1 Cours

Somme des termes d'une suite polynomiale

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leqslant n$ et soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$

Binôme de Newton

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
- $\displaystyle(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (-1)^{n-k} b^{n-k}$

On doit toujours penser à la formule du binôme de Newton si on voit apparaître une somme avec des coefficients binomiaux.

Substitution dans une formule

Il n'y a qu'une règle à retenir :

> Toute substitution dans une formule doit se faire à l'aide de parenthèses.

Exemple 1. Considérons la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k$ il faut remplacer n par $n+1$: c'est ce remplacement que l'on appelle *substitution*.

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

devient

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Si l'on oublie les parenthèses, cela donnerait comme résultat

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{n+1(n+1+1)}{2} = \frac{n+(n+2)}{2} = \frac{2n+2}{2} = n+1$$

ce qui est bien entendu complètement faux (car les règles de distributivité entre addition et multiplication ont été bafouées à cause de l'oubli des parenthèses).

2 Exercices

2.1 Entraînement à la manipulation des symboles de somme et de produit

Exercice 1 : Réécrire les sommes ou les produits à l'aide de pointillés en faisant apparaître les deux premiers termes ainsi que les deux derniers termes.

1. $\displaystyle\sum_{k=5}^{100} k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2k+7$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^{3k+1}}$
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{15} k^2$
5. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2^k$
6. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} (1-k^3)$

Exercice 2 : Réécrire les sommes ou les produits en pointillés à l'aide du symbole de somme ou de produit.

1. $2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)$
2. $2+4+\cdots+(2n-2)+(2n)$
3. $1+5+\cdots+5^{3n-1}+5^n$
4. $3\times 9\times\cdots\times 3^n\times 3^{n+1}$
5. $1\times 4\times\cdots\times(n-1)^2\times n^2$
6. $1\times 3\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1)$

Exercice 3 : Calculer pour les valeurs $n=0$, $n=1$ et $n=2$.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$
3. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$

2.2 Linéarité de la somme

Exercice 4 : Calculer les sommes suivantes en utilisant la linéarité de la somme.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k+k^2$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k+3^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k+1)$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k-2)(k+2)$

2.3 Pratique de la substitution

Exercice 5 : Développer en somme les expressions suivantes à l'aide d'une ou plusieurs substitutions.

1. $(a-2b)^n$
2. $(2a+1)^n$
3. $(3a-1)^{2n}$

Exercice 6 : Soient $n \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes à l'aide d'une ou plusieurs substitutions.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} k$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+m} k$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} k^2$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} k^2$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+m} k^2$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{3n+2} k^3$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} q^k$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} q^k$
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-q)^k$
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} (-q)^k$
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k}$
13. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{kx}$
14. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$
15. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^k (-1)^{n+1-k} x^{n+1-k}$

2.4 Pratique du changement d'indice

Exercice 7 : Calculer les sommes suivantes à l'aide d'un changement d'indice.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+2)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+3)^2$
3. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} 5^{k-3}$
4. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2^{k-2}}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-2} x^k$

Exercice 8 :

1. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n$. Démontrer la formule du capitaine :
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2.5 Sommes télescopiques

Exercice 9 : Calculer les sommes suivantes par télescopage.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2-k^2$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\times k!$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

Exercice 10 : Calculer les produits suivants par télescopage.

1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{2k+3}{2k+5}$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$
3. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)}\right)$

2.6 Plus de calculs de produits

Exercice 11 : Simplifier les produits suivants à l'aide de factorielles et/ou de puissances.

1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}k$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k$
3. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}k$
4. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\ln(2)$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}k$
6. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k)$
7. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$
8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}$
9. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}4^k$
10. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}2^{\ln(k)}$
11. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\mathrm{e}^{kx}$
12. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k^2-1)$

2.7 Sommes doubles

Exercice 12 : Calculer les sommes doubles suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j)$
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}ij$
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2^{i+j}}$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{n}{i}2^{n-i}(3^{j+1}-3^j)$

3 Réponses courtes

Réponses de l'exercice 1 :

1. $5 + 6 + \cdots + 99 + 100$
2. $7 + 9 + \cdots + (2n + 5) + (2n + 7)$
3. $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^4} + \cdots + \frac{1}{5^{3n-2}} + \frac{1}{5^{3n+1}}$
4. $2^2 \times 3^2 \times \cdots \times 14^2 \times 15^2$
5. $2^0 \times 2^1 \times \cdots \times 2^{n-1} \times 2^n$
6. $(1 - 2^3) \times (1 - 3^3) \times \cdots \times (1 - (n-1)^3) \times (1 - n^3)$

Réponses de l'exercice 2 :

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 5^k$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} 3^k$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^2$
6. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$

Réponses de l'exercice 3 :

1.
   - $n = 0 : 1$
   - $n = 1 : 4$
   - $n = 2 : 9$
2.
   - $n = 0 : 1$
   - $n = 1 : \frac{4}{3}$
   - $n = 2 : \frac{13}{9}$
3.
   - $n = 0 : 2$
   - $n = 1 : 3$
   - $n = 2 : \frac{15}{2}$

Réponses de l'exercice 4 :

1. $(n+1)^2$
2. $\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$
3. $2^{n+1} - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\frac{3^{n+1}+2^{n+2}-3}{2}$
5. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
6. $\frac{(n+1)(2n^2+n-24)}{6}$

Réponses de l'exercice 5 :

1. $n(2n+1)$
2. $(n+1)(2n+1)$
3. $\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}$
4. $\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$
5. $\frac{(n+1)(2n+1)(4n+3)}{3}$
6. $\frac{(n+m)(n+m+1)(2n+2m+1)}{6}$
7. $\frac{9}{4}(n+1)^2(3n+2)^2$
8. $\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$
9. $\frac{1-q^{2n+1}}{1-q}$
10. $\frac{1+q^{2n+1}}{1+q}$
11. $\frac{1-q^{2n+2}}{1+q}$
12. $(1+x^2)^n$
13. $(1+\mathrm{e}^x)^n$
14. 2^{n-1}
15. $(2-x)^{n+1}$

Réponses de l'exercice 6 :

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (-1)^{n-k} 2^{n-k} b^{n-k}$
2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k a^k$
3. $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 3^k a^k (-1)^{2n-k}$

Réponses de l'exercice 7 :

1. $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$
2. $\frac{(n+1)(2n^2+19n+54)}{6}$
3. $\frac{5^{n-2}-1}{4}$
4. $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$
5. $2^n - 1$
6. $x^2 \left((1+x)^n - nx^{n-1} - x^n\right)$

Réponses de l'exercice 8 :

1. Utiliser la formule avec les factorielles.
2. $n2^{n-1}$
3. np

Réponses de l'exercice 9 :

1. $(n+1)^2$
2. $\frac{1}{n+1} - 1$
3. $\ln(n+1)$
4. $1 - \frac{1}{n+1}$
5. $(n+1)! - 1$
6. $1 - \frac{1}{(n+1)!}$

Réponses de l'exercice 10 :

1. $\frac{3}{2n+5}$
2. $n+1$
3. $\frac{\ln(n+1)}{\ln(2)}$

Réponses de l'exercice 11 :

1. 0
2. $n!$
3. $n!$
4. $(\ln(2))^{n+1}$
5. $(2n)!$
6. $2^n n!$
7. $\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$
8. $n!\sqrt{n+1}$
9. $4^{\frac{n(n+1)}{2}}$
10. $2^{\ln((n+1)!)}$
11. $\mathrm{e}^{x^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}}$
12. $\frac{1}{n+1} \left(\frac{(2n+1)!}{2^n n!}\right)^2$

Réponses de l'exercice 12 :

1. $n(n+1)^2$
2. $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
3. $\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$
4. $5^n - 3^n$

4 Corrigés détaillés

Un jour peut-être ...