonalisant, • à l'aide de la formule du binôme de Newton (cas classiques : $A = aI + bN$, avec N nilpotente ; ou $A = aI + bM$, avec $M^k = b_k M$), • en se laissant guider par l'énoncé sur une autre méthode (avec des suites, avec une division euclidienne par un polynôme annulateur, en la trigonalisant...).	Chapitre 9. Exercices 9,10,11,12,13,14.

3. **Espaces vectoriels et applications linéaires.**
Une excellente connaissance du cours sur les applications linéaires permettra de faire les liens entre matrices et applications linéaires afin de dégager des méthodes efficaces.

Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un autre : • en revenant à la définition de ssev, • en montrant qu'il est le ssev engendré par une famille de vecteurs.	Chapitre 15. Exercices 1,2,5.
Montrer qu'une famille de vecteurs est libre / génératrice / une base d'un espace vectoriel.	Chapitre 15. Exercices 5,10,11.
Montrer qu'une application est linéaire.	Chapitre 20. Exercices 1,3,4,5,6,7.
Montrer qu'une application linéaire entre ev de polynômes est un endomorphisme.	Chapitre 20. Exercices 4,5,8.
Déterminer le noyau / l'image / le rang d'une application linéaire.	Chapitre 20. Exercices 3,4,5,6,7,8.
Manipuler les définitions de noyau et image d'une application linéaire.	Chapitre 20. Exercices 20,21,23.
Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme en travaillant sur $\mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id})$...	Chapitre 20. Exercice 9.

Exercice 12 - Ecricome 2008 E

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Pour tout $(i,j) \in [\![1;3]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé en i-ième ligne et j-ième colonne, qui vaut 1.

1. **Question de cours.**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie ainsi que F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1.a. Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- Puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a $F \cap G \subset E$, et E est un espace vectoriel.
- F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, donc $0_E \in F$ et $0_E \in G$. Ainsi : $0_E \in F \cap G$, et $F \cap G$ est donc non vide.
- Montrons que $F \cap G$ est stable par combinaison linéaire.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $u, v \in F \cap G$. Montrons que $au + bv \in F \cap G$.
  - ◇ Puisque $u, v \in F \cap G$, en particulier : $u, v \in F$.
  Mais F est un espace vectoriel, il est donc stable par combinaison linéaire.
  D'où :
  $$au + bv \in F$$
  - ◇ De même :
  $$au + bv \in G$$

  Par conséquent :
  $$au + bv \in F \cap G$$
  $F \cap G$ est donc stable par combinaison linéaire.

Conclusion : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

1.b. Établir : $\dim(F \cap G) \leq \min\big(\dim(F), \dim(G)\big)$.

- On sait que $F \cap G \subset F$. Et comme $F \cap G$ et F sont des espaces vectoriels, on a alors :
$$\dim(F \cap G) \leq \dim(F)$$
- De même :
$$\dim(F \cap G) \leq \dim(G)$$

Conclusion : $\dim(F \cap G) \leq \min\big(\dim(F), \dim(G)\big)$.

2. 2.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_1(A) = \big\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = X\big\}$ est un espace vectoriel et en donner une base ainsi que la dimension.

> **✓ Rigueur !**
> Pour davantage de rigueur, on peut quantifier ainsi :
> "Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe alors $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$."

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
AX = X & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 2z & = & x \\ 2x & - & y & - & 4z & = & y \\ -x & + & y & + & 3z & = & z \end{array}\right. \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 4z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} & \left\{\ x - y - 2z = 0 \right. \\
& \iff & \left\{\ x = y + 2z \right. \\
& \iff & X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

> **Petite remarque**
> On pense bien à terminer les équivalences par "$X = \ldots$", puisque X est l'inconnue ici.

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{E}_1(A) & = & \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

> **✓ Rigueur !**
> On peut rajouter l'argument "Puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}_1(A)$ est ainsi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
> Mais il n'est souvent pas exigé.

- Par conséquent, $\mathcal{E}_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.
- De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :
  - ◇ génératrice de $\mathcal{E}_1(A)$ d'après ce qui précède,
  - ◇ libre, car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

  Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{E}_1(A)$ et ainsi $\dim\big(\mathcal{E}_1(A)\big) = 2$.

2.b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_2(A) = \big\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 2X\big\}$ est un espace vectoriel et en donner une base ainsi que la dimension.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
AX = 2X & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 2z & = & 2x \\ 2x & - & y & - & 4z & = & 2y \\ -x & + & y & + & 3z & = & 2z \end{array}\right. \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & - & 4z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 3y & - & 4z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 3y & = & 4z \\ & & y & = & -2z \end{array}\right. \\
& \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -2z \end{array}\right. \\
& \iff & X = z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{E}_2(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

> **✓ Rigueur !**
> On peut rajouter l'argument "Puisque $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}_2(A)$ est ainsi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
> Mais il n'est souvent pas exigé.

- Par conséquent, $\mathcal{E}_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.
- De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :
  - ◇ génératrice de $\mathcal{E}_2(A)$ d'après ce qui précède,
  - ◇ libre, car constituée d'un unique vecteur non nul.

  Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{E}_2(A)$ et ainsi $\dim\big(\mathcal{E}_2(A)\big) = 1$.

2.c. Établir : $\mathcal{E}_1(A) \cap \mathcal{E}_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Raisonnons pas double-inclusion...

> **Petite remarque**
> L'avantage de cette méthode : elle ne dépend pas des résultats des deux questions précédentes...

$\boxed{\supset}$ Puisque $\mathcal{E}_1(A)$ et $\mathcal{E}_2(A)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a déjà :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{E}_1(A) \cap \mathcal{E}_2(A)$$

$\boxed{\subset}$ Soit $X \in \mathcal{E}_1(A) \cap \mathcal{E}_2(A)$. Ainsi :

$$AX = X \quad \text{ET} \quad AX = 2X$$

D'où :

$$2X = X$$

Et donc :

$$X = 0_{3,1}$$

Ainsi :

$$\mathcal{E}_1(A) \cap \mathcal{E}_2(A) \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Conclusion : $\mathcal{E}_1(A) \cap \mathcal{E}_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

2.d. Démontrer que la famille obtenue en concaténant les bases de $\mathcal{E}_1(A)$ et $\mathcal{E}_2(A)$ (obtenues en questions 2.a et 2.b.) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Montrons donc que la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Montrons que cette famille est libre.

  Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons $a \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a :

$$a\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & 2c & = & 0\\ -2a & + & b & & & = & 0\\ a & & & + & c & = & 0\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & 2c & = & 0\\ & - & b & - & 4c & = & 0\\ & + & b & + & 3c & = & 0\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & 2c & = & 0\\ & - & b & - & 4c & = & 0\\ & & & - & c & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0\\ b & = & 0\\ c & = & 0\end{array}\right.$$

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

- Or, $\operatorname{Card}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)=3=\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3. On considère la matrice $P=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

3.a. Justifier que la matrice P est inversible et déterminer son inverse, notée P^{-1}.

Méthode habituelle...

Conclusion : P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-2&3&4\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

3.b. Calculer la matrice $P^{-1}AP$, notée D.

...

Conclusion : $P^{-1}AP=D$, avec $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

4. On considère les ensembles $\mathcal{C}_A=\{M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ /\ AM=MA\}$ et $\mathcal{C}_D=\{N\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ /\ DN=ND\}$.

4.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_A$ est un espace vectoriel.

- Par définition, $\mathcal{C}_A\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ;
- La matrice nulle appartient à $\mathcal{C}_A$ (car $A\times 0_3=0_3\times A$), donc $\mathcal{C}_A$ est non vide.
- Montrons que $\mathcal{C}_A$ est stable par combinaison linéaire.
  Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $M,N\in\mathcal{C}_A$. Montrons que $aM+bN\in\mathcal{C}_A$.
  - ◇ $aM+bN\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, car $M,N\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ;
  - ◇ $$\begin{array}{rcll} A(aM+bN) & = & aAM+bAN & \\ & = & aMA+bNA & M,N\in\mathcal{C}_A\\ & = & (aM+bN)A & \end{array}$$

  Par conséquent : $aM+bN\in\mathcal{C}_A$.
  $\mathcal{C}_A$ est donc stable par combinaison linéaire.

Petite remarque
On structure bien cette question... 3 points, puis 2 sous-points dans le troisième !
En effet, 2 critères pour appartenir à $\mathcal{C}_A$: être dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et commuter avec A.

Conclusion : $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel.

☞ Pour info...
L'ensemble $\mathcal{C}_A$ (qui est un EV) est appelé **commutant de A**.

4.b. Soient $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $N=P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M\in\mathcal{C}_A \iff N\in\mathcal{C}_D$$

On a :

$$\begin{array}{rcll} M\in\mathcal{C}_A & \iff & AM=MA & \\ & \iff & PDP^{-1}PNP^{-1}=PNP^{-1}PDP^{-1} & A=PDP^{-1} \text{ et } M=PNP^{-1}\\ & \iff & PDNP^{-1}=PNDP^{-1} & PP^{-1}=P^{-1}P=I_3\\ & \iff & DN=ND & \\ & \iff & N\in\mathcal{C}_D & \end{array}$$

Conclusion : $M\in\mathcal{C}_A \iff P^{-1}MP\in\mathcal{C}_D$.

4.c. Démontrer que $\mathcal{C}_D=\operatorname{Vect}\left(E_{1,1},E_{2,2},E_{2,3},E_{3,2},E_{3,3}\right)$, puis justifier que la famille $\left(E_{1,1},E_{2,2},E_{2,3},E_{3,2},E_{3,3}\right)$ est libre.

- Soit $N=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

✓ Rigueur !
Pour davantage de rigueur, on peut quantifier ainsi :
"Soit $N\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe alors $(a,b,c,d,e,f,g,h,i)\in\mathbb{R}^9$ tel que $N=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$."

On a :

$$DN = ND \iff \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2a & = & 2a \\ 2b & = & b \\ 2c & = & c \\ d & = & 2d \\ e & = & e \\ f & = & f \\ g & = & 2g \\ h & = & h \\ i & = & i \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ d & = & 0 \\ g & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}$$

Petite remarque
On pense bien à terminer les équivalences par "$N = \ldots$", puisque N est l'inconnue ici.

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_D & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} \ / \ (a, e, f, h, i) \in \mathbb{R}^5 \right\} \\ & = & \left\{ aE_{1,1} + eE_{2,2} + fE_{2,3} + hE_{3,2} + iE_{3,3} \ / \ (a, e, f, h, i) \in \mathbb{R}^5 \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}\big) \end{array}$$

Conclusion : $\mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}\big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}\big)$.

- La famille $\big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}\big)$ est une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; elle est donc une sous-famille d'une famille libre.

Conclusion : la famille $\big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}\big)$ est libre.

4.d. Montrer que la famille $\big(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}, PE_{3,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1}\big)$ est une base de $\mathcal{C}_A$.

D'après la question précédente, la famille $\big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}\big)$ est libre et génératrice de $\mathcal{C}_D$; elle en est donc une base.
Déduisons-en que la famille $\big(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}, PE_{3,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1}\big)$ est une base de $\mathcal{C}_A$.
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a, d'après la question **4.b.** :

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{C}_A & \iff & P^{-1}MP \in \mathcal{C}_D \\ & \iff & \exists!(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \ / \ P^{-1}MP = aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{2,3} + dE_{3,2} + eE_{3,3} \\ & \iff & \exists!(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \ / \ M = P\big(aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{2,3} + dE_{3,2} + eE_{3,3}\big)P^{-1} \\ & \iff & \exists!(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \ / \ M = aPE_{1,1}P^{-1} + bPE_{2,2}P^{-1} + cPE_{2,3}P^{-1} + dPE_{3,2}P^{-1} + ePE_{3,3}P^{-1} \end{array}$$

$\big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}\big)$ est une base de $\mathcal{C}_D$

Conclusion : la famille $\big(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}, PE_{3,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1}\big)$ est une base de $\mathcal{C}_A$.

5. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a + 2b & -b & -2b \\ 2b & a - b & -4b \\ -b & b & a + 3b \end{pmatrix}$$

On considère également : $\mathcal{E} = \{M(a, b) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

5.a. Justifier que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

On a :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E} & = & \left\{ \begin{pmatrix} a + 2b & -b & -2b \\ 2b & a - b & -4b \\ -b & b & a + 3b \end{pmatrix} \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \{aI_3 + bA \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}(I_3, A) \end{array}$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille (I_3, A) est :

- génératrice de $\mathcal{E}$ par définition,
- libre car constituée seulement de deux vecteurs non colinéaires.

Conclusion : $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et la famille (I_3, A) en est une base.

5.b. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que la matrice $P^{-1}M(a, b)P$ est diagonale. On note $D(a, b)$ cette matrice.

On a : $M(a, b) = aI_3 + bA$.
D'où :

$$\begin{array}{rcl} P^1M(a, b)P & = & aP^{-1}P + bP^{-1}AP \\ & = & aI_3 + bD \end{array} \qquad D = P^{-1}AP$$

Or I_3 et D sont des matrices diagonales, donc $aI_3 + bD$ également.

Conclusion : la matrice $P^{-1}M(a, b)P$ est diagonale, notée $D(a, b)$.

5.c. **5.c.i.** L'ensemble $\{M \in \mathcal{E} \ / \ M^2 = I_3\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$?

La matrice nulle n'appartient clairement pas à $\{M \in \mathcal{E} \ / \ M^2 = I_3\}$..

Conclusion : l'ensemble $\{M \in \mathcal{E} \ / \ M^2 = I_3\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

5.c.ii. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer : $M(a, b)^2 = I_3 \iff D(a, b)^2 = I_3$.
En déduire les matrices $M(a, b)$ telles que $M(a, b)^2 = I_3$.

- On sait que $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$, donc $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$ et ainsi :

$$\begin{aligned} M(a,b)^2 = I_3 &\iff \left(PD(a,b)P^{-1}\right) = I_3 \\ &\iff PD(a,b)P^{-1}PD(a,b)P^{-1} = I_3 \\ &\iff PD(a,b)^2P^{-1} = I_3 \\ &\iff D(a,b)^2 = P^{-1}P \\ &\iff D(a,b)^2 = I_3 \end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned} D(a,b) &= aI_3 + bD \\ &= \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$D(a,b) = \begin{pmatrix} (a+2b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} D(a,b)^2 = I_3 &\iff \begin{pmatrix} (a+2b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} (a+2b)^2 & = & 1 \\ (a+b)^2 & = & 1 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} a+2b = 1 \text{ ou } a+2b = -1 \\ a+b = 1 \text{ ou } a+b = -1 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} a+2b = 1 \\ a+b = 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a+2b = -1 \\ a+b = 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a+2b = 1 \\ a+b = -1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} a+2b = -1 \\ a+b = -1 \end{array} \right. \\ &\iff (a,b) = (1,0) \text{ ou } (a,b) = (3,-2) \text{ ou } (a,b) = (-3,2) \text{ ou } (a,b) = (-1,0) \end{aligned}$$

Petite remarque
Je ne détaille pas la résolution de ces systèmes dont on peut, à ce stade de l'exercice, donner les solutions directement !

Conclusion : des deux points précédents, on déduit que les matrices $M(a, b)$ telles que $M(a, b)^2 = I_3$ sont : $M(1, 0)$, $M(-1, 0)$, $M(3, -2)$ et $M(-3, 2)$.

★★★★★★★

Exercice 13 - Inspiré d'exercices de concours

On rappelle que si f désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel E, alors $f \circ f$ est également un endomorphisme de E et on note : $f^2 = f \circ f$.

Partie I. Puissances d'une matrice.

1. **Questions préliminaires.**
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I_3 = 0_3$ et $A \neq I_3$.

1.a. Démontrer que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} comme une combinaison linéaire de I_3, A et A^2.
Puisque $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I_3 = 0_3$, on a :

$$A \times \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I_3) = I_3$$

> **Conclusion :** A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I_3)$.

1.b. Déterminer les racines du polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$.
On a :

$$\begin{aligned} X^3 - 5X^2 + 8X - 4 &= (X-1)(X^2 - 4X + 4) \quad \text{car 1 est racine de } X^3 - 5X^2 + 8X - 4 \\ &= (X-1)(X-2)^2 \end{aligned}$$

> **Conclusion :** les racines du polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ sont 1 et 2.

Petite remarque
2 est racine double.

1.c. A l'aide de la question précédente, démontrer que la matrice $A - 2I_3$ n'est pas inversible.
D'après la question précédente, on a : $X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X-2)^2$; et ainsi :

$$(A - I_3)(A - I_3)^2 = 0_3$$

Raisonnons par l'absurde et supposons ainsi que $A - 2I_3$ est inversible.
En multipliant, par $(A - 2I_3)^{-1}$ (par la droite) l'égalité $(A - I_3)(A - 2I_3)^2 = 0_3$, on obtient :

$$(A - I_3)(A - 2I_3) = 0_3$$

En renouvelant, on a ainsi :

$$A - I_3 = 0_3$$

Ce qui contredit l'hypothèse que $A \neq I_3$.

> **Conclusion :** la matrice $A - I_2$ n'est pas inversible.

☞ Pour info...
La matrice $A - I_3$, quant à elle, n'est pas nécessairement non inversible. En effet, en prenant $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on aurait $(A - 2I_2)^2 = 0_2$, donc $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ serait annulateur de A ; et pourtant, $A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.
Tout dépend donc de la matrice A initiale...

On considère à présent la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ et note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

2. L'exécution du programme **Python** qui suit

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[0,1,0],[0,0,1],[4,-8,5]])
A2=al.matrix_power(A,2)
A3=al.matrix_power(A,3)

print(A3-5*A2+8*A)
```

affiche :

```
[[4 0 0]
 [0 4 0]
 [0 0 4]]
```

En déduire un polynôme annulateur de la matrice A.
Le programme permet de calculer $A^3 - 5A^2 + 8A$...

> **Conclusion :** le polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ est annulateur de la matrice A.

3. Quel est le rang de f ?
D'après la question précédente, le polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ est annulateur de A. On se retrouve donc dans le contexte de la question **1.**.
Par conséquent,d 'après la question **1.a.**, la matrice A est inversible. Ainsi, f est bijectif. Son rang est donc maximal.

> **Conclusion :** $\mathrm{rg}(f) = 3$.

4. **4.a.** Soient λ une racine du polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ et $u = (1, \lambda, \lambda^2)$. Vérifier que $f(u) = \lambda u$.
Puisque f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, on a :

$$\begin{aligned} f(u) &= f(1, \lambda, \lambda^2) \\ &= (\lambda, \lambda^2, 4 - 8\lambda + 5\lambda^2) \quad \lambda \text{ est racine de } X^3 - 5X^2 + 8X - 4, \text{ donc } 4 - 8\lambda + 5\lambda^2 = \lambda^3 \\ &= (\lambda, \lambda^2, \lambda^3) \\ &= \lambda u \end{aligned}$$

Petite remarque
On pourrait également travailler avec les matrices, en posant $U = \mathrm{Mat}_{bc}(u)$ et en calculant AU...

4.b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(u) = \lambda u$.

4.b.i. Exprimer $f^2(u)$ en fonction de λ et u.

On a :

$$\begin{aligned} f^2(u) &= f\left(f(u)\right) && \text{$f(u)=\lambda u$} \\ &= f\left(\lambda u\right) && \text{linéarité de f} \\ &= \lambda f(u) && \text{$f(u)=\lambda u$} \\ &= \lambda^2 u \end{aligned}$$

4.b.ii. En déduire que λ est racine du polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$.

- De la même façon qu'à la question précédente, on a :

$$f^3(u) = \lambda^3 u$$

- Or, le polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ est annulateur de A, donc il est également annulateur de f. Ainsi :

$$f^3 - 5f^2 + 8f - 4\mathrm{id} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$$

Puis, en évaluant en u, on obtient :

$$f^3(u) - 5f^2(u) + 8f(u) - 4u = 0_{\mathbb{R}^3}$$

D'après les deux points ci-dessus, la question précédente et le fait que $f(u) = \lambda u$, on obtient :

$$(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4)u = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Et, puisque u est non nul, il reste :

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$

Conclusion : λ est racine du polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$.

☞ Pour info...
En fait, ce qui a été fait est indépendant de l'endomorphisme f, du moment qu'on en connaît un polynôme annulateur P... On a ainsi établi que les valeurs propres de f sont parmi les racines de P. Résultat qui sera revu l'an prochain.

4.c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déduire des questions précédentes que : $f - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas bijectif si, et seulement si, $\lambda \in \{1; 2\}$.

Raisonnons pas double-implication...

$\Longleftarrow$ Supposons que $\lambda \in \{1; 2\}$. D'après la question **1.b.**, λ est donc racine du polynôme $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$.
Ainsi, d'après la question **4.a.**, le vecteur $u = (1, \lambda, \lambda^2)$ vérifie $f(u) = \lambda u$.
Par conséquent, $u \in \ker(f - \lambda\mathrm{id})$. Mais, puisque la première composante de u est non nulle, le vecteur u est lui aussi non nul. D'où :

$$\ker(f - \lambda\mathrm{id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Par conséquent : $f - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas injectif, donc pas bijectif.

➠Réflexe !

$$f(u) = \lambda u \iff (f - \lambda\mathrm{id})(u) = 0 \iff u \in \ker(f - \lambda\mathrm{id})$$

$\Longrightarrow$ Supposons que $f - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas bijectif.
Puisque $f - \lambda\mathrm{id}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, il n'est donc pas injectif. Par conséquent :

$$\ker(f - \lambda\mathrm{id}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Et il existe donc un vecteur non nul u tel que $f(u) = \lambda u$.
En utilisant le résultat de la question **3.b.ii.**, λ est donc racine de $X^3 - 5X^2 + 8X - 4$, et donc $\lambda \in \{1; 2\}$.

Pourquoi ?
C'est le théorème sur l'équivalence injectif/surjectif/bijectif dans le cas des endomorphismes !

Conclusion : $f - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas bijectif si, et seulement si, $\lambda \in \{1; 2\}$.

5. Déterminer le rang de la matrice $A - I_3$. Donner alors une base de $\ker(f - \mathrm{id})$ constituée d'un unique vecteur, noté u_1, dont la première composante est égale à 1.

On a : $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ et on remarque que $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et ainsi :

-
$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) && \text{car } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) && \text{car } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ sont non colinéaires donc linéairement indépendants} \\ &= 2 \end{aligned}$$

  D'où, par théorème du rang :

$$\dim\left(\ker(A - I_3)\right) = 1$$

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A - I_3)$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est donc une famille de $\ker(A - I_3)$:

- libre car constituée d'un unique vecteur non nul,
- de cardinal 1 dans $\ker(A - I_3)$, qui est de dimension 1.

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(A - I_3)$.

Conclusion : la famille $\left((1, 1, 1)\right)$ est une base de $\ker(f - \mathrm{id})$ et on pose $u_1 = (1, 1, 1)$.

6. Notons $u_2=(1,2,4)$. Vérifier que $u_2 \in \ker(f-2\mathrm{id})$.

On note $U_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ et on calcule $(A-2I_3)U_2$... On trouve bien $0_{3,1}$.

Conclusion : $u_2 \in \ker(f-2\mathrm{id})$.

7. Résoudre l'équation $f(v)=2v+u_2$, d'inconnue $v\in\mathbb{R}^3$, puis en donner une solution, notée u_3, dont la première composante est nulle.

Notons $U_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$. Soit $V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
AV=2V+U_2 &\iff \begin{cases} y = 2x+1\\ z = 2y+2\\ 4x-8y+5z=2z+4\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -2x+y=1\\ -2y+z=2\\ 4x-8y+3z=4\end{cases}\\
&\underset{L_3\leftarrow L_3+2L_1}{\iff} \begin{cases} -2x+y=1\\ -2y+z=2\\ -6y+3z=6\end{cases}\\
&\underset{L_3\leftarrow L_3-3L_2}{\iff} \begin{cases} -2x+y=1\\ -2y+z=2\\ 0=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=\frac{1}{4}z-1\\ y=\frac{1}{2}z-1\\ z=z\end{cases}\\
&\iff V=z\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Prenons alors $z=4$ et posons $U_3=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$: U_3 est ainsi solution de l'équation $AV=2V+U_2$.

Conclusion : posons $u_3=(0,1,4)$; u_3 est solution de l'équation $f(v)=2v+u_2$, d'inconnue $v\in\mathbb{R}^3$ et la première composante de u_3 est bien nulle.

8. 8.a. Montrer que la famille (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que (u_1,u_2,u_3) est libre.
  Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$. Supposons que $au_1+bu_2+cu_3=0$.
  Or :

$$\begin{aligned}
au_1+bu_2+cu_3=0 &\iff (a,a,a)+(b,2b,4b)+(0,c,4c)=(0,0,0)\\
&\iff \begin{cases} a+b=0\\ a+2b+4c=0\\ a+4b+4c=0\end{cases}\\
&\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} a+b=0\\ b+4c=0\\ 3b+4c=0\end{cases}\\
&\underset{L_3\leftarrow L_3-3L_2}{\iff} \begin{cases} a+b=0\\ b+4c=0\\ -8c=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a=0\\ b=0\\ c=0\end{cases}
\end{aligned}$$

  La famille (u_1,u_2,u_3) est donc libre.
- De surcroît : $\mathrm{Card}(u_1,u_2,u_3)=3=\dim(\mathbb{R}^3)$.

Conclusion : la famille (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

8.b. Sans effectuer de calcul matriciel, déterminer, en justifiant, la matrice de f dans la base (u_1,u_2,u_3). On notera T la matrice obtenue.

- Puisque $u_1\in\ker(f-\mathrm{id})$, on a : $(f-\mathrm{id})(u_1)=0$, d'où : $f(u_1)-u_1=0$. Autrement dit :
$$f(u_1)=u_1$$
- De la même façon :
$$f(u_2)=2u_2$$
- Et par définition de u_3 :
$$f(u_3)=2u_3+u_2$$

Ainsi :
$$\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Conclusion : $T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

9. Posons maintenant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

9.a. Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse. *On admet que l'on a alors :* $A = PTP^{-1}$.

Sans difficulté, par la méthode habituelle, on trouve que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Petite remarque
On peut remarquer le lien entre P et les vecteurs u_1, u_2 et u_3...

9.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $PT^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PT^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$.
  On a :
  $$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PT^nP^{-1}PTP^{-1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PT^nI_2TP^{-1} \\ &= PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.

9.c. Posons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $T = D + N$. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de T^n.

- Commençons par remarquer que :
  - ◇ $N^2 = 0_3$; ainsi, pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, $N^k = 0_3$.
  - ◇ $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$: les matrices D et N commutent.

Petite remarque
Il faut le vérifier ici, puisque D n'est pas un multiple de la matrice I_3, ce n'est donc pas "évident".

- Soit ensuite $n \in \mathbb{N}$. Distinguons deux cas :
  - ◇ Si $n \geq 2$:
  $$\begin{aligned} T^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}N^k && \text{formule du binôme de Newton, puisque } D \text{ et } N \text{ commutent} \\ &= \binom{n}{0} D^nN^0 + \binom{n}{1} D^{n-1}N + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}N^k && \text{relation de Chasles, licite car } n \geq 2 \\ &= D^n + nD^{n-1}N && \forall k \in [\![2; +\infty[\![,\ N^k = 0_3 \end{aligned}$$
  - ◇ Si $n \in \{0; 1\}$.
    - ⇝ Si $n = 0$:
      On a :
      $$D^0 + 0D^{0-1}N = I_3 = T^0$$
    - ⇝ Si $n = 1$:
      On a :
      $$D^1 + 1D^{1-1}N = D + N = T$$

Petite remarque
J'ai procédé un peu différemment... Habituellement, je distingue les cas "$n \geq 1$" et "$n = 0$" ; la relation de Chasles étant licite quand $n \geq 1$, puisque la somme de droite serait nulle (car indexée sur un ensemble vide).
Mais... étant donné que vous êtes peu nombreux à y penser, que c'est parfois perturbant de l'écrire et que ce n'est pas très coûteux ensuite de vérifier les cas "$n = 0$" et "$n = 1$" à part, je décide de faire ainsi à présent.

♡ Astuce du chef ! ♡
Autant faire les vérifications des autres cas sur l'expression la plus élémentaire "$T^n = D^n + nD^{-1}N$", plutôt que sur l'expression finale...

On a donc toujours :
$$T^n = D^n + nD^{n-1}N$$
Or, D étant diagonale, on a : $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Et : $D^{n-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a ainsi :
$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

9.d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Conclure sur l'expression de A^n.

En utilisant les résultats des questions précédentes :
$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 + (n-3)2^n & -4 + 2^{n+2} - 3n2^{n-1} & 1 - 2^n + n2^{n-1} \\ 4 + (n-2)2^{n+1} & -4 + 2^{n+3} - 3(n+1)2^n & 1 + (n-1)2^n \\ 4 + (n-1)2^{n+2} & -4 + 2^{2n+4} - 3(n+2)2^{n+1} & 1 + n2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vérification
On peut rapidement vérifier que l'expression donne I_3 pour $n = 0$ (A étant inversible) et A pour $n = 1$...

Partie II. Application à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \end{array}\right.$.

10. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de u_n en sortie.

```python
#Avec une fonction récursive :
def u(n):
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 1
    elif n==2:
        return 4
    else :
        return 5*u(n-1)-8*u(n-2)+4*u(n-3)

#Avec une boucle for :
def ubis(n):
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 1
    elif n==2:
        return 4
    else :
        U,V,W=1,1,4
        for k in range(3,n+1):
            U,V,W=V,W,5*W-8*V+4*U
        return W
```

11. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

- Commençons déjà par remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$...
- Démontrons ensuite le résultat par récurrence.
  - ◇ **Initialisation.** Pour $n = 0$:
    $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$: l'initialisation est vérifiée.
  - ◇ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $X_n = A^n X_0$ et montrons que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.
    On a, en utilisant le point précédent :

$$\begin{array}{rcll} X_{n+1} & = & AX_n & \\ & = & A \times A^n X_0 & \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & A^{n+1} X_0 & \end{array}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : par récurrence, on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

12. En utilisant les résultats de la partie I, conclure sur le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a $X_n = A^n X_0$. En utilisant le résultat de la question **9.d.**, on obtient : Ainsi :

$$X_n = \begin{pmatrix} 4 + (n-3)2^n & -4 + 2^{n+2} - 3n2^{n-1} & 1 - 2^n + n2^{n-1} \\ 4 + (n-2)2^{n+1} & -4 + 2^{n+3} - 3(n+1)2^n & 1 - 2^{n+1} + (n+1)2^n \\ 4 + (n-1)2^{n+2} & -4 + 2^{2n+4} - 3(n+2)2^{n+1} & 1 - 2^{n+2} + (n+2)2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Or $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$...

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 + 2^{n-1}(3n - 6)$.

★★★★★★★

Exercice 14 - EDHEC 2011 E

On note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$; on rappelle qu'on a ainsi, pour tout réel x : $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2$. On note également id l'endomorphisme identité sur $\mathbb{R}_2[x]$.
On considère l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_2[x]$, associe la fonction polynomiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x)$$

1. 1.a. Montrer que f est une application linéaire.

✘ Attention ! Il s'agit d'une égalité de fonctions...

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$. Montrons que $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.
On a, par linéarité de la dérivation, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q)(x) &= 2x\big(\lambda P(x) + \mu Q(x)\big) - (x^2-1)\big(\lambda P'(x) + \mu Q'(x)\big) \\ &= \lambda \times 2xP(x) + \mu \times 2xQ(x) - \lambda(x^2-1)P'(x) - \mu(x^2-1)Q'(x) \\ &= \lambda f(P)(x) + \mu f(Q)(x) \end{aligned}$$

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$. Autrement dit : $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.

Conclusion : f est une application linéaire.

1.b. Écrire $f(P_0)$, $f(P_1)$ et $f(P_2)$ comme des combinaisons linéaires de P_0, P_1 et P_2. En déduire que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ puis donner sa matrice dans la base $\mathscr{B}$. *On notera A cette matrice.*

- Sans difficultés, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P_0)(x) = 2x \quad ; \quad f(P_1)(x) = x^2 + 1 \quad ; \quad f(P_2)(x) = 2x$$

D'où :

$$f(P_0) = 2P_1 \quad ; \quad f(P_1) = P_0 + P_2 \quad ; \quad f(P_2) = 2P_1$$

- Déduisons-en que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$. Il existe alors $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = aP_0 + bP_1 + cP_2$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} f(P) &= f(aP_0 + bP_1 + cP_2) \\ &= af(P_0) + bf(P_1) + cf(P_2) \end{aligned} \quad \text{linéarité de } f$$

Or, d'après le point précédent, $f(P_0)$, $f(P_1)$ et $f(P_2)$ sont dans $\mathbb{R}_2[x]$. Par stabilité de $R_2[x]$ par combinaisons linéaires, on obtient finalement :

$$f(P) \in \mathbb{R}_2[x]$$

Par conséquent : f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

- D'après le premier point, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.c. En déduire le rang de f. L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?
On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) &= \mathrm{rg}(A) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires

Conclusion : $\mathrm{rg}(f) = 2$.

Puisque $\dim\big(\mathbb{R}_2[x]\big) = 3$, on en déduit que f n'est pas surjectif.

Conclusion : f n'est pas un automorphisme.

2. Justifier que $\ker(f)$ est de dimension un puis en donner une base constituée d'un seul polynôme, noté Q_0.

- D'après le théorème du rang :

$$\dim\big(\mathbb{R}_2[x]\big) = \mathrm{rg}(f) + \dim\big(\ker(f)\big)$$

Or $\dim\big(\mathbb{R}_2[x]\big) = 3$, d'où :

$$\dim\big(\ker(f)\big) = 1$$

- Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$. Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = a + bx + cx^2$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On a :

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\iff X \in \ker(A) \\ &\iff AX = 0_{3,1} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2a + 2c &=& 0 \\ b &=& 0 \\ 2a + 2c &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& -c \\ b &=& 0 \\ c &=& c \end{array} \right. \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \\ &\iff P = c(-P_0 + P_2) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{c(-P_0 + P_2) \ / \ c \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(-P_0 + P_2) \end{aligned}$$

Posons $Q_0 = -P_0 + P_2$. La famille (Q_0) est ainsi :

- génératrice de $\ker(f)$, car $\ker(f) = \text{Vect}(Q_0)$,
- libre car constituée d'une unique vecteur non nul.

Conclusion : $\ker(f)$ est de dimension 1 et la famille (Q_0) en est une base ; où $Q_0 : x \longmapsto x^2 - 1$.

3. 3.a. Déterminer les réels λ tels que $f - \lambda \text{id}$ ne soit pas bijectif.

☞ Rappel... On a les équivalences : "$f - \lambda \text{id}$ bijectif" $\iff$ "$A - \lambda I_3$ inversible" $\iff$ "$\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$".

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_1 \longleftrightarrow L_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_2 \longleftarrow 2L_2 + \lambda L_1}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_2 \longleftrightarrow L_3}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_3 \longleftrightarrow L_3 - (2-\lambda^2)L_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda + \lambda(2-\lambda^2) \end{pmatrix} \\
&= \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(4-\lambda^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(4-\lambda^2) \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure ; par conséquent, elle est inversible si, et seulement si, $\lambda(4-\lambda^2) \neq 0$.

Conclusion : $f - \lambda \text{id}$ n'est pas bijectif lorsque $\lambda \in \{-2; 0; 2\}$.

3.b. Pour chaque valeur de λ trouvée à la question précédente : justifier que $\ker(f - \lambda \text{id})$ est de dimension un puis en donner une base constituée d'un seul polynôme noté Q_λ.

- Pour $\lambda = 0$:
  $\ker(f)$ a été déterminé à la question q2.. On avait $Q_0 = -P_0 + P_2$.
- Pour $\lambda = -2$:
  On a : $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et après résolution d'un système, on trouve : $\ker(A + 2I_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
  Par conséquent : $\ker(f + 2\text{id}) = \text{Vect}(P_0 - 2P_1 + P_2)$.

  Conclusion : $\ker(f + 2\text{id})$ est de dimension 1 et, en posant $Q_{-2} = P_0 - 2P_1 + P_2$, la famille $\left(Q_{-2}\right)$ est une base de $\ker(f + 2\text{id})$.
- Pour $\lambda = 2$:
  On a : $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et après résolution d'un système, on trouve : $\ker(A - 2I_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
  Par conséquent : $\ker(f - 2\text{id}) = \text{Vect}(P_0 + 2P_1 + P_2)$.

  Conclusion : $\ker(f - 2\text{id})$ est de dimension 1 et, en posant $Q_2 = P_0 + 2P_1 + P_2$, la famille $\left(Q_2\right)$ est une base de $\ker(f - 2\text{id})$.

3.c. On admet que les polynômes Q_λ obtenus à la question précédente forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner la matrice de f dans cette base.

On a :

- $Q_0 \in \ker(f)$, donc $f(Q_0) = 0$
- $Q_{-2} \in \ker(f + 2\text{id})$, donc $(f + 2\text{id})(Q_{-2}) = 0$, d'où $f(Q_{-2}) = -2Q_{-2}$
- $Q_2 \in \ker(f - 2\text{id})$, donc $(f - 2\text{id})(Q_2) = 0$, d'où $f(Q_2) = 2Q_2$

D'où :

$$Mat_{(Q_0, Q_{-2}, Q_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

★★★★★★★

Exercice 15 - EDHEC 2019 E

On considère l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y+z \\ -2x+3y+2z \\ x-y \end{pmatrix}$, et on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donner sa matrice canoniquement associée, notée A.
   - On remarque déjà que f est une application de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a : $f(X) = AX$.
   Par conséquent, f est une application linéaire.

   Conclusion : f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et A est sa matrice canoniquement associée.

2. Déterminer les réels λ de sorte que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si, et seulement si, $\text{rg}(A - \lambda I_3) \neq 3$.
   Or :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A-\lambda I_3) &= \text{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_1 \longleftrightarrow L_3}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3+\lambda L_1}}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \\
&\underset{L_3 \longleftarrow L_3 - L_2}{=} \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 0 & -1+2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \\
&= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2-2\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Conclusion : la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si, et seulement si, $\lambda = 1$.

3. **3.a.** Calculer $(A - I_3)^2$.
   Sans difficulté, on trouve $(A - I_3)^2 = 0_3$.

   3.b. En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I_3 et A.
   D'après la question précédente :
   $$(A - I_3)^2 = 0_3$$
   D'où, en développant, puisque I_3 et A commutent :
   $$A^2 - 2A + I_3 = 0_3$$
   D'où :
   $$A(-A + 2I_3) = I_3$$

   Conclusion : A est inversible et $A^{-1} = -A + 2I_3$.

   Important !
   On utilise une identité remarquable (cas particulier de la formule du binôme de Newton) : il faut donc que A et I_3 commutent...

   3.c. Que peut-on en déduire sur l'endomorphisme f ?

   Conclusion : on en déduit que f est un automorphisme et que $f^{-1} = -f + 2\text{id}$.

4. On pose $N = A - I_3$.
   4.a. Exprimer, pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I_3 et A.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Distinguons deux cas :
   - Si $n \geq 2$:
     On a :

$$\begin{aligned}
A^n &= (N + I_3)^n && \text{N et I_3 commutent} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} && \forall k \in [\![0;n]\!],\ I_3^{n-k} = I_3 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k && \text{relation de Chasles, licite car } n \geq 2 \\
&= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{0} N + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k && N^2 = 0, \text{ donc } \forall k \geq 2,\ N^k = 0 \\
&= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N \\
&= I_3 + nN \\
&= I_3 + n(A - I_3) \\
&= (1-n)I_3 + nA
\end{aligned}$$

   - Si $n \in \{0; 1\}$.
     - Si $n = 0$:
     $$\begin{aligned}(1-0)I_3 + 0 \times A &= I_3 \\ &= A^0\end{aligned}$$
     - Si $n = 1$:
     $$(1-1)I_3 + 1 \times A = A$$

✘ Attention !
Chaque argument rapporte un point sur cette question ! Et on lit bien l'énoncé, qui demande d'exprimer A^n en fonction de I_3 et A, pas en fonction de I_3 et N...

L'expression donnée est donc encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (1-n)I_3 + nA$.

4.b. Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

On a :

- d'après la question **3.b.** : $A^{-1} = 2I_3 - A$
- d'autre part, $(1-(-1))I_3 + (-1)A = 2I_3 - A$

Conclusion : la relation établie à la question précédente est encore valable si $n = -1$.

5. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

5.a. Montrer que $\mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) = 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f-\mathrm{id}) &= \mathrm{rg}(A - I_3) \\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{les 3 colonnes sont colinéaires et non nulles} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Important !
Il faut mentionner que les colonnes sont non nulles, sinon le rang serait égal à 0.

5.b. Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\ker(f - \mathrm{id})$.

D'après le théorème du rang :

$$\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = \dim\left(\ker(f-\mathrm{id})\right) + \mathrm{rg}(f - \mathrm{id})$$

D'après la question qui précède, on obtient :

$$\dim\left(\ker(f-\mathrm{id})\right) = 2$$

De plus :

- $(f-\mathrm{id})(u_1) = (f-\mathrm{id}) \circ (f-\mathrm{id})(e_1) = 0_{3,1}$, car $(A - I_3)^2 = 0_3$, donc $(f-\mathrm{id}) \circ (f-\mathrm{id}) = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))}$. Ainsi, $u_1 \in \ker(f - \mathrm{id})$.
- $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie sans mal que $(f-\mathrm{id})(u_2) = 0_{3,1}$, donc $u_2 \in \ker(f - \mathrm{id})$.

Par conséquent, (u_1, u_2) est une famille de $\ker(f - \mathrm{id})$:

- libre car constituée seulement de deux vecteurs non colinéaires, puisque $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- de cardinal 2 dans $\ker(f - \mathrm{id})$, qui est de dimension 2.

Conclusion : (u_1, u_2) est une base de $\ker(f - \mathrm{id})$.

Petite remarque
On pouvait aussi déterminer $\ker(f - \mathrm{id})$ en résolvant un système bien entendu...

6. **6.a.** Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Sans difficulté, on montre que la famille (u_1, u_2, e_1) est libre.
- Et : $\mathrm{Card}(u_1, u_2, e_1) = 3 = \dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

Conclusion : la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Petite remarque
On démontre la liberté de la même façon que d'habitude ; ou bien on peut aussi partir de $au_1 + bu_2 + ce_1 = 0$, puis appliquer $f - \mathrm{id}$...

6.b. Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

- Puisque $u_1 \in \ker(f - \mathrm{id})$, on a : $f(u_1) = u_1$
- De même, $f(u_2) = u_2$
- Également, $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$, donc $u_1 = f(e_1) - e_1$. Autrement dit : $f(e_1) = u_1 + e_1$.

Conclusion : $Mat_{(u_1, u_2, e_1)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

★★★★★★★

Exercice 16 - EDHEC 2020 E

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel
   - $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est non vide, car la matrice nulle est anti-symétrique
   - Montrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.
     Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $\lambda A + \mu B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
     - ◇ Puisque $A, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, en particulier : $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, on a déjà $\lambda A + \mu B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
     - ◇ Ensuite :
$$\begin{array}{rcll} {}^t(\lambda A + \mu B) & = & \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB & \text{par linéarité de la transposition} \\ & = & -\lambda A - \mu B & \text{car } A, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ & = & -(\lambda A + \mu B) & \end{array}$$

     Par conséquent :
$$\lambda A + \mu B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Conclusion : $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe la matrice $f(M)$ définie par :
$$f(M) = {}^tAM + MA$$

2. **2.a.** Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
   On a :
$$\begin{array}{rcll} {}^t\big(f(M)\big) & = & {}^t\big({}^tAM + MA\big) & \\ & = & {}^t\big({}^tAM\big) + {}^t(MA) & \text{linéarité de la transposition} \\ & = & {}^tMA + {}^tA\,{}^tM & \\ & = & -MA - {}^tAM & M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ & = & -f(M) & \end{array}$$

   Ainsi :
$$f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Conclusion : pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

☞ Rappel...
${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

   2.b. En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
   - Montrons que f est une application linéaire.
     Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a :
$$\begin{array}{rcl} f(\lambda M + \mu N) & = & {}^tA(\lambda M + \mu N) + (\lambda M + \mu N)A \\ & = & \lambda\, {}^tAM + \lambda MA + \mu\, {}^tAN + \mu NA \\ & = & \lambda f(M) + \mu f(N) \end{array}$$
     Par conséquent : f est une application linéaire.
   - D'après la question précédente, on a :
$$\forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Conclusion : f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   3.a. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :
$$\begin{array}{rcl} M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) & \Longleftrightarrow & {}^tM = -M \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ d & = & -b \\ g & = & -c \\ e & = & 0 \\ h & = & -f \\ i & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & M = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & M = bJ + cK + fL \end{array}$$

   Par conséquent :
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) & = & \{bJ + cK + fL \ /\ (b, c, f) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \mathrm{Vect}(J, K, L) \end{array}$$

Conclusion : la famille (J, K, L) est génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

♣ Méthode !
Montrer qu'une famille $\mathscr{F}$ est génératrice d'un ev E équivaut à montrer que $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$... On peut donc mettre en place la méthode habituelle !

Petite remarque
On pourrait s'arrêter à cette étape, puisque l'on a réussi à écrire toute matrice M de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire de J, K, L...

3.b. Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

- Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons que $aJ + bK + cL = 0_3$.
  Ainsi :
  $$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  D'où :
  $$a = b = c = 0$$
  Par conséquent, la famille (J, K, L) est libre.
- On en déduit, grâce à la question précédente, que la famille (J, K, L) est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Conclusion : $\dim\big(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\big) = \mathrm{Card}\big(J, K, L\big) = 3$.

4. 4.a. Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement.
On trouve :
$$f(J) = -J - L \quad ; \quad f(K) = 0 - 3 \quad ; \quad f(L) = -L$$

4.b. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.
Puisque (J, K, L) est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, on a :
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}\big(f(J), f(K), f(L)\big) \\ & = & \mathrm{Vect}(-J - L, 0_3, -L) \quad \text{question précédente} \\ & = & \mathrm{Vect}(-J - L, -L) \\ & = & \mathrm{Vect}(-J, -L) \\ & = & \mathrm{Vect}(J, L) \end{array}$$

> **☞ Rappel...**
> En pratique, il suffit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ soit génératrice de l'ev de départ pour que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$.

Par conséquent, la famille (J, L) est :
- génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ par définition,
- libre car seulement constituée de deux matrices non colinéaires.

Conclusion : la famille (J, L) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4.c. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ puis en donner une base.

- D'après le théorème du rang :
  $$\dim\big(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\big) = \dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rg}(f)$$
  Or, d'après la question précédente : $\mathrm{rg}(f) = 2$; et l'on sait, d'après la question **3.b.**, que $\dim\big(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\big) = 3$.
  D'où :
  $$\dim\big(\ker(f)\big) = 1$$
- Or, d'après la question **4.a.** : $K \in \ker(f)$.

> **☞ Rappel...**
> $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$

Ainsi, la famille (K) est une famille de $\ker(f)$:
- libre, car constituée d'une unique vecteur non nul,
- de cardinal 1 dans $\ker(f)$ qui est de dimension 1.

Conclusion : la famille (K) est une base de $\ker(f)$.

III Probabilités

A maîtriser

1. **Probabilités générales.**
Avant de commencer, il est nécessaire, en plus de s'assurer d'une excellente connaissance du cours, de :
   - *comprendre la signification de* $\bigcap_{i\in I} A_i$ *et* $\bigcup_{i\in I} A_i$, *où* I *est un sous-ensemble de* $\mathbb{N}$,
   - *ne pas confondre les objets : variables aléatoires, évènements, issues, réels...*

Décrire un évènement en union et/ou intersection d'autres évènements.	Chapitre 12. Exercices 4,5,6. Chapitre 16. Exercices 3,4,6,7,8.
Déterminer une probabilité : • d'un union de deux évènements (formule de Poincaré) ou d'une union (finie ou infinie) d'évènements 2 à 2 incompatibles, • d'une intersection finie d'évènements mutuellement indépendants ou non (formule des probabilités composées), • d'un évènement à l'aide de la formule des probabilités totales, • conditionnelle.	

2. **Variables aléatoires discrètes.**

Déterminer l'ensemble image d'une variable aléatoire.	Chapitre 12. Exercices 12,15. Chapitre 18. Exercices 1,2,3,4,5,6,8,9. Chapitre 21. Exercices 6,17.
Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète dans des cas simples : le travail se fait sur les évènements (éventuelles disjonctions de cas à faire).	
Étudier l'existence de l'espérance / variance d'une variable aléatoire discrète, et dans le cas échéant, savoir la calculer.	
Déterminer la loi d'un minimum / maximum de variables aléatoires indépendantes.	Chapitre 12. Exercices 16,17. Chapitre 21. Exercice 15.
Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes ou non.	Chapitre 21. Exercices 12,16,22.

Exercice 17 - Ecricome 2014 E

Soient $p \in]0;1[$ et $q = 1 - p$.
On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p et on procède à l'expérience suivante $\mathcal{E}$: "*On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce*". On suppose les résultats des lancers indépendants les uns des autres.
On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : "La pièce donne FACE lors du j-ième lancer" ; et $P_j = \overline{F_j}$;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre "FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE", alors $Y = 4$.
On admet que les variables aléatoires X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience $\mathcal{E}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_n puis donner $\mathbb{P}([X_n = k])$ pour $k \in X_n(\Omega)$. Préciser $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.
   - **Expérience :** l'expérience consiste en n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.
   - **Variable aléatoire :** X_n prend alors comme valeur le nombre de PILE obtenus sur ces n lancers.

   Conclusion : $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$
   $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$; $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
   $\mathbb{E}(X_n) = np$ et $\mathbb{V}(X_n) = np(1-p)$.

2. Donner $Y(\Omega)$.
   Justifions que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Procédons par double-inclusion.

   $\boxed{\subset}$ Y prend comme valeur le nombre de FACE avant l'apparition du second PILE, donc on a immédiatement $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

   $\boxed{\supset}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $k \in Y(\Omega)$.
   L'issue, que l'on assimile à un ∞-uplet, constituée de k FACE puis 2 PILE puis une infinité de FACE réalise l'évènement $[Y = k]$.
   Par conséquent : $[Y = k] \neq \varnothing$.
   D'où :
   $$\mathbb{N} \subset Y(\Omega)$$

   Conclusion : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

♣ Méthode !
On s'imprègne de la méthode mise en place pour démontrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Petite remarque
Il s'agit de trouver UNE issue pour justifier que $[Y = k]$ est non vide, et donc que k est bien dans $Y(\Omega)$...

3. Soit n un entier naturel. Justifier que les événements $[Y = n]$ et $[X_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}$ sont égaux.

   $[Y = n]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient n FACE avant l'apparition du second PILE
   si, et seulement si, le $n+2$-ième lancer a donné PILE et on a obtenu n FACE sur les $n+1$ lancers précédents
   si, et seulement si, le $n+2$-ième lancer a donné PILE et on a obtenu 1 PILE sur les $n+1$ lancers précédents
   si, et seulement si, $P_{n+2} \cap [X_{n+1} = 1]$ est réalisé

   Conclusion : $[Y = n] = [X_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}$.

4. Prouver que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y = n]) = (n+1)p^2 q^n$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :
   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}([Y = n]) &= \mathbb{P}\big([X_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}\big) \\
   &= \mathbb{P}([X_{n+1} = 1])\mathbb{P}(P_{n+2}) && \text{indépendance des lancers, et } X_{n+1} \text{ ne fait intervenir que les lancers 1 à } n+1 \\
   &= \binom{n+1}{1} p(1-p)^n \times p && \text{d'après } \mathbf{1.} : X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n+1;p) \\
   &= (n+1)p^2 q^n
   \end{aligned}$$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y = n]) = (n+1)p^2 q^n$.

5. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance et la calculer.
   - On sait que :

   Y admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \in Y(\Omega)} n\mathbb{P}([Y = n])$ est absolument convergente
   si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \geq 0} n\mathbb{P}([Y = n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

   - Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On an d'après la question précédente :

   $$\begin{aligned}
   \sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}([Y = n]) &= \sum_{n=0}^{N} n(n+1)p^2 q^n && \text{changement d'indice } k = n+1\text{, linéarité de la somme} \\
   &= p^2 \sum k = 1^{N+1}(k-1)kq^{k-1} \\
   &= p^2 q \sum k = 1^{N+1}(k-1)kq^{k-2}
   \end{aligned}$$

Or, $p \in]0;1[$, donc $q \in]0;1[$. Ainsi, la série $\sum_{k \geq 1} k(k-1)q^{k-2}$ est une série géométrique convergente.

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}([Y=n])$ est convergente.

- On en déduit que Y admet une espérance et :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Y) & = & p^2 q \sum k = 1^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} & \\ & = & p^2 q \dfrac{2}{(1-q)^3} & p = 1-q \\ & = & \dfrac{2q}{p} & \end{array}$$

> **Conclusion :** Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{2q}{p}$.

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.

6.a. Soit Z la variable aléatoire égale au rang du premier PILE. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

- **Expérience :** l'expérience consiste en une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.
- **Variable aléatoire :** Z donne le rang du premier succès.

> **Conclusion :** $Z \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$
> $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$; $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z=k]) = (1-p)^{k-1}p$
> $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

6.b. Exprimer Y_1 en fonction de Z puis en déduire la loi de Y_1 ainsi que son espérance.

Puisque Z est le rang du premier PILE et que Y_1 compte le nombre de FACE avant l'apparition de ce premier PILE, on a :

$$Y_1 = Z - 1$$

Ainsi :

- $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y_1 = n]) & = & \mathbb{P}([Z-1=n]) & \\ & = & \mathbb{P}([Z=n+1]) & \\ & = & (1-p)^n p & n+1 \in \mathbb{N}^* \end{array}$$

- puisque Z admet une espérance et que Y_1 est une transformée affine de Z, Y_1 admet également une espérance et :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Y_1) & = & \mathbb{E}(Z-1) & \\ & = & \mathbb{E}(Z) - 1 & \text{linéarité de l'espérance} \\ & = & \dfrac{1}{p} - 1 & \\ & = & \dfrac{1-p}{p} & \end{array}$$

> **Conclusion :** $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([Y_1 = n]) = (1-p)^n p$
> $\mathbb{E}(Y_1) = \dfrac{1-p}{p}$.

6.c. En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_k.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- De la même façon qu'à la question 2., on a : $Y_k(\Omega) = \mathbb{N}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$[Y_k = n]$ est réalisé	si, et seulement si,	on obtient n FACE avant l'apparition du k-ième PILE
	si, et seulement si,	le $n+k$-ième lancer a donné PILE et on a obtenu n FACE sur les $n+k-1$ lancers précédents
	si, et seulement si,	le $n+k$-ième lancer a donné PILE et on a obtenu $k-1$ PILE sur les $n+k-1$ lancers précédents
	si, et seulement si,	$P_{n+k} \cap [X_{n+k-1} = k-1]$ est réalisé

D'où :

$$[Y_k = n] = [X_{n+k-1} = k-1] \cap P_{n+k}$$

Par conséquent :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Y_k = n]) & = & \mathbb{P}\left([X_{n+k-1} = k-1] \cap P_{n+k}\right) & \text{indépendance des lancers} \\ & = & \mathbb{P}([X_{n+k-1} = k-1])\mathbb{P}(P_{n+1}) & X_{n+k-1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n+k-1;p) \\ & = & \dbinom{n+k-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^n \times p & \\ & = & \dbinom{n+k-1}{k-1} p^k (1-p)^n & \end{array}$$

> **Conclusion :** pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([Y=n]) = \dbinom{n+k-1}{k-1} p^k (1-p)^n$.

> **⋆ Pour l'oral d'HEC ⋆**
> On peut justifier autrement ce résultat :
> • les issues de $[Y_k = n]$ sont toutes équiprobables
> • chaque issue de $[Y_k = n]$ est constituée de n FACE et k PILE ; la probabilité qu'elle apparaisse est donc égale à $p^k(1-p)^n$
> • chaque issue de $[Y_k = n]$ se termine par une PILE ; pour le reste, il suffit de placer $k-1$ PILE sur les $n+k-1$ tirages précédents : il y a $\dbinom{n+k-1}{k-1}$ combinaisons possibles.

★★★★★★★

Exercice 18 - Ecricome 2004 E

Une personne envoie chaque jour un mail codé par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B. On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de $0,1$, alors qu'elle est de $0,05$ avec le serveur B.

1.a. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un mail.

Notons E l'évènement "avoir un erreur de transmission lors de l'envoi d'un mail" ; et notons $\mathcal{A}$ l'évènement "le mail est envoyé par le serveur A" ainsi que $\mathcal{B}$ l'évènement "le mail est envoyé par le serveur B".
D'après la formule des probabilités totales, avec $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(\mathcal{A}\cap E)+\mathbb{P}(\mathcal{B}\cap E)\\
&= \mathbb{P}(\mathcal{A})\times\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(E)+\mathbb{P}(\mathcal{B})\times\mathbb{P}_{\mathcal{B}}(E) \quad \text{$\mathbb{P}(\mathcal{A})$ et $\mathbb{P}(\mathcal{B})$ sont non nulles}\\
&= 0,7\times 0,1+0,3\times 0,05\\
&= \frac{7}{100}+\frac{15}{1000}\\
&= \frac{85}{1000}\\
&= \frac{17}{200}
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un mail est égale à $\frac{17}{200}$.

1.b. Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?

Cela revient à calculer $\mathbb{P}_E(\mathcal{A})$.
Puisque $\mathbb{P}(E)\neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_E(\mathcal{A}) &= \frac{\mathbb{P}(\mathcal{A}\cap E)}{\mathbb{P}(E)}\\
&= \frac{\frac{7}{100}}{\frac{17}{200}}\\
&= \frac{14}{17}
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** la probabilité recherchée est égale à $\frac{14}{17}$.

2. Un jour donné, appelé jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA$... signifie que les deux premiers jours, l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3,4,5 il a choisi le serveur B et le jour 6 le serveur A.
Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième de longueur 3 (ce qui est également le cas de la série $BBAAAB$...).
On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 celle de la deuxième série.
Ainsi, pour $k\in\mathbb{N}^*$, dire que $L_1=k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement "le serveur A a été choisi le jour n", et on définit de même l'évènement B_n.

Petite remarque
En toute rigueur, l'énoncé aurait dû attribuer une valeur à L_1 dans le cas où c'est le même serveur qui est toujours choisi... De même pour L_2.

2.a. Déterminer $\mathbb{P}([L_1=2])$.

- On a :

$[L_1=2]$ est réalisé	si, et seulement si,	la première série a une longueur de 2
	si, et seulement si,	le même serveur a été choisi sur les jours 1 et 2, puis l'autre lors du jour 3

Ainsi :

$$[L_1=2]=\left(A_1\cap A_2\cap B_3\right)\cup\left(B_1\cap B_2\cap A_3\right)$$

✘ Attention !
Pour dire que la première série est de longueur 2, il faut indiquer le serveur du troisième jour !

- Or, A_1 et B_1 sont incompatibles, c'est donc également le cas de $A_1\cap A_2\cap B_3$ et $B_1\cap B_2\cap A_3$. Ainsi :

$$\mathbb{P}([L_1=2])=\mathbb{P}\left(A_1\cap A_2\cap B_3\right)+\mathbb{P}\left(B_1\cap B_2\cap A_3\right)$$

Puis, les choix de serveurs étant supposés indépendants les uns des autres, on obtient :

$$\mathbb{P}([L_1=2])=0,7^2\times 0,3+0,3^2\times 0,7$$

2.b. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([L_1=k])=0,3^k\times 0,7+0,7^k\times 0,3$$

Soit $k\in[\![1;+\infty[\![$.

- On a :

$[L_1=k]$ est réalisé	si, et seulement si,	la première série a une longueur de k
	si, et seulement si,	le même serveur a été choisi sur les jours 1 à k, puis l'autre lors du jour $k+1$

Ainsi :

$$[L_1=k]=\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right)\cap B_{k+1}\right)\cup\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k}B_i\right)\cap A_{k+1}\right)$$

- Or, A_{k+1} et B_{k+1} sont incompatibles, c'est donc également le cas de $\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap B_{k+1}$ et $\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) \cap A_{k+1}$.

  Puis, les choix de serveurs étant supposés indépendants les uns des autres, on obtient le résultat voulu.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([L_1 = k]) = 0,3^k \times 0,7 + 0,7^k \times 0,3$.

2.c. Vérifier que $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}([L_1 = k])$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_1 = k]) = 1$.

La convergence de $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}([L_1 = k])$ est assurée car $\big([L_1 = k]\big)_{k\in L_1(\Omega)}$ est un système complet d'évènements et que $\big([L_1 = k]\big)_{k\geq 1}$ en est une sous-famille.
On peut alors se lancer dans le calcul :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_1 = k]) &= 0,7 \sum_{k=1}^{+\infty} 0,3^k + 0,3 \sum_{k=1}^{+\infty} 0,7^k \\
&= 0,7\left(\sum_{k=0}^{+\infty} 0,3^k - 1\right) + 0,3\left(\sum_{k=0}^{+\infty} 0,7^k - 1\right) \\
&= 0,7\left(\frac{1}{1-0,3} - 1\right) + 0,3\left(\frac{1}{1-0,7} - 1\right) \\
&= 0,3 + 0,7 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclusion : la série $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}([L_1 = k])$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_1 = k]) = 1$.

2.d. Montrer que L_1 admet une espérance et la calculer.

✓ Rigueur !
Ce n'est pas vraiment correct, mais l'énoncé ne nous laisse pas le choix. Voir la première remarque de l'exercice.

On avait obtenu $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_1 = n]) = 1$, on peut donc considérer que $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- On sait que :

  L_1 admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in L_1(\Omega)} n\mathbb{P}([L_1 = n])$ est absolument convergente
  si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}([L_1 = n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}([L_1 = n]) = 0,7 \times 0,3 \sum_{n=1}^{N} n0,3^{n-1} + 0,3 \times 0,7 \sum_{n=1}^{N} n0,7^{n-1}$$

  Or, $0,3$ et $0,7$ appartiennent à $]-1;1[$, donc les séries $\sum_{n\geq 1} n0,3^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 1} n0,7^{n-1}$ sont des séries géométriques convergentes .
  Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}([L_1 = n])$ est convergente.

- On en déduit que L_1 admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}([L_1 = n]) \\
&= 0,7 \times 0,3 \sum_{n=1}^{+\infty} n0,3^{n-1} + 0,3 \times 0,7 \sum_{n=1}^{+\infty} n0,7^{n-1} \\
&= 0,7 \times 0,3 \times \frac{1}{(1-0,3)^2} + 0,3 \times 0,7 \times \frac{1}{(1-0,7)^2} \\
&= \frac{3}{7} + \frac{7}{3} \\
&= \frac{58}{21}
\end{aligned}$$

Conclusion : L_1 admet une espérance et $\mathbb{E}(L_1) = \frac{58}{21}$.

2.e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier soigneusement que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\big([L_1 = k] \cap [L_2 = n]\big) = 0,3^{k+1} \times 0,7^n + 0,7^{k+1} \times 0,3^n$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$[L_1 = k] \cap [L_2 = n]$ est réalisé si, et seulement si, la première série est de longueur k et la seconde de longueur n
si, et seulement si, un serveur est choisi des jours 1 à k, puis l'autre des jours $k+1$ à n puis à nouveau le premier le jour $n+1$

✗ Attention !
Pour savoir que la seconde chaîne a une longueur de n, il faut indiquer le serveur qui suivra : celui du jour $k+n+1$.

D'où :

$$[L_1 = k] \cap [L_2 = n] = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{k+n} B_i\right) \cap A_{k+n+1}\right) \cup \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{k+n} A_i\right) \cap B_{k+n+1}\right)$$

Or A_{n+k+1} et B_{n+k+1} sont incompatibles, c'est donc également le cas de $\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{k+n} B_i\right) \cap A_{k+n+1}$ et $\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{k+n} A_i\right) \cap B_{k+n+1}$. Puis, par indépendance du choix des serveurs, on obtient le résultat voulu.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([L_1 = k] \cap [L_2 = n]\big) = 0,3^{k+1} \times 0,7^n + 0,7^{k+1} \times 0,3^n$.

✓ Rigueur !

En fait, $\big([L_1 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'évènements, mais cette notion n'est pas au programme ; et la FPT est bien encore valable pour un SQCE... A mettre en lien avec la première remarque faite sur l'exercice.

2.f. En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, la valeur de $\mathbb{P}([L_2 = n])$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités, avec $\big([L_1 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([L_2 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([L_1 = k] \cap [L_2 = n]\big) && \text{question précédente} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} 0,3^{k+1} \times 0,7^n + 0,7^{k+1} \times 0,3^n && \text{par linéarité de la somme, car } \sum_{k\geq 1} 0,3^{k+1} \text{ et } \sum_{k\geq 1} 0,7^{k+1} \text{ sont convergentes} \\
&= 0,7^n \sum_{k=1}^{+\infty} 0,3^{k+1} + 0,3^n \sum_{k=1}^{+\infty} 0,7^{k+1} && \text{changements d'indices } i = k+1 \\
&= 0,7^n 0,3^2 \sum_{i=0}^{+\infty} 0,3^i + 0,3^n 0,7^2 \sum_{i=0}^{+\infty} 0,7^i \\
&= 0,7^n 0,3^2 \frac{1}{1-0,3} + 0,3^n 0,7^2 \frac{1}{1-0.7} \\
&= 0,3^2 0,7^{n-1} + 0,7^2 0,3^{n-1}
\end{aligned}$$

★ Classique ! ★

Question classique, qui sera revue l'an prochain dans le chapitre sur les couples de variables aléatoires. Autant commencer à se familiariser cette année.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([L_2 = n]) = 0,3^2 0,7^{n-1} + 0,7^2 0,3^{n-1}$.

Remarque : on a facilement $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_2 = n]) = 1$...

★★★★★★★

Exercice 19 - EDHEC 2018 E

On dispose de trois pièces indiscernables au toucher :

- une pièce numérotée 0 donnant PILE avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et FACE avec une probabilité $\frac{1}{2}$
- une pièce numérotée 1 donnant PILE à coup sûr
- une pièce numérotée 2 donnant FACE à coup sûr

L'expérience consiste à choisir de façon équiprobable l'une de ces trois pièces puis la lancer indéfiniment. On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé associé à cette expérience.
Pour $i \in \{0; 1; 2\}$, on note A_i l'évènement "on a choisi la pièce numérotée i". Ainsi, (A_0, A_1, A_2) est un système complet d'évènements.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note P_k l'évènement : "on obtient PILE au lancer numéro k" et $F_k = \overline{P_k}$.
On considère les deux variables aléatoires :

- X donnant le rang d'apparition du premier PILE
- Y donnant le rang d'apparition du premier FACE

On convient de donner à X la valeur 0 si l'on obtient jamais PILE et de donner à Y la valeur 0 si l'on obtient jamais FACE.

1. **Loi de X.**

1.a. Donner $X(\Omega)$.

$X(\Omega) = \mathbb{N}$

1.b. Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_0, A_1, A_2), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=1]) &= \mathbb{P}(A_0 \cap [X=1]) + \mathbb{P}(A_1 \cap [X=1]) + \mathbb{P}(A_2 \cap [X=2]) \\
&= \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}([X=1]) + \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}([X=1]) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}([X=1]) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X=1]) = \frac{1}{2}$.

1.c. Montrer que : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_0, A_1, A_2), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=n]) &= \mathbb{P}(A_0 \cap [X=n]) + \mathbb{P}(A_1 \cap [X=n]) + \mathbb{P}(A_2 \cap [X=n]) \\
&= \mathbb{P}(A_0) \times \mathbb{P}_{A_0}([X=n]) + \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}([X=n]) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}([X=n])
\end{aligned}$$

Or :

- la pièce 1 donne PILE dès le premier lancer et $n \geq 2$, d'où $\mathbb{P}_{A_1}([X=n]) = 0$
- la pièce 2 ne donne jamais PILE, donc $\mathbb{P}_{A_2}([X=n]) = 0$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=n]) &= \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{A_0}(F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n) + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 \\
&= \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{A_0}(F_1) \times \ldots \mathbb{P}_{A_0}(F_{n-1}) \times \mathbb{P}_{A_0}(P_n) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

par indépendance des lancers une fois A_0 réalisé

★Subtile...★
Les évènements $P_1, P_2, \ldots$ sont indépendants pour $\mathbb{P}_{A_0}$; mais pas pour $\mathbb{P}$. Il suffirait pour cela de vérifier que $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \neq \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2)$.

Conclusion : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \mathbb{P}([X=n]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

1.d. En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X = 0])$.

Puisque $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1$.

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1 &\iff \mathbb{P}([X=0]) + \mathbb{P}([X=1]) + \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1 \\
&\iff \mathbb{P}([X=0]) + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \\
&\iff \mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&\iff \mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^2}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&\iff \mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^2} \times 2 \\
&\iff \mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

changement d'indice $i = n - 2$

✘ Attention !
L'expression $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ n'est pas valable quand $n = 1$!!

Conclusion : $\mathbb{P}([X=0]) = \frac{1}{3}$.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.

- On sait que :

$$\begin{array}{lll} X \text{ admet une espérance} & \text{si, et seulement si,} & \text{la série } \sum\limits_{n\in X(\Omega)} n\mathbb{P}([X=n]) \text{ est absolument convergente} \\ & \text{si, et seulement si,} & \text{la série } \sum\limits_{n\geq 0} n\mathbb{P}([X=n]) \text{ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif} \\ & \text{si, et seulement si,} & \text{la série } \sum\limits_{n\geq 2} n\mathbb{P}([X=n]) \text{ est convergente} \end{array}$$

✘ Attention ! L'expression $\mathbb{P}([X=n]) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ n'est pas valable quand $n = 1$... Puis, de toute façon, pour étudier la nature d'une série, inutile de regarder les premiers termes...

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{N} n\mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{3} n \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc la série $\sum\limits_{n\geq 2} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une série géométrique dérivée convergente.

Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 2} n\mathbb{P}([X=n])$ est convergente.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}([X=n]) \\ &= 0\times\mathbb{P}([X=0]) + 1\times\mathbb{P}([X=1]) + \sum_{n=2}^{+\infty} n\mathbb{P}([X=n]) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 0 - 1\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

✘ Attention ! Ne pas oublier que $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n\in X(\Omega)} n\mathbb{P}([X=n])$ et que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

> **Conclusion :** X possède une espérance et $\mathbb{E}(X) = 1$.
> Interprétation : en moyenne, sur un grand nombre de répétitions de l'expérience, le joueur obtiendra son premier PILE au premier lancer.

3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

- Par théorème de transfert :

$$\begin{array}{lll} X^2 \text{ admet une espérance} & \text{si, et seulement si,} & \text{la série } \sum\limits_{n\in X(\Omega)} n^2\mathbb{P}([X=n]) \text{ est absolument convergente} \\ & \text{si, et seulement si,} & \text{la série } \sum\limits_{n\geq 0} n^2\mathbb{P}([X=n]) \text{ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif} \\ & \text{si, et seulement si,} & \text{la série } \sum\limits_{n\geq 2} n^2\mathbb{P}([X=n]) \text{ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif} \end{array}$$

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{N} n^2\mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{3} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{N} \big(n(n-1)+n\big)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{12}\sum_{n=2}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{6}\sum_{n=2}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc les séries $\sum\limits_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et $\sum\limits_{n\geq 2} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ sont des séries géométriques convergentes.

Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 2} n^2\mathbb{P}([X=n])$ est convergente.

- On en déduit que X^2 admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}([X=n]) \\
&= 0 \times \mathbb{P}([X=0]) + 1 \times \mathbb{P}([X=1]) + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}([X=n]) \\
&= \frac{1}{12} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \mathbb{P}([X=1]) + \frac{1}{6} \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{calcul de la question précédente} \\
&= \frac{1}{12} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \mathbb{E}(X) \\
&= \frac{4}{3} + 1
\end{aligned}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens, X admet une variance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 \\
&= \frac{4}{3} + 1 - 1 \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Conclusion : X possède une variance et $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$.

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

Les rôles PILE et FACE sont symétriques ici (car équiprobabilité du choix de la pièce initiale, puis équiprobabilité sur la pièce 0). Donc il est équivalent de compter le rang du premier PILE ou le rang du premier FACE...

Conclusion : X et Y suivent la même loi.

5. 5.a. Montrer que pour tout $j \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\left([X=1]\cap[Y=j]\right) = \mathbb{P}([Y=j])$.

Soit $j \in [\![2;+\infty t$.

Puisque $j \geq 2$, c'est la pièce 0 qui a été choisie... Ainsi :

$$[Y=j] = A_0 \cap P_1 \cap \ldots . \cap P_{j-1} \cap F_j$$

Or $[X=1] = P_1$.

D'où :

$$\begin{aligned}
[X=1]\cap[Y=j] &= P_1 \cap \left(A_0 \cap P_1 \cap \ldots . \cap P_{j-1} \cap F_j\right) \\
&= A_0 \cap P_1 \cap \ldots . \cap P_{j-1} \cap F_j \\
&= [Y=j]
\end{aligned}$$

Les évènements étant égaux, leurs probabilités sont ainsi égales.

Conclusion : pour tout $j \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\left([X=1]\cap[Y=j]\right) = \mathbb{P}(Y=j)$.

5.b. Montrer que pour tout $i \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\left([X=i]\cap[Y=1]\right) = \mathbb{P}([X=i])$.

Raisonnement analogue.

5.c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Puisque $\mathbb{P}([X=1]) = \frac{1}{2}$ et que X et Y suivent la même loi :

$$\mathbb{P}([X=1]) \times \mathbb{P}([Y=1]) = \frac{1}{4}$$

Mais : $[X=1]\cap[Y=1] = \varnothing$, car il est impossible d'avoir PILE et FACE au même lancer. D'où :

$$\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}([X=1]) \times \mathbb{P}([Y=1]) \neq \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])$$

Conclusion : les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

6. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.

6.a. Expliquer pourquoi Z prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

On a :

- $X(\Omega) = Y(\Omega) = N$, donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- $[Z=0] = [X=0]\cap[Y=0] = \varnothing$ (impossible de n'obtenir aucune PILE et aucun FACE)
- $[Z=2] = \left([X=0]\cap[Y=2]\right) \cup \left([X=2]\cap Y=0]\right) \cup \left([X=1]\cap Y=1]\right)$ et ces trois intersections sont vides (impossible de n'avoir aucun PILE et le premier FACE au second lancer... et impossible d'avoir le premier PILE et le premier FACE au premier lancer...).
  D'où $[Z=2] = \varnothing$.
- Pour les autres valeurs : si $[Z=1]$ est possible (justification plus approfondie en question suivante) et si $i \in [\![3;+\infty[\![$, toute issue de $[X=1]\cap[Y=i-1]$ permet de réaliser $[Z=i]$...

Conclusion : $Z(\Omega) = \{1\} \cup [\![3;+\infty ll$.

6.b. Montrer que $\mathbb{P}([Z=1]) = \frac{2}{3}$.

- On a : $[Z=1] = \left([X=0]\cap[Y=1]\right) \cup \left([X=1]\cap[Y=0]\right)$

- De plus, les évènements $\big([X=0]\cap[Y=1]\big)$ et $\big([X=1]\cap[Y=0]\big)$ sont incompatibles. D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=1]) &= \mathbb{P}\big([X=0]\cap[Y=1]\big)+\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=0]\big)\\
&= \mathbb{P}([X=0])\times\mathbb{P}_{[X=0]}([Y=1])+\mathbb{P}([Y=0])\times\mathbb{P}_{[Y=0]}([X=1]) && X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi et } \mathbb{P}([X=0])=\frac{1}{3}\\
&= \frac{1}{3}\times\mathbb{P}_{[X=0]}([Y=1])+\frac{1}{3}\times\mathbb{P}_{[Y=0]}([X=1])
\end{aligned}$$

Mais $\mathbb{P}_{[X=0]}([Y=1])=1$, car si $[X=0]$ est réalisé, cela implique d'avoir FACE dès le premier lancer, et donc $[Y=1]$ est réalisé. De même pour l'autre probabilité conditionnelle...

Conclusion : $\mathbb{P}(Z=1)=\dfrac{2}{3}$.

6.c. Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$[Z=n]=\big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)$$

Soit $n\in[\![3;+\infty[\![$. Puisque (P_1,F_1) est un système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
[Z=n] &= \big(P_1\cap[Z=n]\big)\cup\big(F_1\cap[Z=n]\big) && P_1=[X=1] \text{ et } F_1=[Y=1]\\
&= \big([X=1]\cap[X+Y=n]\big)\cup\big([X=1]\cap[X+Y=n]\big)\\
&= \big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n\in[\![3;+\infty[\![,\ [Z=n]=\big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)$.

6.d. En déduire que :

$$\forall n\in[\![3;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([Z=n])=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Soit $n\in[\![3;+\infty[\![$.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=n]) &= \mathbb{P}\Big(\big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big)\Big) && \text{incompatibilté}\\
&= \mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)+\mathbb{P}\big([Y=1]\cap[X=n-1]\big) && \text{questions 5.a., 5.b. car } n-1\geq 2\\
&= \mathbb{P}([Y=n-1])+\mathbb{P}([X=n-1]) && X \text{ et } Y \text{ ont même loi, et question 1(c) car } n-1\geq 2\\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n\in[\![3;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([Z=n])=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

7. Simulation informatique. On rappelle que, en **Python**, la commande **rd.random()** renvoie un réel aléatoire de $]0;1[$, et que la commande **rd.randint(a,b)** renvoie un entier aléatoire de $[\![a;b[\![$.

7.a. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** suivant afin que la fonction **simulX** renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

```
1  import numpy as np
2  import numpy.random as rd
3  import matplotlib.pyplot as plt
4
5  def simulX():
6      piece=rd.randint(... ,...)
7      x=1
8      if piece==0:
9          lancer=rd.random()
10         while ..............
11             ..............
12             ..............
13     else:
14         if piece==2:
15             ..............
16     return(x)
```

7.b. Justifier que le cas où l'on joue la pièce numérotée 1 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Dans le cas où la pièce 1 est jouée, le programme renverra 1, car `x` prend la valeur 1 dès la ligne 7. Si l'instruction `x=1` avait été placée à l'intérieur du `if piece==0`, il aurait fallu traiter le cas de la pièce 1.

7.c. On souhaite obtenir un histogramme des fréquences des valeurs de X sur 10000 réalisations de l'expérience.

7.c.i. Créer une liste **L** contenant 10000 réalisations de la variable aléatoire X (on pourra faire appel à la fonction **simulX** précédente).

7.c.ii. A l'aide d'une écriture en compréhension, recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que la liste **Labs** contiennent les valeurs $-0.5, 0.5, \ldots, 9.5$.

```
Labs = .....................
plt.hist(L,Labs, density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```

Voici le programme complet qui répond également aux questions précédentes :

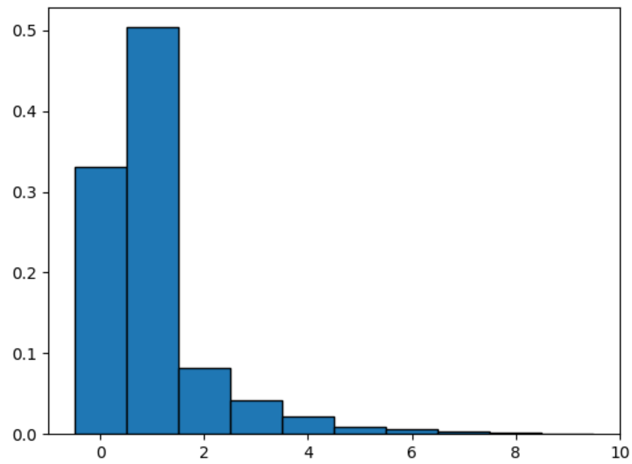
```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simulX():
    piece=rd.randint(0,3)
    x=1
    if piece==0:
        lancer=rd.random()
        while lancer<1/2:
            lancer=rd.random()
            x=x+1
    else:
        if piece==2:
            x=0
    return(x)

L=[simulX() for k in range(10000)]

Labs=[-0.5+k for k in range(0,11)]
plt.hist(L,Labs, density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```

7.c.iii. L'exécution des lignes précédentes permet d'obtenir le graphique suivant :



Expliquer l'intérêt des options `density=True` et `edgecolor='k'`.

`density=True` permet d'obtenir un histogramme de fréquences, et pas un histogramme d'effectifs. `edgecolor='k'`, c'est pour faire joli : on dessine les contours des rectangles pour plus de lisibilité...

Ce graphique permet-il de confirmer la loi obtenue pour la variable aléatoire X ?

Mais carrément !! On vérifie en particulier que pour tout $n \in [\![0;9]\!]$, $\mathbb{P}([X=n])$ est très proche de la fréquence observée sur 10000 répétitions...

☞ Pour info...
C'est encore la loi faible des grands nombres !

★★★★★★★

Exercice 20 - EML 2018 E

Deux joueurs, A et B, décident de s'affronter dans un jeu de hasard.

- Le joueur A lance une pièce donnant PILE avec la probabilité $\frac{2}{3}$, et FACE avec la probabilité $\frac{1}{3}$ jusqu'à l'apparition du second PILE. On note X_A la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues.
- Le joueur B lance une pièce donnant PILE avec la probabilité p ($p \in]0;1[$), et FACE avec la probabilité $q = 1 - p$ jusqu'à l'apparition du premier PILE. On note X_B la variable aléatoire égale au nombre de FACE alors obtenues.

Dans ces conditions de jeu, X_A et X_B sont indépendantes. Le gagnant est celui ayant obtenu le moins de FACE. En cas d'égalité, aucun des deux joueurs ne gagne : il y a match nul.

On note :

- G l'événement "A gagne",
- H l'événement "B gagne",
- N l'évènement "il y a match nul".

On admet que le jeu se termine presque-sûrement.

1. **Loi de X_B.** On note Y_B le nombre de lancers effectués par le joueur B.

   1.a. Reconnaître la loi de Y_B. Préciser $Y_B(\Omega)$, $\mathbb{P}([Y_B = k])$ pour tout $k \in Y_B(\Omega)$, puis rappeler son espérance et sa variance.

   - **Expérience :** pour le joueur B, l'expérience consiste en une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.
   - **Variable aléatoire :** Y_B prend alors comme valeur le rang de ce premier succès.

   Conclusion : $Y_B \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$
   $Y_B(\Omega) = \mathbb{N}^*$; $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y_B = n]) = q^{n-1}p$
   $E(Y_B) = \frac{1}{p}$; $V(Y_B) = \frac{q}{p^2}$

   1.b. En déduire la loi de X_B ainsi que son espérance et sa variance.

   X_B renvoie le nombre de FACE obtenues avant le premier PILE ; donc :

   $$X_B = Y_B - 1$$

   On en déduit :

   - $X_B(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_B = k]) &= \mathbb{P}([Y_B - 1 = k]) \\ &= \mathbb{P}([Y_B = k+1]) \\ &= q^k p \end{aligned}$$

   - Puisque Y_B possède une espérance et une variance, et que X_B est une transformée affine de Y_B, on en déduit que X_B possède également une espérance et une variance et :

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_B) &= \mathbb{E}(Y_B - 1) \\ &= \mathbb{E}(Y_B) - 1 \quad \text{linéarité de l'espérance} \\ &= \frac{1-p}{p} \\ &= \frac{q}{p} \end{aligned}$$

   ainsi que :

   $$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_B) &= \mathbb{V}(Y_B - 1) \\ &= \mathbb{V}(Y_B) \\ &= \frac{q}{p^2} \end{aligned}$$

   ☞ **Rappel...**
   $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

   Conclusion : $X_B(\Omega) = \mathbb{N}$; $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_B = k]) = q^k p$
   $\mathbb{E}(X_B) = \frac{q}{p}$; $\mathbb{V}(X_B) = \frac{q}{p^2}$.

   1.c. On note E l'évènement "le joueur B obtient un nombre pair de FACE". Calculer $\mathbb{P}(E)$.

   On a :

   $$E = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [X_B = 2k]$$

   Important !
   Il faut savoir écrire sans erreur cet évènement...

   Or, la famille $\left([X_B = 2k]\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille constituée d'évènements deux à deux incompatibles, d'où :

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_B = 2k]) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k}p \\ &= p\sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^k \quad p \neq 0, \text{ donc } q \neq 1 \\ &= p\frac{1}{1-q^2} \\ &= \frac{p}{(1-q)(1+q)} \quad \text{car } p = 1 - q \\ &= \frac{1}{1+q} \end{aligned}$$

   Conclusion : $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{1+q}$.

2. **Loi de X_A.**

2.a. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_A.

$X_A(\Omega) = \mathbb{N}$.

2.b. Soit $n \in X_A(\Omega)$. Écrire l'évènement $[X_A = n]$ comme union d'évènements deux à deux incompatibles. En déduire :

$$\mathbb{P}([X_A = n]) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$$

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- P_k l'évènement : "obtenir PILE au lancer k"
- F_K l'évènement : "obtenir FACE au lancer k"

L'évènement $[X_A = n]$ est réalisé si, et seulement si, le tirage fournit n FACE et 2 PILE, dont un en dernière position (et l'autre peut se situer à toutes les places possibles entre 1 et $n+1$). Ainsi :

$$[X_A = n] = \bigcup_{k=1}^{n+1} \left(P_k \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} F_i \right) \cap P_{n+2} \right)$$

Par incompatibilité, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_A = n]) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\left(P_k \cap \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} F_i \right) \cap P_{n+2} \right) && \text{par indépendance des lancers, donc indépendance mutuelle des } P_k \text{ et } F_k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} p^2 q^n \\
&= (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_A = n]) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

2.c. Justifier que X_A possède une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.

- On sait que :

X_A admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n \in X_A(\Omega)} n\mathbb{P}([X_A = n])$ est absolument convergente

si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geq 0} n\mathbb{P}([X_A = n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}([X_A = n]) &= \sum_{n=0}^{N} n(n+1)\frac{4}{3^{n+2}} && \text{changement d'indice } k = n+1 \\
&= \sum_{k=1}^{N+1} k(k-1)\frac{4}{3^{k+1}} \\
&= \frac{4}{3^3}\sum_{k=1}^{N+1} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}
\end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{3} \in]-1;1[$, donc la série $\sum\limits_{k\geq 1} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$ est une série géométrique convergente.

Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 0} n\mathbb{P}([X_A = n])$ est convergente.

- On en déduit que X_A admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_A) &= \frac{4}{3^3}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\
\frac{4}{3^3}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} & \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(X_A) = 1$.
Interprétation : sur un grand nombre de répétitions de cette expérience, le joueur A obtiendra en moyenne 1 FACE.

3. **Le jeu.** L'objectif de cette question est d'étudier le jeu en question.

3.a. **Simulation informatique.**

3.a.i. Écrire une fonction **Python** de sorte que la commande `simulXB(p)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X_B lorsque la probabilité d'obtenir PILE est p.

✘ Attention !
On veut le nombre de FACE avant le premier PILE. Donc soit on compte, dans le programme, le nombre de FACE (d'où une initialisation à $n = 0$) soit on compte le nombre de lancers et on retourne alors $n - 1$.

```python
import numpy.random as rd

def simulXB(p):
    n=0
    while rd.rand()>p:
        n=n+1
    return n
```

3.a.ii. Expliquer ce que permet d'obtenir la fonction **mystere** suivante :

```python
import numpy.random as rd

def mystere():
    n=0
    while rd.random()<1/3:
        n=n+1
    while rd.random()<1/3:
        n=n+1
    return n
```

n commence à 0, puis il augmente de 1 tant que `rd.random()<1/3`, autrement dit, tant que le joueur A obtient FACE.

Il s'arrête ensuite (pour le premier PILE), avant de recommencer à augmenter de 1 à chaque nouveau FACE obtenu, jusqu'à l'apparition d'un nouveau PILE.

Par conséquent : à la fin de son exécution, le programme renvoie une réalisation de la variable aléatoire X_B.

3.a.iii. Recopier et compléter les lignes manquantes de la fonction ci-dessous de sorte que les variables locales **pG,pH,pN** contiennent respectivement des valeurs approchées de $\mathbb{P}(G)$, $\mathbb{P}(H)$, $\mathbb{P}(N)$.

```python
def probas(p):
    nG,nH,nN=0,0,0
    for k in range(10000):
        XA=mystere()
        XB=simulXB(p)
        if ......
            nG=nG+1
        elif ......
            ......
        else:
            ......
    pG,pH,pN = ......
    return pG,pH,pN
```

Le voici, complet :

Petite remarque

Le résultat est basé sur la loi faible des grands nombres (au programme de 2ème année) qui affirme que, pour un grand nombre de répétitions, la fréquence observée s'approche de la probabilité.

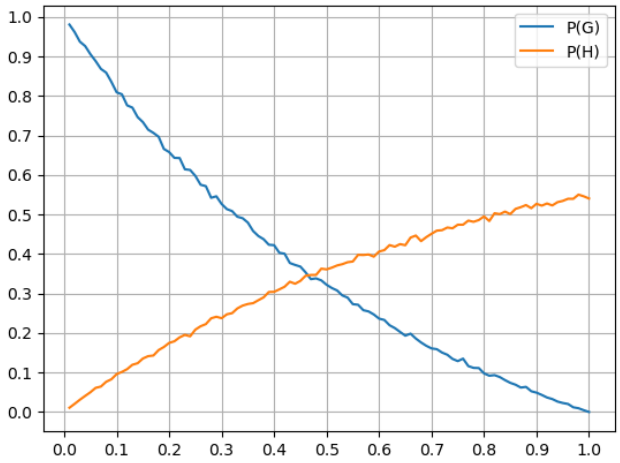
```python
import numpy.random as rd

def probas(p):
    nG,nH,nN=0,0,0
    for k in range(10000):
        XA=mystere()
        XB=simulXB(p)
        if XA<XB:
            nG=nG+1
        elif XA>XB:
            nH=nH+1
        else:
            nN=nN+1
    pG,pH,pN=nG/10000,nH/10000,nN/10000
    return pG,pH,pN
```

3.a.iv. L'exécution de la commande `probas(0.66)` renvoie : `(0.1911, 0.4344, 0.3745)`. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Quand $p = 0,66$, on a : $\mathbb{P}(G) \simeq 0,2$; $\mathbb{P}(H) \simeq 0,43$ et $\mathbb{P}(N) \simeq 0,37$.

3.a.v. Cette fonction nous permet de tracer, en fonction de p, une estimation de $\mathbb{P}(G)$ et $\mathbb{P}(H)$. On obtient le graphique suivant :



Interpréter, dans le contexte de l'exercice, l'abscisse du point d'intersection entre ces deux courbes.

Le point d'intersection correspond à une équité du jeu. Autrement dit, les joueurs A et B semblent avoir à peu près la même probabilité de victoire lorsque $p \simeq 0,47$.

3.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_B > n]) = q^{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Puisque $X_B(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_B > n]) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_B = k]) && \text{question } \mathbf{1.b.} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k p && \text{changement d'indice } i = k-(n+1) \\
&= p \sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+n+1} \\
&= p q^{n+1} \sum_{i=0}^{+\infty} q^i && q \neq 1 \\
&= p q^{n+1} \frac{1}{1-q} && p = 1-q \\
&= q^{n+1}
\end{aligned}$$

Petite remarque
On pouvait aussi démarrer de : $\mathbb{P}([X_B > n]) = 1 - \mathbb{P}([X_B \leq n])$...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_B > n]) = q^{n+1}$.

3.c. Justifier l'égalité $\mathbb{P}(G) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_A = n])\mathbb{P}([X_B > n])$. En déduire que $\mathbb{P}(G) = \dfrac{4q}{(3-q)^2}$.

- Remarquons déjà que :
$$G = [X_A < X_B]$$
Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_A = n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_A < X_B]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_A = n] \cap [X_A < X_B]\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_A = n] \cap [n < X_B]\big) && X_A \text{ et } X_B \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_A = n])\mathbb{P}([X_B > n])
\end{aligned}$$

Petite remarque
On peut aussi justifier que
$$[X_A < X_B] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X_A = n] \cap [X_B > n]$$
puis appliquer $\mathbb{P}$ sur cette union d'évènements deux à deux incompatibles... Mais le bon réflexe reste l'utilisation de la FPT, qui évite d'oublier l'argument que $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ pour écrire l'union sur $\mathbb{N}^*$...

Conclusion : $\mathbb{P}(G) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_A = n])\mathbb{P}([X_B > n])$.

- Reprenons le calcul :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_A = n])\mathbb{P}([X_B > n]) && \text{questions 2.b. et 3.b.}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{4}{3^{n+2}} q^{n+1}\\
&= \frac{4q}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{q}{3}\right)^n && \text{changement d'indice } k = n+1\\
&= \frac{4q}{9}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{q}{3}\right)^{k-1} && \frac{q}{3} \neq 1\\
&= \frac{4q}{9}\frac{1}{\left(1-\frac{q}{3}\right)^2}\\
&= \frac{4q}{(3-q)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(G) = \dfrac{4q}{(3-q)^2}$.

3.d. Déterminer $\mathbb{P}(N)$.

Remarquons déjà que :

$$N = [X_A = X_B]$$

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_A = n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_A = X_B]) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\big([X_A = n]\cap[X_A = X_B]\big)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\big([X_A = n]\cap[X_B = n]\big) && X_A \text{ et } X_B \text{ sont indépendantes}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X_A = n])\mathbb{P}([X_B = n]) && \text{questions 1.b. et 2.b.}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{4}{3^{n+2}}q^n p\\
&= \frac{4p}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{q}{3}\right)^n && \text{calcul de la question précédente}\\
&= \frac{4p}{9}\frac{1}{\left(1-\frac{q}{3}\right)^2}\\
&= \frac{4p}{(3-q)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(N) = \dfrac{4p}{(3-q)^2}$.

Petite remarque

On peut aussi justifier que

$$[X_A = X_B] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[X_A = n]\cap[X_B = n]$$

puis appliquer $\mathbb{P}$ sur cette union d'évènements deux à deux incompatibles... Mais le bon réflexe reste l'utilisation de la FPT, qui évite d'oublier l'argument que $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ pour écrire l'union sur $\mathbb{N}^*$...

★Subtile...★

(G, H, N) n'est pas un système complet d'évènement, car l'issue conduisant à aucun PILE pour le joueur B et pas de 2ème PILE (ou aucun PILE) pour le joueur A n'appartient à aucun de ces trois évènements...

En revanche, puisque le jeu a presque-sûrement une fin, on a bien $\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(N) = 1$: autrement dit, (G, H, N) est un système quasi-complet d'évènements. C'est une condition suffisante pour appliquer, par exemple, la FPT (même si elle n'est au programme qu'avec des SCE)...

3.e. En déduire la valeur de p à choisir pour que le jeu soit équitable.

Le jeu est équitable si, et seulement si, $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(H)$.

Or : (G, H, N) est un système quasi-complet d'évènements, d'où :

$$\mathbb{P}(H) = 1 - \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(N)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\text{le jeu est équitable} \quad &\text{si, et seulement si :} \quad \mathbb{P}(G) = 1 - \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(N)\\
&\text{si, et seulement si :} \quad 2\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(N) = 1
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
2\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(N) = 1 &\iff \frac{8q+4p}{(3-q)^2} = 1 && 3-q\neq 0\,;\ p = 1-q\\
&\iff 4 + 4q = (3-q)^2\\
&\iff q^2 - 10q + 5 = 0\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} q = 5 - 2\sqrt{5}\\ \text{ou}\\ q = 5 + 2\sqrt{5}\end{array}\right. && q \in]0;1[\\
&\iff q = 5 - 2\sqrt{5}\\
&\iff p = 2\sqrt{5} - 4
\end{aligned}$$

Conclusion : le jeu est équitable lorsque $p = 2\sqrt{5} - 4 \simeq 0,47$.

Petite remarque

Cela confirme le graphique de la question 3.a.v....

★★★★★★★

Exercice 21 - Mélange EML 2010 E et EDHEC 2007 E

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1 etX_2 les variables aléatoires égales aux durées respectives des opérations des clients C_1 et C_2. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1-p$.
Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. **1.a.** Rappeler la loi de la variable aléatoire X_1 ainsi que son espérance et sa variance.

Conclusion : $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$; $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_1 = k]) = q^{k-1}p$; $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{p}$; $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{q}{p^2}$.

1.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_1 \leq n]) = 1 - q^n$. Cette relation est-elle encore valable quand $n = 0$?

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_1 \leq n]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}p && \text{changement d'indice } i = k-1 \\ &= p\sum_{i=0}^{n-1} q^i && q \neq 1 \text{ car } p \neq 0 \\ &= p\frac{1-q^n}{1-q} && p = 1-q \\ &= 1-q^n \end{aligned}$$

- Ensuite, on sait que $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $\mathbb{P}([X_1 \leq 0]) = 0$. Et $1 - q^0 = 0$. La relation est donc encore valable quand $n = 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_1 \leq n]) = 1 - q^n$.

> **Petite remarque**
> On peut également faire ainsi :
> • Puisque $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a : $[X_1 \leq n] = \bigcup_{k=1}^{n} [X_1 = k]$
> • par incompatibilité, on obtient...

2. On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente du client C_3 avant de pouvoir se présenter à un guichet. De cette façon, $T = \min(X_1, X_2)$.

2.a. Sans utiliser la commande **min**, écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **simulT(p)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire T dans le cas où X_1 et X_2 suivent des lois géométriques de paramètre p.

```python
import numpy.random as rd

def simulT(p):
    X1=rd.geometric(p)
    X2=rd.geometric(p)
    if X1<X2:
        return X1
    else:
        return X2
```

2.b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}([T > n])$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T > n]) &= \mathbb{P}([\min(X_1, X_2) > n]) \\ &= \mathbb{P}\left([X_1 > n] \cap [X_2 > n]\right) && \text{indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= \mathbb{P}([X_1 > n]) \times \mathbb{P}([X_2 > n]) \\ &= \left(1 - \mathbb{P}([X_1 \leq n])\right)\left(1 - \mathbb{P}([X_2 \leq n])\right) && \text{question 2.a., et } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi} \\ &= \left(1-(1-q^n)\right)^2 \\ &= q^{2n} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([T > n]) = q^{2n}$.

2.c. En déduire que T suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

- Puisque X_1 et X_2 suivent des lois géométriques, on a déjà $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  On a :
  $$[T \geq n] = [T = n] \cup [T > n]$$
  Or, les évènements $[T = n]$ et $[T > n]$ sont incompatibles, d'où :
  $$\mathbb{P}([T \geq n]) = \mathbb{P}([T = n]) + \mathbb{P}([T > n])$$
  Et ainsi :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([T = n]) &= \mathbb{P}([T \geq n]) - \mathbb{P}([T > n]) && T(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \\ &= \mathbb{P}([T > n-1]) - \mathbb{P}([T > n]) && \text{question précédente, licite car } n-1, n \in \mathbb{N} \\ &= q^{2n-2} - q^{2n} \\ &= q^{2n-2}(1-q^2) \\ &= \left(1-(1-q^2)\right)^{n-1}(1-q^2) \end{aligned}$$

Conclusion : T suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

> **♣ Méthode !**
> Si $Z = \max(X, Y)$, on travaille sur $\mathbb{P}([T \leq x])$ (la fonction de répartition) pour ensuite avoir la loi de T.
> Si $Z = \min(X, Y)$, on travaille sur $\mathbb{P}([T > x])$ (ou $\mathbb{P}([T \geq x])$ pour ensuite avoir la loi de T (ou reconnaître sa fonction de répartition).
> C'est bien ce que demande l'énoncé dans cet enchaînement de questions.

3. On définit maintenant la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.

3.a. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([\Delta = 0])$.

On a :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([\Delta=0]) & = & \mathbb{P}([|X-1-X_2|=0]) & \\
 & = & \mathbb{P}([X_1=X_2]) & \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X_1=X_2]\cap[X_2=k]\right) & \text{formule des probabilités totales, avec } ([X_2=k])_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ comme sce} \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X_1=k]\cap[X_2=k]\right) & \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1=k])\times\mathbb{P}([X_2=k]) & \text{indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-2}p^2 & X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent des lois géométriques de paramètre } p \\
 & = & p^2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} & \\
 & = & p^2\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i} & \text{changement d'inifice } i=k-1 \\
 & = & p^2\dfrac{1}{1-q^2} & \\
 & = & \dfrac{p^2}{(1-q)(1+q)} & \\
 & = & \dfrac{p}{1+q} & p=1-q
\end{array}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([\Delta = 0]) = \dfrac{p}{1+q}$.

Petite remarque

On peut aussi justifier que $[\Delta = 0] = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}[X_1 = k]\cap[X_2 = k]$... Mais le bon réflexe reste l'utilisation de la FPT, qui évite d'oublier l'argument que $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ pour écrire l'union sur $\mathbb{N}^*$...

3.b. Soit n un entier naturel non nul. Établir :

$$\mathbb{P}([\Delta = n]) = 2\frac{pq^n}{1+q}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl}
[\Delta = n] & = & [|X_1-X_2|=n] \\
 & = & [X_1-X_2=n]\ \cup[X_2-X_1=n]
\end{array}$$

Or $n\neq 0$, donc les évènements $[X_1-X_2=n]$ et $[X_2-X_1=n]$ sont incompatibles, d'où :

$$\mathbb{P}([\Delta=n]) = \mathbb{P}([X_1-X_2=n]) + \mathbb{P}([X_2-X_1=n])$$

Mais X_1 et X_2 suivent toutes deux la même loi, donc X_1-X_2 et X_2-X_1 également et ainsi : $\mathbb{P}([X_2-X_1=n]) = \mathbb{P}([X_1-X_2=n])$.

Par conséquent :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([\Delta=n]) & = & 2\mathbb{P}([X_1=X_2+n]) & \\
 & = & 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X_2=k]\cap[X_1=X_2+n]\right) & \text{formule des probabilités totales avec } \left([X_2=k]\right)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ comme sce} \\
 & = & 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X_2=k]\cap[X_1=k+n]\right) & \\
 & = & 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=k])\mathbb{P}([X_1=k+n]) & \text{indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\
 & = & 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}pq^{k+n-1}p & k\in X_2(\Omega) \text{ et } k+n\in X_1(\Omega) \\
 & = & 2p^2q^k\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} & \\
 & = & 2p^2q^n\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} & \\
 & = & 2p^2q^n\dfrac{1}{1-q^2} & \text{calcul fait en question précédente} \\
 & = & \dfrac{2pq^nk}{1+q} &
\end{array}$$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([\Delta=k]) = 2\dfrac{pq^n}{1+q}$.

3.c. Justifier alors que $\Delta(\Omega) = \mathbb{N}$.

Par double-inclusion...

$\boxed{\subset}$ Immédiat X_1 et X_2 sont à valeurs entières et que $\Delta = |X_1 - X_2|$.

$\boxed{\supset}$ Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après les deux questions précédentes, on a $\mathbb{P}([\Delta=n])\neq 0$, donc $[\Delta=n]\neq\varnothing$. Ainsi, $n\in\Delta(\Omega)$.

Conclusion : $\Delta(\Omega) = \mathbb{N}$.

3.d. Montrer que Δ admet une espérance et la calculer.

- On sait que :

Δ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n\in\Delta(\Omega)} n\mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente

si, et seulement si, la série $\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([\Delta=n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}([\Delta=n]) &= \sum_{n=0}^{N} n\frac{2pq^n}{1+q}\\ &= \frac{2pq}{1+q}\sum_{n=0}^{N} nq^{n-1}\end{aligned}$$

Or $q\in]-1;1[$, donc la série $\sum_{n\geq 0} nq^{n-1}$ est une série géométrique convergente. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([\Delta=n])$ est convergente.

- On en déduit que Δ admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\Delta) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}([\Delta=n])\\ &= \frac{2pq}{1+q}\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1}\\ &= \frac{2pq}{1+q}\frac{1}{(1-q)^2} && p=1-q\\ &= \frac{2q}{1-q^2}\end{aligned}$$

Conclusion : Δ admet une espérance et $\mathbb{E}(\Delta)=\dfrac{2q}{1-q^2}$.

4. Dans cette question, on suppose que $p=\dfrac{1}{2}$. Ainsi, d'après le résultat de la question 2.c. la variable aléatoire T suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{3}{4}$. Afin de compenser son attente, le client C_3 se voit proposer une réduction sur son prochain billet de train.
Si $n\in\mathbb{N}^*$ désigne l'attente subie par C_3 (représentée par la variable aléatoire T), alors celui-ci pioche au hasard un jeton dans une urne composée de n jetons numérotés de 1 à n.
Pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, le tirage du jeton numéro k entraînera une réduction de k euros. On note R la variable aléatoire égale au montant de la réduction obtenue par le client C_3.

4.a. Soient $(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}_{[T=n]}([R=k])$. *On distinguera les cas $k>n$ et $k\leq n$.*

Soit $(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.
Supposons l'évènement $[T=n]$ réalisé. Dans ce cas, l'urne est composée de n jetons numérotés de 1 à k.

- Si $k>n$:
Puisque $k>n$, il est impossible de tirer un jeton dont le numéro est k. D'où :

$$\mathbb{P}_{[T=n]}([R=k])=0$$

- Si $k\leq n$:
L'évènement $[R=k]$ est ainsi réalisé si, et seulement si, on tire le jeton numéro k parmi les n jetons possibles.
Par équiprobabilité du choix des jetons dans l'urne, on a alors :

$$\mathbb{P}_{[T=n]}([R=k])=\frac{1}{n}$$

Conclusion : pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{[T=n]}([R=k])=\begin{cases}0 & \text{si } k>n\\ \dfrac{1}{n} & \text{si } k\leq n\end{cases}$.

4.b. En déduire que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([R=k])=3\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([T=n]\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\big([T=n]\cap[R=k]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([R=k]) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\big([T=n]\cap[R=k]\big) && \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([T=n])\neq 0\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}([T=n])\mathbb{P}_{[T=n]}([R=k]) && \mathbb{P}_{[T=n]}([R=k])=0 \text{ si } n<k\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}([T=n])\mathbb{P}_{[T=n]}([R=k]) && \text{question précédente}\\ &= \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1}\right)^{n-1}\frac{1}{n}\\ &= 3\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\end{aligned}$$

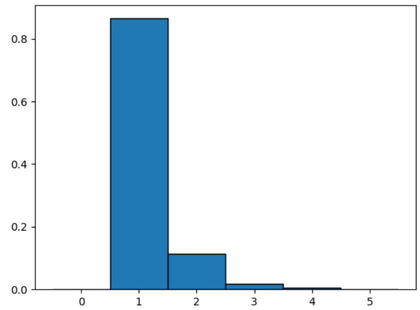
Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([R=k]) = 3\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

4.c. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simulR()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire R.

```
import numpy.random as rd

def simulR():
    T=simulT(1/2)
    return rd.randint(1,T+1)
```

4.d. Écrire un programme **Python** dont l'exécution permettrait d'obtenir le graphique ci-dessous, représentant l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire R.



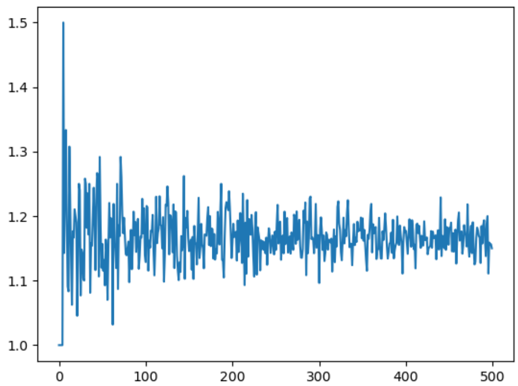

```
import numpy.random as rd

LR=[simulR() for k in range(10000)]
Labs=[-0.5+k for k in range(0,7)]
plt.hist(LR,Labs,edgecolor='k',density=True)
plt.show()
```

4.e. On considère la fonction `mystere` écrite en **Python** :

```
def mystere():
    LE=[]
    for n in range(1,501):
        LR=[simulR() for k in range(n)]
        E=sum(LR)/n
        LE.append(E)
    plt.plot(range(500),LE)
    plt.show()
```

L'exécution de `mystere()` affiche le graphique ci-dessous :



Interpréter ce graphique. On veillera en particulier à décrire le contenu de la liste `LE` après l'exécution de `mystere()`.

- Ici, n parcourt $[\![1;1000]\!]$. Pour chaque $n \in [\![1;1000]\!]$, `LR` sera une liste de n réalisations de la variable aléatoire R ; et `E` sera la moyenne des valeurs de R sur ces n réalisations.
- Ainsi, la liste `LE` contient 1000 moyennes de réalisations de R sur des répétitions de plus en plus nombreuses.

Le graphique permet alors d'observer que la *moyenne empirique* semble se stabiliser autour de 1,15. D'après la loi faible des grands nombres, on peut donc penser que X possède une espérance environ égale à 1,15.

Petite remarque

Ni l'expression *moyenne empirique*, ni la mention de la *loi faible des grands nombres* ne so…

☞ Pour info...

On trouve $\mathbb{E}(R) = \dfrac{7}{6}$ calcul qui peut être fait d'ailleurs, en admettant simplement la permutation des sommes nécessaire... après avoir justifié l'existence de

4.f. **4.f.i.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$.

On a, en commençant par le changement d'indice $i = k - 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} x^{i} \quad \text{↙} x \neq 1 \\ &= \frac{1-x^n}{1-x}\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$.

4.f.ii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \ln(4) - \ln(3) - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x} dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{4}\right],\ \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

D'où, en intégrant de 0 à $\frac{1}{4}$, licite car les fonctions en jeu sont continue sur le segment $\left[0; \frac{1}{4}\right]$:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1-x^n}{1-x} dx$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{1}{4}} x^{k-1} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1-x} dx - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x} dx$$

Autrement dit :

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x^k}{k}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \left[-\ln(1-x)\right]_0^{\frac{1}{4}} - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x} dx$$

Et ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k = -\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x} dx$$

> **Conclusion :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \ln(4) - \ln(3) - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x} dx$.

4.f.iii. Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x} dx = 0$.

> **➠Réflexe !** L'intégrande est positive... On cherche donc à encadrer l'intégrale (et donc l'intégrande auparavant) par une expression de limite nulle quand $n \to +\infty$... Ce x^n nous fait de l'œil !

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  - Soit $x \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$. On a ainsi :

$$\frac{3}{4} \leq 1 - x \leq 1$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\frac{4}{3} \geq \frac{1}{1-x} \geq 1$$

Puis, comme $x^n \geq 0$:

$$\frac{4}{3}x^n \geq \frac{x^n}{1-x} \geq x^n$$

On a donc établi, par transitivité :

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{4}\right],\ 0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{4}{3}x^n$$

  - Par croissance de l'intégrale, licite car $\frac{1}{4} \geq 0$ (les fonctions en jeu sont continues sur le segment $\left[0; \frac{1}{4}\right]$) :

$$0 \leq \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{4}{3}x^n dx$$

Or :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{4}{3}x^n dx = \frac{4}{3(n+1)}$$

- On a ainsi démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \frac{4}{3(n+1)}$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{4}{3(n+1)} = 0$$

> **Conclusion :** par théorème d'encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x} dx = 0$.

4.f.iv. Établir alors que $\mathbb{P}([R=1]) = 3\big(\ln(4)-\ln(3)\big)$ puis donner la valeur de $\mathbb{P}([R=2])$.

- D'après la question **4.b.** :

$$\mathbb{P}([R=1]) = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Mais, d'après les deux questions précédentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \ln(4)-\ln(3)$$

Conclusion : $\mathbb{P}([R=1]) = 3\big(\ln(4)-\ln(3)\big)$.

- De la même façon :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([R=2]) & = & 3\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\
& = & 3\left(3\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{4}\right) \\
& = & 3\mathbb{P}([R=1]) - \dfrac{3}{4} \\
& = & 3\big(\ln(4)-\ln(3)\big) - \dfrac{3}{4}
\end{array}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([R=2]) = 3\mathbb{P}([R=1]) - \frac{3}{4} = 3\big(\ln(4)-\ln(3)\big) - \frac{3}{4}$.

4.f.v. Utiliser les résultats précédents pour donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([R\geq 3])$. *On donne :* $\mathbb{P}([R=1]) \simeq 0,86$.

Puisque $R(\Omega) = \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([R\geq 3]) & = & 1 - \big(\mathbb{P}([R=1]) + \mathbb{P}([R=2])\big) \\
& = & 1 - \left(2\mathbb{P}([R=1]) - \dfrac{3}{4}\right) \\
& = & \dfrac{7}{4} - 2\mathbb{P}([R=1]) \\
& \simeq & 1,75 - 2\times 0,86
\end{array}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([R\geq 3]) \simeq 0,03$.

Petite remarque

Vous pensiez vraiment pouvoir obtenir une grosse réduction à la SNCF ?!

★★★★★★★

Exercice 22 - EDHEC 2019 E

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une balle noire non numérotée et $n-1$ balles blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces balles au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la balle noire.
Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : "le i-ème tirage donne une balle blanche", on pose $N_i = \overline{B_i}$ et on note X_n la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la balle noire.

1. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X_n.

$X_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
Justifions ce résultat (même si ce n'était ici pas demandé). Il s'agit d'établir l'égalité de deux ensembles, raisonnons pas double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Puisque X_n est le rang d'apparition de la balle noire, on a déjà $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Mais, puisque les tirages sont effectués sans remise et qu'il y a n balles dans l'urne, on a en fait :

$$X_n(\Omega) \subset [\![1; n]\!]$$

$\boxed{\supset}$ Soit $k \in [\![1; n]\!]$.

- L'évènement $[X_n = 1]$ est réalisé en tirant la balle noire dès le premier tirage.
- L'évènement $[X_n = k]$ est par exemple réalisé par l'issue (le k-uplet) $(B, \dots, B, N)$, contenant $k-1$ balles blanches puis la noire.

Ainsi, $[X_n = k] \neq \varnothing$.
D'où :

$$[\![1; n]\!] \subset X_n(\Omega)$$

Conclusion : $X_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

2. 2.a. Pour tout $i \in [\![2; n-1]\!]$, déterminer $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i)$.

Soit $i \in [\![2; n-1]\!]$.
Supposons l'évènement $B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}$ réalisé. Les $i-1$ premier tirages ont ainsi tous donné une balle blanche. Par conséquent, les tirages étant effectués sans remise : pour le i-ème tirage, l'urne est composée de $n-(i-1)$ balles, dont toujours la noire.
Mais :

l'évènement B_i est réalisé si, et seulement si, au i-ème tirage, on pioche une balle blanche
si, et seulement si, au i-ème tirage, on pioche une des $n-i$ balles blanches restantes parmi les $n-i+1$ balles restantes

Petite remarque
L'énoncé sous-entend ici que $\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}) \neq 0$.

Ainsi, par équiprobabilité du choix des balles dans l'urne, on a :

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$$

Conclusion : pour tout $i \in [\![2; n-1]\!]$, $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

2.b. Établir alors :

$$\forall k \in X_n(\Omega),\ \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{n}$$

Soit $k \in [\![1; n]\!]$.

- **Si $k = 1$:**
L'évènement $[X_n = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on pioche directement la balle noire.
Ainsi :

$$[X_n = 1] = N_1$$

Et alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = 1]) &= \mathbb{P}(N_1) \quad \text{équiprobabilité du choix des balles} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

- **Si $k \in [\![2; n]\!]$:**
L'évènement $[X_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, les $k-1$ premiers tirages ont donné des balles blanches et la balle noire a été tirée au k-ième. D'où :

$$\begin{aligned} [X_n = k] &= \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i \right) \cap N_k \\ &= B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k \end{aligned}$$

Petite remarque
En prêtant un peu attention à l'énoncé, on remarque que l'évènement N_n n'est pas défini. Simple oubli semble-t-il, utilisons-le quand-même, sa définition est implicite.

Ainsi, d'après la formule des probabilités composées (puisque $\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}) \neq 0$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) \end{aligned}$$

Or :

- $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{n-1}{n}$
- et, par un raisonnement analogue à ce qui a été fait en question précédente :

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) = \frac{1}{n-k+1}$$

D'où, d'après la question précédente (licite, car $k \leq n$, donc $k-1 \in [\![2; n-1]\!]$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \quad \text{télescopage} \\ &= \frac{1}{n} \times 1 \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in X_n(\Omega),\ \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{1}{n}$.

2.c. En déduire l'espérance et la variance de X_n, notées respectivement $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

D'après la question précédente, on voit que X_n suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

Conclusion : X_n possède une espérance et une variance et : $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la balle numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

3.a. Pour tout $k \in X_n(\Omega)$, montrer que :

$$\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [Y = 0]\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

Soit $k \in [\![1;n]\!]$.

L'évènement $[X_n = k] \cap [Y = 0]$ est réalisé si, et seulement si, la balle noire est tirée au k-ième tirage et la balle numéro 1 n'a pas été tirée
si, et seulement si, les tirages 1 à $k-1$ ont donné une balle blanche numérotée 0 et le k-ième tirage la noi

En notant, pour tout $i \in [\![1;n-1]\!]$, $B_{i,0}$: "le i-ème tirage donne une balle blanche numérotée 0", on a ainsi :

$$[X_n = k] \cap [Y = 0] = B_{1,0} \cap B_{2,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0} \cap N_k$$

D'où, d'après la formule des probabilités composées (puisque $\mathbb{P}(B_{1,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0}) \neq 0$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [Y = 0]\Big) &= \mathbb{P}(B_{1,0} \cap B_{2,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0} \cap N_k) \\ &= \mathbb{P}(B_{1,0}) \times \mathbb{P}_{B_{1,0}}(B_{2,0}) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_{1,0}\cap\ldots\cap B_{k-2,0}}(B_{k-1,0}) \times \mathbb{P}_{B_{1,0}\cap\ldots\cap B_{k-1,0}}(N_k)\end{aligned}$$

Or :

- par équiprobabilité du choix des balles dans l'urne : $\mathbb{P}(B_{1,0}) = \dfrac{n-2}{n}$
- $\mathbb{P}_{B_{1,0}\cap\ldots\cap B_{k-1,0}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$: en effet, si $B_{1,0} \cap \ldots \cap B_{k-1,0}$ est réalisé, alors, au tirage k, l'urne est composée de $n-(k-1)$ balles, dont une seule noire... Dans ce cas, par équiprobabilité du choix des balles, la probabilité de tirer la noire au k-ième tirage est $\dfrac{1}{n-k+1}$.
- pour tout $i \in [\![2;n-1]\!]$, $\mathbb{P}_{B_{1,0}\cap\ldots\cap B_{i-1,0}}(B_{i,0}) = \dfrac{n-i-1}{n-i+1}$: en effet, si $B_{1,0} \cap \ldots \cap B_{i-1,0}$ est réalisé, alors, au tirage i, l'urne est composée de $n-(i-1)$ balles, dont la noire, la blanche numérotée 1, et le reste étant des blanches numérotées 0 (il y en a donc $n-(i-1)-2 = n-i-1$). Dans ce cas, par équiprobabilité du choix des balles, la probabilité de tirer une blanche au i-ième tirage est $\dfrac{n-i-1}{n-i+1}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [Y = 0]\Big) &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \ldots \times \frac{n-(k-1)-1}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \ldots \times \frac{n-k+1}{n-k+3} \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \quad \text{télescopage avec décalage de 2} \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{n-1} \times (n-k) \times 1 \\ &= \frac{n-k}{n(n-1)}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [Y = 0]\Big) = \dfrac{n-k}{n(n-1)}$.

3.b. En déduire, grâce à la formule des probabilités totales, la valeur de $\mathbb{P}([Y = 0])$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $\Big([X_n = k]\Big)_{k\in[\![1;n]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

➠Réflexe !
Grâce à la question précédente, on connaît tous les $\mathbb{P}(A_i \cap B)$, et on veut $\mathbb{P}(B)$: FPT !! Est-ce que $(A_i)_i$ est bien un sce ?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y = 0]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [Y = 0]\Big) \quad \text{question précédente} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n(n-1)} \quad \text{linéarité de la somme, changement d'indice } i = n-k \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Petite remarque
Le changement d'indice n'était pas nécessaire. Il est aussi possible de faire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k) = \sum_{k=1}^{n} n - \sum_{k=1}^{n} k = \ldots$
Mais c'est plus calculatoire...

Conclusion : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \dfrac{1}{2}$.

3.c. Déduire alors la loi de Y.

On sait que $Y(\Omega) = \{0;1\}$. Or, d'après la question précédente : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \dfrac{1}{2}$.

D'où :

$$\mathbb{P}([Y = 1]) = \frac{1}{2}$$

Conclusion : Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

4. 4.a. Recopier et compléter le script **Python** suivant de sorte que l'exécution de **simul_X(n)** simule une réalisation de l'expérience décrite ci-dessus, où n est le nombre total de balles, et renvoie la valeur de X_n associée. *On admettra que la balle noire est codée tout au long de ce script par le nombre N.*

```
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simul_X(n):
    N=n
    u=rd.randint(1,N+1)
    X=1
    while u!=N:
        N=...
        u=...
        X=...
    return X
```

```
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simul_X(n):
    N=n
    u=rd.randint(1,N+1)
    X=1
    while u!=N:
        N=N-1
        u=rd.randint(1,N+1)
        X=X+1
    return X
```

4.b. En utilisant la fonction créée à la question précédente, écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **esp_var_X(n)** renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(X_n)$ et une de $\mathbb{V}(X_n)$.

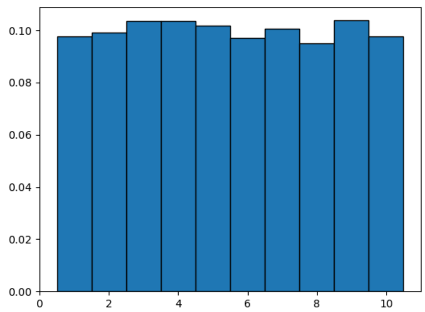
```
def simul_esp_var(n):
    L=[simul_X(n) for k in range(10000)]
    L2=[x**2 for x in L]        #liste pour th de transfert
    E=sum(L)/len(L)
    V=sum(L2)/len(L2)-E**2      #KH
    return E,V
```

4.c. Recopier et compléter le programme suivant afin que son exécution affiche l'histogramme obtenu à partir de 10000 réalisations de la variable aléatoire X_n, où n est saisi par l'utilisateur.

```
n=int(input("n=?"))
Labs=
LX=
plt.hist(LX,Labs,edgecolor='k',density=True)
plt.show()
```

```
n=int(input("n=?"))
Labs=[-0.5+k for k in range(1,n+2)]
LX=[simul_X(10) for k in range(10000)]
plt.hist(LX,Labs,edgecolor='k',density=True)
plt.show()
```

4.d. On a exécuté le programme de la question précédente en saisissant $n = 10$ et on a obtenu le graphique qui suit. Expliquer en quoi le graphique est cohérent avec la loi de X_n obtenue en question 2.b.



✘ Attention !
C'est un histogramme de **fréquences,** et non de probabilités !!

Puisque cet histogramme de fréquences est obtenu sur un grand nombre de réalisations de la variable aléatoire X_{10}, on peut légitimement penser qu'il se rapproche de la distribution de probabilité de la variable aléatoire X_{10}. Or, on avait trouvé : $X_{10}(\Omega) = [\![1;10]\!]$ et $\forall k \in [\![1;10]\!],\ \mathbb{P}([X_{10} = k]) = \dfrac{1}{10}$. Ceci est bien cohérent avec l'histogramme des fréquences obtenu.

Pourquoi ?
C'est la **loi faible des grands nombres** qui justifie cela.

4.e. Écrire une fonction de sorte que l'exécution de **`simul_XY(n)`** simule une réalisation de l'expérience décrite ci-dessus, où n est le nombre total de balles, et renvoie les valeurs de X_n et Y associées.

```python
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    N=n
    u=rd.randint(1,N+1)
    X=1
    Y=0
    while u!=N:
        if u==1:
            Y=1
        N=N-1
        u=rd.randint(1,N+1)
        X=X+1
    return X,Y
```

Petite remarque

Le numéro N correspond toujours à la balle noire ; et le numéro 1 à la balle blanche numérotée 1.

Exercice 23 - EML 2018 S

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisse $0, 1, \dots, n$.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).
On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_n puis donner son espérance et sa variance.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On a déjà, d'après l'énoncé : $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
- Et, puisqu'à l'instant n, le mobile se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse 0,1,...,n, on a :

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \ \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{\text{Card}\left([\![0; n]\!]\right)}$$

Conclusion : X_n suit la loi uniforme sur $[\![0; n]\!]$ et on a ainsi : $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{(n+1)^2 - 1}{12} = \dfrac{n(n+2)}{12}$.

2. On note Y l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement initial), et on attribue à Y la valeur 0 si le mobile ne revient jamais à l'origine. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2.a. Justifier que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Raisonnons pas double-inclusion...

$\boxed{\subset}$ Y désigne l'instant auquel le mobile revient à l'origine, donc on a $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

$\boxed{\supset}$

- ◇ D'après l'énoncé, $0 \in Y(\Omega)$.
- ◇ Ensuite, on remarque que l'issue consistant à rester sur l'origine à l'instant 1 réalise l'évènement $[Y = 1]$, donc $[Y = 1] \neq \varnothing$.
  Par conséquent, $1 \in Y(\Omega)$.
- ◇ Soit $j \in [\![2; +\infty[\![$.
  L'issue consistant à être au point d'abscisse 1 des instants 1 à $j-1$, puis à l'origine à l'instant j réalise l'évènement $[Y = j]$. Ainsi, $[Y = j] \neq \varnothing$.
  Par conséquent : $j \in Y(\Omega)$.

On a ainsi établi : $\mathbb{N} \subset Y(\Omega)$.

Conclusion : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Important !
J'ai envie de dire que l'on raisonne toujours pas double-inclusion pour ce type de question. Il faut au moins en être conscient et le rédiger dans ce sens.

2.b. Pour tout entier naturel i non nul, exprimer l'événement $[Y = i]$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_i$.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

- Si $i = 1$:
  L'évènement $[Y = 1]$ est réalisé si, et seulement si, le mobile reste à l'origine à l'instant 1. D'où :

$$\boxed{[Y = 1] = [X_1 = 0]}$$

- Si $i \geq 2$:

$[Y = i]$ est réalisé	si, et seulement si,	le mobile revient pour la première fois à l'origine à l'instant n
	si, et seulement si,	des instants 1 à $i-1$ le mobile ne va jamais à l'origine, puis il y retourne à l'instant i

Par conséquent :

$$\boxed{[Y = i] = \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} [X_k \neq 0]\right) \cap [X_i = 0]}$$

✓ Rigueur !
Pour que cette phrase ait bien du sens, il faut que $i - 1 \geq 1$, donc que $i \geq 2$: cas dans lequel nous nous sommes bien placés et ça en est même la raison.

Petite remarque
Avec la convention $\bigcap_{k\in\varnothing} \dots = \Omega$, on pourrait regrouper les deux cas.

2.c. En déduire : $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y = i]) = \dfrac{1}{i(i+1)}$.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

- Si $i = 1$:
  D'après la question précédente, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 1]) &= \mathbb{P}([X_1 = 0]) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

question **1.a.**

- Si $i \geq 2$:

D'après la question précédente, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=i]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i-1}[X_k \neq 0]\right) \cap [X_i = 0]\right) && \text{indépendance mutuelle des variables aléatoires } X_1, X_2, \dots, X_i \\
&= \left(\prod_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}([X_k \neq 0])\right) \mathbb{P}([X_i = 0]) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{i-1} (1 - \mathbb{P}([X_k = 0]))\right) \mathbb{P}([X_i = 0]) && \text{question 1.a.} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{i-1} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\right) \frac{1}{i+1} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{i-1} \frac{k}{k+1}\right) \frac{1}{i+1} && \text{télescopage} \\
&= \frac{1}{i}\,\frac{1}{i+1}
\end{aligned}$$

Les deux cas peuvent se regrouper...

Conclusion : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y=i]) = \dfrac{1}{i(i+1)}$.

2.d. Vérifier par le calcul que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=i]) = 1$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}([Y=i]) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i(i+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) && \text{linéarité de la somme} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i+1} && \text{télescopage} \\
&= 1 - \frac{1}{N+1}
\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{N \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

Conclusion : la série $\displaystyle\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}([Y=i])$ est convergente et $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=i]) = 1$.

Petite remarque

Il n'est pas nécessaire de mentionner la convergence de la série $\displaystyle\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}([Y=i])$, pour deux raisons :
- ce n'est pas demandé,
- elle est une conséquence directe du fait que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{i \geq 0} \mathbb{P}([Y=i])$.

2.e. Déterminer alors $\mathbb{P}([Y=0])$ et interpréter le résultat.

On sait que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, donc la série $\displaystyle\sum_{i \geq 0} \mathbb{P}([Y=i])$ est convergente et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=i]) = 1$. Mais, d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=i]) = 1$. Par conséquent :

$$\mathbb{P}([Y=0]) = 0$$

Conclusion : $\mathbb{P}([Y=0]) = 0$. Le mobile reviendra presque-sûrement au moins une fois à l'origine.

2.f. Démontrer que la variable aléatoire Y n'admet pas d'espérance.

- On sait que :

Y admet une espérance si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{i \in Y(\Omega)} i\mathbb{P}([Y=i])$ est absolument convergente

si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{i \geq 0} i\mathbb{P}([Y=i])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N} i\mathbb{P}([Y=i]) &= \sum_{i=1}^{N} i\mathbb{P}([Y=i]) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{i}{i(i+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i+1} && \text{changement d'indice } k = i+1 \\
&= \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Or, la série $\displaystyle\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k}$ est une troncature d'une série de Riemann divergente (exposant $\alpha = 1$).

Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{i \geq 0} i\mathbb{P}([Y=i])$ est divergente.

Petite remarque

L'argument "la série $\displaystyle\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k}$ est une troncature de la série harmonique, qui est divergente" convient parfaitement également.

Conclusion : la variable aléatoire Y n'admet pas d'espérance.

3. On note Z l'instant auquel le mobile se trouve pour la deuxième fois à l'origine (sans compter son positionnement initial), et on attribue à Z la valeur 0 si le mobile revient au plus une fois à l'origine. On admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et que $\mathbb{P}([Z=0]) = 0$.

3.a. Sans justifier, donner $Z(\Omega)$.

$Z(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

3.b. Soient $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2;+\infty[\![$ tel que $i \geq j$. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])$.

Le second retour à l'origine devant avoir lieu à un instant strictement supérieur à celui du premier retour à l'origine, on a :

$$\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) = 0$$

Conclusion : pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2;+\infty[\![$ tel que $i \geq j$, $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) = 0$.

3.c. Soient $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2;+\infty[\![$ tel que $i \leq j-1$. Établir : $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) = \dfrac{i+1}{j(j+1)}$.

Supposons l'évènement $[Y=i]$ réalisé.

- Si $j = i+1$:
  Dans ce cas (sachant $[Y=i]$ réalisé) l'évènement $[Z=j]$ est réalisé si, et seulement si, le mobile reste à l'origine à l'instant $i+1$.
  Par conséquent :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) &= \mathbb{P}([X_{i+1}=0]) \\ &= \mathbb{P}([X_j=0]) \\ &= \frac{1}{j+1} \end{aligned}$$
- Si $j \geq i+2$:
  Dans ce cas (sachant $[Y=i]$ réalisé) :

$[Z=j]$ est réalisé	si, et seulement si,	le mobile revient pour la seconde fois à l'origine à l'instant j
	si, et seulement si,	des instants $i+1$ à $j-1$ le mobile ne va jamais à l'origine, puis il y retourne à l'instant j

✓ Rigueur ! Pour que cette phrase ait bien du sens, il faut que $j-1 \geq i+1$, donc que $j \geq i+2$: cas dans lequel nous nous sommes bien placés et ça en est même la raison.

  Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} [X_k \neq 0]\right) \cap [X_j = 0]\right) && \text{indépendance mutuelle des variables aléatoires } X_{i+1}, \dots, X_j \\ &= \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \mathbb{P}([X_k \neq 0])\right) \mathbb{P}([X_j=0]) \\ &= \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} (1 - \mathbb{P}([X_k=0]))\right) \mathbb{P}([X_j=0]) && \text{question 1.a.} \\ &= \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\right) \frac{1}{j+1} \\ &= \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{k}{k+1}\right) \frac{1}{j+1} && \text{télescopage} \\ &= \frac{i+1}{j} \, \frac{1}{j+1} \end{aligned}$$

Les deux cas se regroupent...

Conclusion : pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2;+\infty[\![$ tel que $i \leq j-1$, $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) = \dfrac{i+1}{j(j+1)}$.

3.d. Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $\mathbb{P}([Z=j])$ comme une somme finie.

Soit $j \in [\![2;+\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([Y=i]\big)_{i \in \mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{i \geq 0} \mathbb{P}\big([Y=i] \cap [Z=j]\big)$ est convergente et :

➠Réflexe ! On connaît la loi de Y et les valeurs de $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j])$... On pense donc à utiliser la FPT pour calculer $\mathbb{P}([Z=j])$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z=j]) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=i] \cap [Z=j]\big) && \text{relation de Chasles} \\ &= \mathbb{P}([Y=0] \cap [Z=0]) + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}\big([Y=i] \cap [Z=j]\big) + \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=i] \cap [Z=j]\big) && \mathbb{P}([Y=0]) = 0 \text{ et } [Y=0] \cap [Z=0] \subset [Y=0] \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}\big([Y=i] \cap [Z=j]\big) + \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=i] \cap [Z=j]\big) && \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y=i]) \neq 0 \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}([Y=i]) \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) + \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=i]) \mathbb{P}_{[Y=i]}([Z=j]) && \text{questions 2.b., 3.a. et 3.b.} \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i(i+1)} \, \frac{i+1}{j(j+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ij(j+1)} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $j \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}([Z=j]) = \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ij(j+1)}$.

3.e. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

- On sait que :

Z admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{j\in Z(\Omega)} j\mathbb{P}([Z=j])$ est absolument convergente

si, et seulement si, la série $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} j\mathbb{P}([Z=j])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0,j\neq 1}^{N} j\mathbb{P}([Z=j]) &= \sum_{j=2}^{N} j\mathbb{P}([Z=j]) && \text{question précédente}\\ &= \sum_{j=2}^{N} j\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{ij(j+1)} && \text{linéarité de la somme}\\ &= \sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}\end{aligned}$$

Or :

◇ pour tout $j\in[\![2;+\infty[\![$, $\sum\limits_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}\geq 1$, d'où :

$$\forall j\in[\![2;+\infty[\![,\ \frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}\geq\frac{1}{j+1}>0$$

◇ et,la série $\sum\limits_{j\geq 2}\frac{1}{j+1}$ est (à décalage d'indice près) une troncature de la série harmonique. Par conséquent, la série $\sum\limits_{j\geq 2}\frac{1}{j+1}$ est divergente.

Ainsi, par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, la série $\sum\limits_{j\geq 2}\frac{1}{j+1}\sum\limits_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}$ est divergente.

Par conséquent, la série $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} j\mathbb{P}([Z=j])$ est divergente.

> **Conclusion :** la variable aléatoire Z n'admet pas d'espérance.

4. **4.a.** Recopier et compléter le programme suivant de sorte que l'exécution de **simulYZ()** renvoie une réalisation de Y et Z.

```python
import numpy.random as rd
def simulYZ():
    n=1
    while ................:
        n = ......
    Y = ......
    n=n+1
    while ................:
        n = ......
    Z = ......
    return Y,Z
```

```python
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simulYZ():
    n=1
    while rd.randint(0,n+1)!=0:
        n=n+1
    Y=n
    n=n+1
    while rd.randint(0,n+1)!=0:
        n=n+1
    Z=n
    return Y,Z
```

4.b. En utilisant la fonction de la question précédente, écrire un programme **Python** dont l'exécution permettrait d'obtenir l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire Y.

```python
import matplotlib.pyplot as plt

Labs=[-0.5+k for k in range(0,20)]
LY=[simulYZ()[0] for k in range(10000)]
plt.hist(LY,Labs,density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```

simulYZ(), il faut extraire le terme indexé 0 de la liste... Autrement dit : **simulYZ()[0]**

★★★★★★★

Exercice 24 - Inspiré d'exercices de concours

Un objet se déplace sur les sommets d'un triangle, nommés A, B, C, selon le schéma suivant :

- si l'objet est en A, il y reste avec une probabilité $\frac{3}{8}$, ou il se dirige vers B avec une probabilité $\frac{3}{8}$, sinon il se dirige vers C avec une probabilité $\frac{1}{4}$.
- si l'objet est en B, il y reste avec une probabilité $\frac{1}{4}$, ou il se dirige vers A avec une probabilité $\frac{1}{2}$, sinon il se dirige vers C avec une probabilité $\frac{1}{4}$.
- si l'objet est en C, il y reste.

Initialement, l'objet se situe au sommet A.
On note, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n l'évènement "l'objet est en A à l'étape n" et $a_n = \mathbb{P}(A_n)$. Ainsi, $a_0 = 1$. On définit de la même façon les notations B_n, C_n et b_n, c_n.

Partie A.

1. Donner a_1 puis calculer a_2.
   - $a_1 = \frac{3}{8}$
   - D'après la formule des probabilités totales, avec (A_1, B_1, C_1) comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_2 \cap A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap B_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap C_1) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) + \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(A_2) + \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(A_2) \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 0 \\ &= \frac{21}{64} \end{aligned}$$

Conclusion : $a_1 = \frac{3}{8}$ et $a_2 = \frac{21}{64}$.

2. Si à l'étape 2, l'objet était en B, quelle est alors la probabilité qu'il ait été en A à l'étape 1 ?
   Cela revient à calculer $\mathbb{P}_{B_2}(A_1)$. Et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{B_2}(A_1) &= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B_2)}{\mathbb{P}(B_2)} \\ &= \dots \\ &= \frac{\frac{9}{64}}{\frac{9}{64} + \frac{3}{32}} \\ &= \frac{9}{64} \times \frac{64}{15} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Pourquoi ?
On utilise la FPT pour calculer $\mathbb{P}(B_2)$...

3. En utilisant la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{8} a_n + \frac{1}{2} b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{8} a_n + \frac{1}{4} b_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + c_n \end{cases}$$

   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Distinguons deux cas :
     - Si $n \geq 1$:
       On a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap C_n) && \text{FPT avec } (A_n, B_n, C_n) \text{ comme sce} \\ &= \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) + 0 && A_{n+1} \cap C_n = \varnothing \\ &= \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n) \times \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) + 0 && \mathbb{P}(A_n) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(B_n) \neq 0 \text{ car } n \geq 1 \\ &= \frac{3}{8} a_n + \frac{1}{2} b_n \end{aligned}$$

     - Si $n = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} a_0 + \frac{1}{2} b_0 &= \frac{3}{8} \times 1 \\ &= a_1 \end{aligned}$$

       La relation établie précédemment est donc encore valable si $n = 0$.

     Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{3}{8} a_n + \frac{1}{2} b_n}$$

   - De même, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \frac{3}{8} a_n + \frac{1}{4} b_n}$$

✍ Rédaction
On ne rédige pas trois fois la même chose...

- Et également :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + c_n}$$

4. **4.a.** Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{3}{4}c_n + \dfrac{1}{4}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + c_n \\ &= \frac{1}{4}(a_n + b_n) + c_n & (A_n, B_n, C_n) \text{ est un sce} \\ &= \frac{1}{4}(1 - c_n) + c_n \\ &= \frac{3}{4}c_n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{3}{4}c_n + \dfrac{1}{4}$.

4.b. Déterminer alors le terme général de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après la question précédente, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} &\iff \frac{1}{4}x = \frac{1}{4} \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

- On a ainsi les informations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} &= \frac{3}{4}c_n + \frac{1}{4} \\ 1 &= \frac{3}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \end{aligned} \right.$$

En soustrayant L2 à L1, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} - 1 = \frac{3}{4}(c_n - 1)$$

Par conséquent, la suite $\left(c_n - 1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $c_0 - 1 = -1$.

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n - 1 = -1\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

4.c. En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter ce résultat.

Puisque $\dfrac{3}{4} \in]-1;1[$, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$.

Interprétation : au bout d'un certain nombre d'étapes, l'objet arrivera sur le sommet C (et y restera donc).

5. **5.a.** Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = \dfrac{5}{8}b_{n+1} + \dfrac{3}{32}b_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{8}a_{n+1} + \frac{1}{4}b_{n+1} & a_{n+1} = b_{n+1} + \frac{1}{4}b_n \\ &= \frac{3}{8}\left(b_{n+1} + \frac{1}{4}b_n\right) + \frac{1}{4}b_{n+1} \\ &= \frac{5}{8}b_{n+1} + \frac{3}{32}b_n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = \dfrac{5}{8}b_{n+1} + \dfrac{3}{32}b_n$.

5.b. Déterminer alors le terme général de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après la question précédente, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 - \dfrac{5}{8}x - \dfrac{3}{32} = 0$, dont les solutions sont $\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{-1}{8}$.

Par conséquent :

$$\exists! \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \lambda\left(\frac{3}{4}\right)^n + \mu\left(\frac{-1}{8}\right)^n$$

Or : $b_0 = 0$ et $b_1 = \dfrac{3}{8}$. Et de surcroît :

$$\left\{ \begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= \frac{3}{8} \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} \lambda + \mu &= 0 \\ \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{8}\mu &= \frac{3}{8} \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} \lambda + \mu &= 0 \\ 6\lambda - \mu &= 3 \end{aligned} \right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1}{\iff} \left\{ \begin{aligned} \lambda + \mu &= 0 \\ -7\mu &= 3 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{3}{7} \\ \mu &= \frac{-3}{7} \end{aligned} \right.$$

D'où :

$$\lambda = \frac{3}{7}\ ;\ \mu = \frac{-3}{7}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{3}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{7}\left(\frac{-1}{8}\right)^n$.

6. Déduire des questions précédentes le terme général de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements, on a : $a_n + b_n + c_n = 1$ et donc $a_n = 1 - b_n - c_n$.
En utilisant les résultats des questions **4.b.** et **5.b.**, on obtient le terme général de (a_n).

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{3}{7}\left(\frac{-1}{8}\right)^n = \frac{4}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{3}{7}\left(\frac{-1}{8}\right)^n$.

Important !
A ce stade de l'exercice, il est important de vérifier ce résultat (pour se rassurer !). On vérifie cette expression en prenant $n = 0$, $n = 1$ et même $n = 2$. Ca fonctionne : OUF !

7. On considère le programme incomplet suivant :

7.a. Compléter les lignes manquantes du programme suivant de sorte que la commande `simulation(n)` renvoie une liste contenant la simulation des sommets parcourus par l'objet lors des étapes 0 à n du jeu.

```
1  import numpy.random as rd
2
3  def simulation(n):
4      objet="A"
5      Lobjet=[objet]
6      for k in range(1,n+1):
7          p=rd.rand()       #réel aléatoire entre 0 et 1
8          if objet=="A":
9              if p<3/8:
10                 objet="B"
11             elif p>=3/8 and p<5/8:
12                 objet="C"
13         elif ..........
14             ..........
15                 ..........
16             ..........
17                 ..........
18         Lobjet.append(objet)
19     return (..........)
20
21 def mystere(L,x):
22     for k in range(0,len(L)):
23         if L[k]==x:
24             return k
```

```
L13     elif objet=="B":
L14       if p<1/2:
L15         objet="A"
L16       elif p>=1/2 and p<3/4:
L17         objet="C"
L19   return(Lobjet)
```

7.b. On exécute successivement les deux instructions suivantes : `L=simulation(15)` et `mystere(L,"C")`.
Voici le résultat obtenu :

```
>>> L=simulation(15)
>>> mystere(L,"C")
4
```

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
Pour la simulation réalisée, le premier C est apparu au $4^{\text{ème}}$ rang dans la liste `L`.
Autrement dit, pour cette simulation, l'objet a atteint le sommet C lors de la $4^{\text{ème}}$ étape.

Partie B.

Le contexte de cette partie est le même qu'au début de l'exercice ; et les résultats de la partie A pourront être utilisés.

A chaque déplacement de l'objet, on définit des points de la façon suivante :

- chaque fois que l'objet arrive en A, 1 point est crédité
- chaque fois que l'objet arrive en B, 1 point est débité
- aucun point n'est attribué quand l'objet arrive en C

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de points accumulés jusqu'à l'étape n *(aucun point n'est attribué pour le point de départ en A).*
Notons également Y_n et Z_n les variables aléatoires définies par :

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad Z_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

☞ Pour info...
Les variables Y_n et Z_n sont les variables **indicatrices** des évènements Y_n et Z_n.
On rencontrera parfois la notation $\mathbb{1}_A$ pour désigner l'indicatrice d'un évènement A...

8. **Variable aléatoire X_1.**

8.a. Donner $X_1(\Omega)$.

Sans difficulté : $X_1(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$.

8.b. Déterminer la loi de X_1.

On a :

$$\mathbb{P}([X_1 = -1]) = b_1 = \frac{3}{8} \quad ; \quad \mathbb{P}([X_1 = 0]) = c_1 = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}([X_1 = 1]) = a_1 = \frac{3}{8}$$

Pourquoi ? Il suffit de regarder les points possibles en 1 étape...

8.c. En déduire $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.

Puisque $X_1(\Omega)$ est fini, la variable aléatoire X_1 admet une espérance et une variance et :

- $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1) &= -1 \times \mathbb{P}([X_1 = -1]) + 0 \times \mathbb{P}([X_1 = 0]) + 1 \times \mathbb{P}([X_1 = 1]) \\ &= 0 \end{aligned}$$
- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_1) &= \mathbb{E}(X_1^2) - E(X_1)^2 \\ &= \mathbb{E}(X_1^2) \\ &= (-1)^2 \times \mathbb{P}([X_1 = -1]) + 0^2 \times \mathbb{P}([X_1 = 0]) + 1^2 \times \mathbb{P}([X_1 = 1]) \quad \text{théorème de transfert} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

9. Donner $X_2(\Omega)$.

Sans difficulté : $X_2(\Omega) = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

10. **10.a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n, Y_{n+1} et Z_{n+1}.

X_{n+1} étant le gain cumulé jusqu'à l'étape $n+1$, il s'obtient en ajoutant au gain cumulé jusqu'à l'étape n (c'est à dire X_n) soit 1 si l'évènement A_{n+1} est réalisé, soit -1 si l'évènement B_{n+1} est réalisé, soit 0 sinon.

Conclusion : $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} - Z_{n+1}$.

10.b. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![-n; n]\!]$.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
  C'est le résultat de la question **8.a.**.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $X_n(\Omega) = [\![-n; n]\!]$ et montrons que $X_{n+1}(\Omega) = [\![-n-1; n+1]\!]$.
  Raisonnons par double-inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $\omega \in \Omega$. D'après la question précédente :

$$X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega) + Y_{n+1}(\omega) - Z_{n+1}(\omega)$$

On sait que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements ; distinguons donc trois cas :

⇝ Si $\omega \in A_n$, alors $Y_{n+1}(\omega) = 1$ et $Z_{n+1}(\omega) = 0$.
D'où :

$$X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega) + 1$$

Et comme, par hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega) = [\![-n; n]\!]$, on obtient :

$$X_{n+1}(\omega) \in [\![-n+1; n+1]\!]$$

⇝ Si $\omega \in B_n$, on obtient de la même façon :

$$X_{n+1}(\omega) \in [\![-n-1; n-1]\!]$$

⇝ Si $\omega \in C_n$, alors $X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega)$ et donc :

$$X_{n+1}(\omega) \in [\![-n; n]\!]$$

Dans tous les cas :

$$X_{n+1}(\omega) \in [\![-n-1; n+1]\!]$$

$\boxed{\supset}$ Soit $k \in [\![-n-1; n+1]\!]$. Distinguons trois cas :

⇝ Si $k = -n-1$:
L'issue consistant à être en B des instants 1 à $n+1$ réalise l'évènement $[X_{n+1} = -n-1]$. Donc :

$$[X_{n+1} = -n-1] \neq \varnothing$$

⇝ Si $k = n+1$:
L'issue consistant à être en A des instants 1 à $n+1$ réalise l'évènement $[X_{n+1} = n+1]$. Donc :

$$[X_{n+1} = n+1] \neq \varnothing$$

⇝ Si $k \in [\![-n : n]\!]$:
Alors, par hypothèse de récurrence, $[X_n = k] \neq \varnothing$. A l'instant n, l'objet se situe donc à un endroit tel que X_n soit égale à k. En considérant ensuite que l'objet va en C (ou y reste), la variable aléatoire X_{n+1} prendra également la valeur k.
D'où :

$$[X_{n+1} = k] \neq \varnothing$$

Dans tous les cas :

$$[X_{n+1} = k] \neq \varnothing$$

Autrement dit : $k \in X_{n+1}(\Omega)$, et ainsi :

$$[\![-n-1; n+1]\!] \subset X_{n+1}(\Omega)$$

On a donc démontré :

$$X_{n+1}(\Omega) = [\![-n-1; n+1]\!]$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![-n; n]\!]$.

Petite remarque C'est une question difficile, pas simple à rédiger...

10.c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n])$.

$[X_n = n]$ est réalisé	si, et seulement si,	on a gagné n points en n étapes
	si, et seulement si,	chacune des étapes 1 à n a permis de gagner 1 point (car on ne peut gagner plus d'un point à la fois)

D'où :

$$[X = n] = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = n]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\ldots\mathbb{P}_{A_1\cap\ldots A_{n-1}}(A_n) \\ &= \left(\frac{3}{8}\right)^n \end{aligned}$$

formule des probabilités composées, licite car $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$

Conclusion : $\mathbb{P}([X_n = n]) = \left(\dfrac{3}{8}\right)^n$.

10.d. Soit $n \in [\![3; +\infty[\![$. Donner deux évènements inclus dans l'évènement $[X_n = 0]$.

L'évènement $C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n = C_1$ est toujours inclus dans $[X_n = 0]$.
De plus, si $n \geq 3$, l'évènement $A_1 \cap B_2 \cap C_3 \cap \ldots \cap C_n = A_1 \cap B_2 \cap C_3$ l'est également.

10.e. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + a_{n+1} - b_{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **10.a.** :

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} - Z_{n+1}$$

Or, toutes les variables aléatoires en jeu sont finies ; elles admettent donc toutes une espérance, et par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(Y_{n+1}) - \mathbb{E}(Z_{n+1})$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n+1}) &= 1 \times \mathbb{P}(A_{n+1}) + 0 \times \mathbb{P}(\overline{A_{n+1}}) \\ &= a_{n+1} \end{aligned}$$

et :

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}) = b_{n+1}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + a_{n+1} - b_{n+1}$.

10.f. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)$ puis déterminer une expression simplifiée de $\mathbb{E}(X_n)$.

- D'après la question précédente, et par récurrence immédiate, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)$$

- On en déduit, d'après les questions **5.b.** et **6.** :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{6}{7}\left(\frac{-1}{8}\right)^n \\ &= \ldots \\ &= \frac{3}{7}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) - \frac{2}{21}\left(1 - \left(\frac{-1}{8}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = \dfrac{3}{7}\left(1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right) - \dfrac{2}{21}\left(1 - \left(\dfrac{-1}{8}\right)^n\right)$.

Important !
On vérifie pour $n = 1$ pour se rassurer...

★★★★★★★

Exercice 25 - Oral HEC, ESSEC 2016 E II

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. **1.a.** Montrer que pour tout entier naturel j non nul : $\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X > j - 1) - \mathbb{P}(X > j)$.

Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Puisque X est à valeurs entières : $[X > j - 1] = [X \geq j]$.
Or :

$$[X \geq j] = [X = k] \cup [X > j]$$

D'où :

$$[X > j - 1] = [X = j] \cup [X > j]$$

Mais $[X = j]$ et $[X > j]$ sont incompatibles, donc :

$$\mathbb{P}(X > j - 1) = \mathbb{P}(X = j) + \mathbb{P}(X > j)$$

D'où :

$$\mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X > j - 1) - \mathbb{P}(X > j)$$

Conclusion : $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X > j - 1) - \mathbb{P}(X > j)$.

1.b. Soit p un entier naturel non nul. Montrer que : $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j) - p\mathbb{P}(X > p)$.

D'après la question précédente : $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(X > j - 1) - \mathbb{P}(X > j)$.
D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X = j) &= \sum_{j=1}^{p} j\big(\mathbb{P}(X > j - 1) - \mathbb{P}(X > j)\big) && \text{linéarité de la somme} \\
&= \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X > j - 1) - \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X > j) && \text{changement d'indice } i = j - 1 \text{ dans la première somme} \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} (i + 1)\mathbb{P}(X > i) - \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X > j) && \text{linéarité de la somme} \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} i\mathbb{P}(X > i) + \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > i) - \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X > j) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > i) - p\mathbb{P}(X > p) + 0\mathbb{P}(X > 0) - p\mathbb{P}(X > p) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > i) - p\mathbb{P}(X > p)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X > j) - p\mathbb{P}(X > p)$.

2. **2.a.** On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$.

2.a.i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\mathbb{P}(X = k)$.

Par hypothèse, X admet une espérance. Donc la série $\displaystyle\sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}(X = n)$ est absolument convergente.

Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X = n)$ est absolument convergente ; elle est donc convergente.

Conclusion : la série de terme général $k\mathbb{P}(X = k)$ est convergente.

2.a.ii. Montrer que :

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = 0$$

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Puisque la série $\displaystyle\sum_{k \geq 1} k\mathbb{P}(X = k)$ est convergente, d'après la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{p} k\mathbb{P}(X = k) + \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{p+1} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) - \sum_{k=+1}^{p} k\mathbb{P}(X = k)$$

- Or, $\displaystyle\sum_{k \geq 1} k\mathbb{P}(X = k)$ est convergente, donc :

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=+1}^{p} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$$

> ☞ **Pour info...**
> Il s'agit du reste d'une série convergente...
> Si (S_n) désigne la suite des sommes partielles d'une série convergente et S sa somme, alors on a toujours : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S - S_n = 0$...

Conclusion : $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = 0$.

2.a.iii. En déduire que
$$\lim_{p\to+\infty} p\mathbb{P}(X>p)=0$$

Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

- Puisque $X(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned} p\mathbb{P}([X>p]) &= p\sum_{k=p+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=p+1}^{+\infty} p\mathbb{P}(X=k) \end{aligned}$$
- Or :
$$\forall k\in[\![p+1;+\infty[\![,\ n\le k$$
D'où (une probabilité étant positive) :
$$\forall k\in[\![p+1;+\infty[\![,\ n\mathbb{P}(X=k)\le k\mathbb{P}(X=k)$$
Puis, en sommant de $p+1$ à $+\infty$, licite car les séries $\sum_{k\ge p+1}\mathbb{P}(X=k)$ et $\sum_{k\ge p+1}k\mathbb{P}(X=k)$ sont des troncatures de séries convergentes, la deuxième puisque X admet une espérance, on obtient :
$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} p\mathbb{P}([X=k])\le\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k])$$

On a donc établi :
$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ 0\le p\mathbb{P}(X>p)\le\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k])$$
Mais, d'après la question précédente :
$$\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)=0$$

Conclusion : par théorème d'encadrement, on obtient : $\lim\limits_{p\to+\infty} p\mathbb{P}(X>p)=0$.

2.a.iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}(X>j)$ converge et que sa somme est μ.

D'après la question **1.b.** :
$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{j=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>j)=\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j)+p\mathbb{P}(X>p)$$
Or :

- d'après le résultat précédent :
$$\lim_{n\to+\infty} p\mathbb{P}([X>p])=0$$
- puisque X admet une espérance, et que $X(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$:
$$\lim_{p\to+\infty}\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}([X=j])=\mathbb{E}(X)$$

★Subtile...★
Nul besoin d'avoir $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$ pour dire que $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k])$; l'information $X(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$ suffit. En effet, certaines probabilités $\mathbb{P}([X=k])$ seraient nulles si $k\notin X(\Omega)$.

Par conséquent, la série $\sum_{j\ge0}\mathbb{P}([X>j])$ est convergente et :
$$\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X>j])=\mathbb{E}(X)$$

Conclusion : la série $\sum_{j\ge0}\mathbb{P}([X>j])$ est convergente et $\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X>k])=\mathbb{E}(X)$.

2.b. On suppose que $\sum_{j\ge0}\mathbb{P}(X>j)$ converge.

2.b.i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\ge1}$ définie par
$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ v_p=\sum_{j=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>j)$$

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned} v_{p+1}-v_p &= \sum_{j=0}^{p}\mathbb{P}(X>j)-\sum_{j=0}^{p-1}\mathbb{P}(X>j) \\ &= \mathbb{P}(X>p) \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2.b.ii. Comparer $\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j)$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>j)$.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
  D'après la question **1.b.** :
$$\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X>j) - p\mathbb{P}(X>p)$$
  Or : $p\mathbb{P}(X>p) \geq 0$, d'où :
$$\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j) \leq \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}(X>j)$$
- Ensuite, puisque la série $\sum_{j\geq 0} \mathbb{P}(X>j)$ converge, la suite $(v_p)_{p_in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>j)$ converge. Mais, d'après la question précédente, la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante ; elle est donc majorée par sa limite. Autrement dit :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ v_p \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>j)$$

Conclusion : par transitivité, on obtient : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>j)$.

2.b.iii. En déduire que X admet une espérance.

- On sait que :

X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{j\in X(\Omega)} j\mathbb{P}([X=j])$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série $\sum_{j\geq 1} j\mathbb{P}([X=j])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Or, la suite $\left(\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j)\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (immédiat) et, d'après la question précédente, elle est majorée par $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>j)$.

  D'après le théorème de convergence monotone, la suite $\left(\sum_{j=1}^{p} j\mathbb{P}(X=j)\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente.

Conclusion : X admet une espérance.

2.c. Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}(X>j)$ converge.
Il s'agit de démontrer une équivalence, raisonnons donc par double-implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ implication établie en question **2.a.** (et on a même $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>j)$).

$\boxed{\Longleftarrow}$ implication établie en question **2.b.**

3. Une application. On dispose d'une urne contenant N balles indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N. On effectue n tirages successifs et avec remise d'une balle ; et on note X_n la variable aléatoire égale au maximum des nombres obtenus sur ces n tirages.
Pour $i \in [\![1;n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du i-ème tirage.

3.a. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Donner la loi de Y_i.
Les tirages étant effectués avec remise, on a : $Y_i(\Omega) = [\![1;N]\!]$, et par équiprobabilité du choix des balles dans l'urne :
$$\forall k \in [\![1;N]\!],\ \mathbb{P}([Y_i=k]) = \frac{1}{N}$$

Conclusion : pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;n]\!]\right)$.

3.b. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;N]\!]$, $\mathbb{P}([X_n \leq k])$.
On a :
$$X_n = \max(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$$
Soit $k \in [\![1;N]\!]$.

$[X_n \leq k]$ est réalisé si, et seulement si, $[\max(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \leq k]$ est réalisé
si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $[Y_i \leq k]$ est réalisé

D'où :
$$[X_n \leq n] = \bigcap_{i=1}^{n} [Y_i \leq k]$$
Les tirages étant effectués avec remise, ils sont indépendants. Par conséquent, les variables aléatoires $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont mutuellement indépendantes. D'où :
$$\mathbb{P}([X_n \leq k]) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Y_i \leq k])$$

Or :

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, d'après la question précédente : $\forall j \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([Y_i = j]) = \dfrac{1}{N}$.
D'où, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y_i \leq k]) &= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{N} \\ &= \frac{k}{N}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_n \leq k]) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{k}{N} \\ &= \left(\frac{k}{N}\right)^n\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k \in [\![1;N]\!],\ \mathbb{P}([X_n \leq k]) = \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$.

Vérification
Puisque $X_n(\Omega) = [\![1;N]\!]$, on vérifie que $\mathbb{P}([X_n \leq N]) = 1$...

3.c. En déduire que X_n possède une espérance et l'exprimer sous forme d'une somme.

Puisque $X_n(\Omega) = [\![1;N]\!]$ est fini, la variable aléatoire X_n possède une espérance.
Ainsi, d'après la question **1.c.**, la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}([X_n > k])$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n > k]) && X_n(\Omega) = [\![1;N]\!] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k) && X(\Omega) = [\![1;n]\!], \text{ donc } \mathbb{P}(X > 0) = 1 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{P}([X > k]) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \big(1 - \mathbb{P}([X \leq k])\big) && \text{question précédente, licite car } k \in [\![1;N-1]\!] \\ &= 1 + N - 1 - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \\ &= N - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n\end{aligned}$$

★★★★★★★