Algèbre linéaire (matrices) - niveau 1 (correction)

I. Produit matriciel

Exercice 1
Pour les exemples suivants, dire si les produits matriciels AB et BA sont bien définis ou non.
S'ils sont définis, les calculer ; s'ils ne sont pas définis, expliquer pourquoi.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

Comme $A \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, le produit $AB \in \mathscr{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ est bien défini et :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & -5 & 0 \\ -16 & 12 & -7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Le produit BA n'est pas défini car le nombre de colonnes de B (4) est différent du nombre de lignes de A (2).

Commentaire

- Considérons m, n et p trois entiers naturels non nuls ainsi que $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices. Alors la matrice produit $C = AB \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ est bien définie. De plus, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ et pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, le coefficient $c_{i,j}$ de la matrice produit est obtenu en effectuant le produit matriciel de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B. Plus précisément :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, m]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j}}$$

Dans cette formule, k est un indice permettant de parcourir parallèlement les colonnes de A et les lignes de B. Pour que le produit AB soit bien défini, il faut donc que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

- Il est classique de présenter un produit matriciel comme suit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix} = B \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -13 & 8 & -5 & 0 \\ -16 & 12 & -7 & 12 \end{pmatrix} = C \end{array}$$

Cette présentation permet de mettre en avant la taille de la matrice produit C obtenue ($C \in \mathscr{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ où 2 est le nombre de lignes de A et 4 est le nombre de colonnes de B). À terme, il est préférable de présenter un produit en écrivant les matrices côte à côte (comme dans le corrigé). **Seules ces deux présentations sont acceptables.** $\square$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

Comme $A \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$, le produit $AB \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est bien défini et :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ 8 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Commentaire

- Comme mentionné précédemment, on peut présenter le produit sous la forme suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \\ A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ 8 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = C \end{array}$$

- La matrice produit obtenue a une forme particulière. En effet, chaque vecteur qui la compose est une copie, à multiplication près, de la matrice colonne A :

$$C = \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Cette forme apparaît naturellement lorsque l'on multiplie une matrice colonne A par une matrice ligne B.

Comme $B \in \mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, le produit $BA \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ est bien défini et :

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}.$$

(on obtient une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$, que l'on pourra considérer comme un réel)

Commentaire

Il faut faire particulièrement attention aux tailles des matrices que l'on souhaite multiplier. On peut résumer les situations rencontrées dans cet exercice dans un tableau.

Taille de A	Taille de B	Taille de $A \times B$
$m \times \boxed{n}$	$\boxed{n} \times p$	$m \times p$
$2 \times \boxed{3}$	$\boxed{3} \times 4$	2×4
3×4	2×3	**NON !**
$4 \times \boxed{1}$	$\boxed{1} \times 4$	4×4
$1 \times \boxed{4}$	$\boxed{4} \times 1$	1×1

$\square$

Exercice 2

Pour les exemples suivants, calculer A^2 et A^3.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ ***2.*** $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ***3.*** $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Démonstration.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 0 \\ -1 & 5 & 9 \\ 10 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 20 & -6 & -3 \\ -4 & 13 & -11 \\ -7 & 4 & 20 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -5 \\ 0 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -26 & -2 & 16 \\ 6 & 16 & -14 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -39 & 30 & 30 \\ 12 & -3 & -3 \\ -2 & 14 & 14 \end{pmatrix}$.

□

Exercice 3

Commentaire

Notons

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et tout $i \in [\![1, 3]\!]$,
- AC_i est la i^{e} colonne de A
- $L_i A$ est la i^{e} ligne de A

Ceci se généralise aux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour les exemples suivants, déterminer les produits matriciels à vue.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ***2.*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ***3.*** $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Démonstration.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

□

II. Calcul d'inverse

II.1. Définition de l'inverse et utilisation d'une relation matricielle

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Quelle propriété démontre que $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'inverse de A ?

Démonstration.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice B est l'inverse de A si $AB = BA = I_n$.
Si c'est le cas, B est notée A^{-1}.

Commentaire

- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on utilise souvent le résultat suivant :

$$AB = I_n \ \Rightarrow \ A \text{ et } B \text{ sont inverses l'une de l'autre}$$

ou autrement dit :

$$AB = I_n \ \Rightarrow \ AB = BA = I_n$$

La propriété : $AB = I_n$ signifie que la matrice B est **l'inverse à droite** de la matrice A.
Ce résultat signifie que dans l'espace des matrices carrées d'ordre n, l'inverse à droite de A est l'inverse (tout court) de A.

- Le résultat suivant est évidemment lui aussi vérifié :

$$BA = I_n \ \Rightarrow \ A \text{ et } B \text{ sont inverses l'une de l'autre}$$

Si B est **l'inverse à gauche** de A alors B est l'inverse de A.

□

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrez que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
Par calcul, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

□

3. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Trouver une relation entre J^2, J et I.

Démonstration.

$$\begin{aligned} J^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3J - 2I_3 \end{aligned}$$

$$\boxed{J^2 = 3J - 2I}$$

□

b) Montrer que J est inversible et donner son inverse en fonction de J et I.

Démonstration.
On déduit de ce qui précède : $J^2 - 3J = -2I$.
Ainsi, $J(J - 3I) = -2I$ ou encore :

$$J \times \left(-\frac{1}{2} (J - 3I) \right) = I$$

$$\boxed{J \text{ est inversible, d'inverse } J^{-1} = -\frac{1}{2} (J - 3I).}$$

□

4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 4A$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

- Ainsi : $A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I$.

$$\boxed{A^2 - 4A = -4I}$$

□

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I.

Démonstration.
D'après la question précédente, $A^2 - 4A = -4I$.

On en déduit : $-\dfrac{1}{4} (A^2 - 4A) = I$. Et ainsi :

$$A \times \left(-\frac{1}{4} (A - 4I) \right) = I$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{ est inversible, d'inverse : } A^{-1} = -\frac{1}{4} (A - 4I).}$$

□

5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$(A-I)^3 = (A-I)(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } (A-I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A-I)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

□

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I.

Démonstration.

- D'après ce qui précède : $(A-I)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
- Les matrices A et I commutent puisque I commute avec toute matrice carrée de même ordre. D'après la formule du binôme de Newton :

$$(A-I)^3 \;=\; A^3(-I)^0 + 3A^2(-I)^1 + 3A^1(-I)^2 + A^0(-I)^3 \;=\; A^3 - 3A^2 + 3A - I$$

et ainsi : $A^3 - 3A^2 + 3A = I$. On en déduit :

$$A \times \left(A^2 - 3A + 3I\right) \;=\; I$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{ est inversible, d'inverse } A^{-1} = A^2 - 3A + 3I.}$$

□

II.2. Reconnaître les matrices non inversibles

Commentaire

Pour démontrer qu'une matrice carrée M est non inversible, on peut utiliser l'une des propriétés suivantes :

M est trinagulaire et l'un (au moins) de ses coefficients diagonaux est nul	$\Rightarrow$	M est non inversible

M possède deux colonnes (resp. lignes) égales	$\Rightarrow$	M est non inversible

M possède deux colonnes (resp. lignes) colinéaires.	$\Rightarrow$	M est non inversible

On utilisera à bon escient l'une ou l'autre de ces propriétés dans les exercices suivants.
Ces propriétés seront détaillées dans l'année (notamment lors de la définition du rang d'une matrice).

Exercice 5
Sans faire de calcul, expliquez pourquoi les matrices suivantes sont non inversibles.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & -6 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

- La matrice M est non inversible car elle possède une colonne constituée uniquement de 0.
- La matrice N est non inversible car ses deux colonnes sont égales.
- La matrice O est non inversible car c'est une matrice triangulaire (supérieure) qui possède un coefficient diagonal nul.

Commentaire

On peut aussi remarquer que les 2 premières colonnes de la matrice O sont colinéaires : $C_2 = \frac{3}{2}\, C_1$.

- La matrice P est non inversible car elle possède deux colonnes colinéaires : $C_3 = -2\ C_1$.
- La matrice Q est non inversible car elle possède deux lignes colinéaires : $L_3 = 2\ L_1$.

□

II.3. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Commentaire

Commençons par rappeler la formule d'inversion pour les matrices carrées d'ordre 2.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) Si $ad - bc = 0$, la matrice A n'est pas inversible.

2) Si $ad - bc \neq 0$, la matrice A inversible, d'inverse :

$$\boxed{A^{-1} \ = \ \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Comment retenir cette formule :

× on échange les éléments diagonaux,

× on multiplie les autres par -1,

× et on n'oublie pas de multiplier par l'inverse de $ad - bc$ (obtenu par « produit en croix »).

La quantité $q = ad - bc$ est appelé **déterminant de** A. On la note habituellement det(A). Cette notion de déterminant est aussi définie pour des matrices $n \times n$ (mais nous ne le ferons pas cette année). On pourra retenir :

$$\boxed{A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0}$$

Exercice 6
Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donnez (sans faire de calcul) leur inverse.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

- La matrice M a pour déterminant $\det(M) = 0 - \big(1 \times (-1)\big) = 1 \neq 0$.
  On en déduit que M est inversible d'inverse :
  $$M^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
- La matrice N a pour déterminant $\det(N) = 1 \times 2 - 3 \times 1 = -1 \neq 0$.
  On en déduit que N est inversible d'inverse :
  $$N^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$
- La matrice O a pour déterminant $\det(O) = 2 \times 0 - (1 \times 3) = -3 \neq 0$.
  On en déduit que O est inversible d'inverse :
  $$O^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
- La matrice P a pour déterminant $\det(P) = 2 \times 18 - \big((-9) \times (-4)\big) = 36 - 36 = 0$.
  On en déduit que P n'est pas inversible.

  Commentaire
  On pouvait aussi remarquer que les deux colonnes de P sont colinéaires.
- La matrice Q a pour déterminant $\det(Q) = 1 - 1 = 0$.
  On en déduit que Q n'est pas inversible.

  Commentaire
  On pouvait aussi remarquer que les deux colonnes de Q sont égales. $\square$

II.4. Inverse par algorithme du pivot de Gaus

Exercice 7

À l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, montrer que chacune des matrices suivantes est inversible et déterminer son inverse. On optera pour la présentation matricielle.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi P est inversible.

Commentaire

La première étape de l'algorithme consiste à installer des 0 dans la première colonne sous le coefficient diagonal. Ici, à la fin de la première étape, on obtient une matrice triangulaire. C'est un pur hasard. On verra dans l'exemple suivant qu'il faut généralement aussi traiter la $2^{\text{ème}}$ colonne et ainsi de suite (jusqu'à l'avant dernière colonne).

On effectue l'opération $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement, } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow 2\ L_3 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi, Q est inversible.
On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftarrow 2\ L_1 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue enfin les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\ L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ L_2 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement, } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi R est inversible.
On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_2 \leftarrow -L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

Par mesure de vérification, il est conseillé d'effectuer **au brouillon** (cela n'a pas à se retrouver sur votre copie) le calcul de la matrice de départ par la matrice inverse calculée. Si ce produit donne la matrice identité, c'est que le calcul est juste. Dans le cas contraire, c'est qu'une erreur s'est produite.
Ici, pour la matrice P, on a bien :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

III. Savoir utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire homogène

Exercice 8

1. Résoudre le système linéaire (S_1) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & - & 6\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & + & 4\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 5\,y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Démonstration.

$$(S_1) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & - & 6\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ -x & + & 4\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 5\,y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \quad (0)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 3\,L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 3\,L_3 - 2\,L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & - & 6\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & 6\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ & - & 3\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \quad (1)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & - & 6\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & 6\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ & & & - & 6\,z & = & 0 \end{array}\right. \quad (2)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{6}\,L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & - & 6\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & 6\,y & - & 4\,z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right. \quad (3)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2\,L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 4\,L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & - & 6\,y & & & = & 0 \\ & & 6\,y & & & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right. \quad (4)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} 3\,x & & & = & 0 \\ & 6\,y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right. \quad (5)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{6}\,L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right. \quad (6)$$

□

Commentaire

- Ce système linéaire homogène possède le même nombre d'équations que d'inconnues. Son ensemble solution est $S = \{(0,0,0)\}$ (un unique triplet solution). Dans ce cas, le système est dit de Cramer.
- Ce système peut se présenter sous la forme : $AX = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

  On peut démontrer qu'un système homogène possédant le même nombre d'équations que d'inconnues est de Cramer si et seulement si la matrice A qui lui est associée est inversible.
- La notion de système de Cramer est employée essentiellement en première année. Ce vocabulaire n'apparaît pas aux concours.
- Il est impossible, physiquement, de ne pas savoir résoudre un système linéaire homogène. La méthode est connue et consiste en un algorithme. Il faut comprendre par là que, pour résoudre un système linéaire, il suffit d'appliquer, **dans l'ordre**, une séries d'instructions. Les règles étant parfaitement établies et étant les mêmes pour tous, il n'y a pas lieu de résoudre un système en effectuant des opérations autres que celles présentes dans ce corrigé.
- En particulier, on veillera :
  × à ne pas faire d'échange de lignes inutile. Un échange de lignes n'est nécessaire que lorsque l'on est en présence d'un pivot nul. Échanger 2 lignes pour obtenir un pivot « plus simple » n'apparaît pas pertinent : c'est source d'erreurs de recopie et cela augmente le nombre d'opérations nécessaires à la résolution.
  × à ne pas faire apparaître de fractions dans le système. Il est bien plus simple de ne travailler qu'avec des nombres entiers. L'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}\, L_1$ (en lieu et place de $L_3 \leftarrow 3\, L_3 - 2\, L_1$ effectuée en (1)) est à proscrire.
- L'opération élémentaire $L_3 \leftarrow -\frac{1}{6}\, L_3$, s'exprime à l'aide d'une fraction mais n'en fait pas apparaître dans le système. Elle est autorisée car permet de simplifier la résolution du système. On aurait aussi pu, ajouter en $(1')$ l'opération $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_2$ pour simplifier la ligne L_2.
- Les opérations présentes en (4), (5) et (6) ne sont pas réellement nécessaires. En effet, à la fin de (2), le système se présente sous forme triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. La matrice associée à un tel système est inversible. On en conclut alors directement que ce système est de Cramer et que son ensemble solution est : $\{(0,0,0)\}$. Dans les exemples à suivre (ainsi qu'aux concours), on peut se permettre de conclure directement en évoquant des « remontées successives ». Il faut faire attention à cet argument : il ne peut être évoqué que dans le cas présenté ici, à savoir un système homogène linéaire qui possède le même nombre d'équations que d'inconnues et qui se présente sous forme triangulaire avec coefficients diagonaux tous non nuls.
- Toute résolution différente de celle présente dans ce corrigé démontre une non assimilation de la méthode de résolution. Il convient alors de se référer au cours de première année sur la résolution de systèmes linéaires.
- On profite de cet exercice pour rappeler que, de manière générale en mathématiques, ce qui importe le plus c'est le voyage (série d'arguments, méthode employée) qui importe bien plus que la destination (résultat obtenu). La majeure partie des points alloués à une question est distribuée pour les arguments et non pour le résultat. Ainsi, la méthode de résolution d'un système compte plus que la résultat en lui-même.

2. Résoudre le système linéaire (S_2) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

Démonstration.

$$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 3\,L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 3\,L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & 8\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & 8\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 4\,L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & 8\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ & & & & 30\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccl} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

(par remontées successives)

□

3. Résoudre le système linéaire (S_3) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3\,x & + & 4\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Démonstration.

$$(S_3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3\,x & + & 4\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3\,L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & 4\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 3\,L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & - & z & = & 0 \\ & & & - & 13\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccl} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

(par remontées successives)

□

Exercice 9

1. Résoudre le système linéaire (S_1) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Démonstration.

$$(S_1) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (0)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 4y & - & 4z & = & 0 \\ & - & 4y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 4y & - & 4z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & + & y & = & z \\ & & 4y & = & 4z \end{array}\right. \qquad (3)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 4L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} 12x & & & = & 0 \\ & & 4y & = & 4z \end{array}\right. \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{12}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ & & y & = & z \end{array}\right. \qquad (4)$$

Commentaire

Cet exercice illustre les différentes étapes de résolution d'un système linéaire homogène :

1) mise sous forme échelonnée (sans élément sous-diagonaux stricts).

Par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes du système, on élimine les coefficients sous-diagonaux stricts (ceux se trouvant strictement sous la diagonale), en traitant d'abord ceux de la $1^{\text{ère}}$ colonne (en (1)), puis ceux de la $2^{\text{ème}}$ (en (2)) et ainsi de suite (en fonction de la taille initiale du système).

En fin de (2), on obtient la forme échelonnée attendue : c'est une forme triangulaire à ceci près que le système possède un coefficient diagonal nul.

2) mise sous forme triangulaire.

Afin de donner au système une forme triangulaire, on choisit la colonne dans laquelle on a fait apparaître un 0 en élément diagonal et on la transfère entièrement de l'autre côté du symbole d'égalité. Dans l'exemple précédent, on transfère la colonne qui porte la variable z. Cette variable est appelée **variable auxiliaire** car les autres variables vont s'exprimer en fonction de celle-ci. De manière générale, il peut y avoir plusieurs variables auxiliaires et donc plusieurs colonnes à transférer de l'autre côté du symbole d'égalité.

Il est à noter que dans l'exercice 8, il n'y a pas besoin d'utiliser de variables auxiliaires. La raison est simple. La première étape (mise sous forme échelonnée) fait apparaître un système déjà triangulaire (absence de 0 dans les coefficients diagonaux).

3) mise sous forme diagonale (fin de la résolution).

Par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes du système, on élimine les coefficients sur-diagonaux stricts (ceux se trouvant strictement au-dessus de la diagonale), en traitant d'abord ceux de la dernière colonne (en (4)), puis ceux de l'avant dernière (en fonction de la taille du système) et ainsi de suite.

En fin de (4), on obtient la forme diagonale attendue ce qui résout le système.

□

2. Résoudre le système linéaire (S_2) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Démonstration.

$$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2\,y & & & = & 0 \\ & - & 2\,y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2\,y & & & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & z \\ & - & 2\,y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,x & & & = & 2\,z \\ & & y & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\,L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array}\right.$$

□

3. Résoudre le système linéaire (S_3) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

Démonstration.

$$(S_3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & - & 4\,z & = & 0 \\ & & & - & 4\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & - & 4\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & - & z & = & -y \\ & - & 4\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 4\,L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} -4\,x & & & = & -4\,y \\ & - & 4\,z & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{4}\,L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}\,L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & y \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

□

Exercice 10

1. Résoudre le système linéaire (S_1) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \\ -2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

Démonstration.

$$(S_1) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \\ -2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\; x = -y - z \right.$$

□

2. Résoudre le système linéaire (S_2) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 6\,x & - & 3\,y & + & 9\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

Démonstration.

$$(S_3) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 6\,x & - & 3\,y & + & 9\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 3\,L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\; 2\,x = y - 3\,z \right.$$

□

Commentaire

- On a maintenant un aperçu complet de la résolution de système linéaire homogène à 3 équations et 3 inconnues :
  - × l'exercice 8 traite le cas des systèmes de Cramer.
    Ce cas ne nécessite pas l'utilisation de variable auxiliaire.
  - × l'exercice 9 traite le cas des systèmes qui nécessitent l'utilisation d'une unique variable auxiliaire.
    Les deux autres variables s'expriment en fonction de cette variable auxiliaire.
  - × l'exercice 10 traite le cas des systèmes qui nécessitent l'utilisation de deux variables auxiliaires.
    La variable restante s'exprime en fonction des 2 autres.

  Il n'y a pas d'autres cas pour les systèmes linéaires homogènes à 3 équations et 3 inconnues. Évidemment, les systèmes plus grands peuvent nécessiter l'utilisation de variables auxiliaires supplémentaires.
- Aux concours, on rencontre principalement le cas des systèmes linéaires homogènes à 3 équations et 3 inconnues (plus rarement, ceux des des systèmes linéaires homogènes à 4 équations et 4 inconnues). Il est impensable de ne pas savoir résoudre de tels systèmes. Encore une fois, il suffit d'appliquer à la lettre l'algorithme de résolution afin d'obtenir la résolution attendue.

IV. Puissances d'une matrice via le binôme de Newton

Exercice 11

On note I la matrice identité d'ordre 3 et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = I + 2H$.

Démonstration.

$$A = I + 2H \;\Leftrightarrow\; 2H = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{La matrice recherchée est } H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

2. Calculer H^2, puis H^k pour tout $k \geqslant 2$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que : $H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{H^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$: $H^k = 0$.
(on peut aussi remarquer que, pour tout $k \geqslant 2$: $H^k = H^2 \times H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$)

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 2,\ H^k = 0.}$$

□

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer A^n en fonction de I et de H.

Démonstration.

- Les matrices I et $2H$ commutent car I commute avec toute matrice carrée de même ordre.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(I + 2H)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2H)^k \; I^{n-k} & \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \; H^k & \textit{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^k \; H^k + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^k} \; H^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^k \; H^k & \textit{(car pour tout } k \geqslant 2 : H^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
&= \binom{n}{0} 2^0 \; H^0 + \binom{n}{1} 2^1 \; H^1 & \\
&= I + 2\,n\,H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &
\end{aligned}$$

- Enfin : $(I+2H)^0 = I$ et la formule précédente est donc aussi valable au rang $n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ (I+2H)^n = I + 2n\ H.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la deuxième somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ H^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'indice 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$. □