1 Calcul de sommes via la loi géométrique

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Considérons une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On a alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}, \qquad \mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1-p}{p^2} + \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2-p}{p^2}$$

On tire des ces formules une nouvelle manière de calculer certaines sommes en lien avec les séries géométriques :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{p}\sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1} = \frac{q}{p}\mathbb{E}(X) = \frac{q}{p}\frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2q^n = \frac{q}{p}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2pq^{n-1} = \frac{q}{p}\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{q}{p}\frac{2-p}{p^2} = \frac{(1-p)(2-p)}{p^3} = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$$

La manière traditionnelle de calculer ces sommes est d'utiliser les formules du cours sur les séries géométriques dérivées :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = q\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = q\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2} \qquad \textit{(plus rapide que de passer par le moment d'ordre 1)}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} n^2q^n &= \sum_{n=1}^{+\infty}(n(n-1)+n)q^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^n + \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n \\
&= q^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} + \frac{q}{(1-q)^2} \\
&= q^2\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{q}{(1-q)^2} \\
&= \frac{q}{(1-q)^2}\left(\frac{2q}{1-q}+1\right) \\
&= \frac{q(1+q)}{(1-q)^3} \qquad \textit{(un peu plus long que de passer par le moment d'ordre 2)}
\end{aligned}$$

Utiliser les moments de X ne révolutionne pas ces calculs, mais permet de les voir d'un nouvel œil. On pourra alors choisir l'une ou l'autre des méthodes selon ce qui semble être le plus adapté à la situation.

2 Calcul de sommes via la loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. Considérons une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On a alors

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathbb{V}(X) = \lambda, \qquad \mathbb{E}\left(X^2\right) = \lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda+1)$$

On tire des ces formules une nouvelle manière de calculer certaines sommes en lien avec les séries exponentielles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda}\mathbb{E}(X) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda}\mathbb{E}\left(X^2\right) = \lambda(\lambda+1)\mathrm{e}^{\lambda}$$

La manière traditionnelle de calculer ces sommes est d'utiliser la formule du cours sur la série exponentielle :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{\lambda}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\frac{\lambda^n}{n!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{\lambda^n}{(n-1)!} \qquad \textit{(le premier terme de la somme initiale est nul)}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{\lambda^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\\
&= \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{\lambda^n}{n!} + \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\\
&= \lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\\
&= \lambda(\lambda+1)e^{\lambda}
\end{aligned}$$

Ici aussi, l'utilisation du moment d'ordre 2 peut faire gagner un peu de temps.

3 Calculs concrets

Exercice 1 : Démontrer les égalités suivantes. On pourra éventuellement s'aider de **Python** pour finir le calcul de sommes de fractions lorsque celui-ci est trop lourd. On utilisera pour cela l'importation `import fractions as frac` qui permet de créer et manipuler algébriquement les fractions sous la forme `frac.Fraction(a,b) =` $\frac{a}{b}$.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-n^2+1\right)\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+2} = \frac{-176}{1125}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(2n^2+2n+2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 20$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 8$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = -1$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(2n^2+n+2\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^{3n+2} = \frac{278}{729}$
6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(n^2+2n\right)\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+2} = \frac{736}{1125}$
7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(-n^2+n\right)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-2} = \frac{-27}{32}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2n^2+n+2\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{140}{3}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-n^2+n+1\right)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n} = \frac{-11}{32}$
10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(2n^2+n\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 96$
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} = \frac{56}{9}$
12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 40$
13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} = \frac{17}{192}$
14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-n+2)\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} = \frac{-16}{225}$
15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^2-n+2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 12$
16. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(-n^2-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = -12$
17. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(2n^2+n-1\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^{2n+2} = \frac{59}{216}$
18. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(n^2+2n\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n} = 2$
19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 24$
20. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-n^2-n+1\right)\left(\frac{-2}{3}\right)^{2n+2} = \frac{-188}{125}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^2+2n+2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=\frac{124}{27}$
22. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-n^2-n-1\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^{2n+2}=\frac{-17}{27}$
23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=-4$
24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=4$
25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+2}=\frac{7}{48}$
26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-n^2+n+1\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^{3n+2}=\frac{-47}{23328}$
27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-n^2-n+2\right)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}=\frac{21}{32}$
28. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2-n-1\right)\left(\frac{-1}{3}\right)^{2n+2}=\frac{-31}{256}$
29. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+2n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=5$
30. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-n^2+n-1\right)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-2}=\frac{-51}{32}$
31. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-n^2+2n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=-2$
32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+2)\left(\frac{-1}{3}\right)^{3n+1}=\frac{55}{1176}$
33. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(2n^2+n+1\right)\left(\frac{-2}{3}\right)^{n}=\frac{724}{375}$
34. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(n^2+n-1\right)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}=\frac{-29}{32}$
35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-n^2+1\right)\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1}=\frac{88}{375}$
36. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-n+2)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}=\frac{-7}{9}$
37. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(n^2-n+2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}=\frac{50}{27}$
38. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=4$
39. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-n^2+n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=-4$
40. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2n^2+2n-1\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-2}=\frac{-136}{27}$
41. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(n^2-n-1\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}=\frac{-1}{54}$
42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-n-1)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-2}=\frac{20}{9}$
43. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(2n+1)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+2}=\frac{13}{72}$
44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2n^2+2n+1\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-2}=\frac{-100}{27}$
45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^2+2n+1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{7}{6}$

Exercice 2 : Démontrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-2n^2+n-1\right)\frac{2^n}{n!}=-11\mathrm{e}^2+5$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)\frac{1}{n!}=4\mathrm{e}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2n^2-2n+2\right)\frac{3^{n+1}}{n!}=60\mathrm{e}^3$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2n^2+2n+1\right)\frac{1}{n!}=7\mathrm{e}-1$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^2+n+1\right)\frac{2^n}{n!}=9\mathrm{e}^2-1$
6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}2\frac{2^{n+1}}{n!}=4\mathrm{e}^2$
7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(2n+1)\frac{3^{n+1}}{n!}=21\mathrm{e}^3-30$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^2+n-1\right)\frac{3^{n+1}}{n!}=42\mathrm{e}^3+3$
9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(2n^2+2n+1\right)\frac{2^n}{n!}=17\mathrm{e}^2-11$
10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-n^2-n\right)\frac{2^n}{n!}=-8\mathrm{e}^2+4$
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\frac{2^{n+1}}{n!}=6\mathrm{e}^2-2$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2n^2+n+2\right)\frac{2^n}{n!}=16\mathrm{e}^2-2$
13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2n^2+n+1\right)\frac{1}{n!}=6\mathrm{e}$
14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}2n^2\frac{1}{n!}=4\mathrm{e}$

15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(2n^2-2n\right)\frac{3^{n+1}}{n!}=54\mathrm{e}^3$

16. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(n^2-n-1\right)\frac{1}{n!}=2$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-n^2-n-2\right)\frac{2^n}{n!}=-10\mathrm{e}^2+2$

18. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}-2\frac{2^{n+1}}{n!}=-4\mathrm{e}^2+12$

19. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-2n^2+2\right)\frac{2^{n+1}}{n!}=-20\mathrm{e}^2-4$

20. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2n^2+2\right)\frac{1}{n!}=6\mathrm{e}$

21. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2-2n-1\right)\frac{3^{n+1}}{n!}=15\mathrm{e}^3$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}-n^2\frac{3^n}{n!}=-12\mathrm{e}^3$

23. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-2n^2+2n-2\right)\frac{3^n}{n!}=-20\mathrm{e}^3+8$

24. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-2n^2+2n+2\right)\frac{2^n}{n!}=-6\mathrm{e}^2$

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-n+2)\frac{2^{n+1}}{n!}=0$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\frac{2^{n+2}}{n!}=24\mathrm{e}^2$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-2n^2-2n-2\right)\frac{3^{n+1}}{n!}=-96\mathrm{e}^3+6$