Algèbre linéaire (matrices) - niveau 2 (correction)

I. Savoir utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer une base d'un « sous-espace propre »

Exercice 1

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note : $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda \cdot X\}$.

Commentaire

- On peut démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(A)$ est un espace vectoriel.
  Pour ce faire, on démontre que $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- Par contre, savoir déterminer une base de $E_\lambda(A)$ constitue un exercice incontournable en $2^{\text{ème}}$ année. Cette question est présente dans `TOUTES` les épreuves de mathématiques. C'est d'ailleurs une excellente nouvelle car cette question se résout très facilement : il s'agit simplement de savoir résoudre un système linéaire homogène ! En effet :

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(A) &\Leftrightarrow AX = \lambda \cdot X \\ &\Leftrightarrow AX - \lambda \cdot X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \big(A - \lambda \cdot I_3\big) \cdot X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

1. Dans la suite de l'exercice, on note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $E_1(A)$.

Démonstration.
Rappelons : $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1(A) & \Longleftrightarrow & AX = X \\
& \Longleftrightarrow & (A - I)\ X = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & 2z & = & 0 \\ - & 3y & + & & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} - & 3y & + & & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} - & 3y & + & & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccl} y & & = 0 \\ & z & = 0 \end{array} \right. \\
& & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y = 0 \ \text{ et } \ z = 0 \} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \} \\
& = & \{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \} \\
& = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

Commentaire

On démontre dans cette question que $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Cela démontre au passage que $E_1(A)$ est un espace vectoriel. C'est d'ailleurs la manière à privilégier aux concours pour montrer que $E_1(A)$ est un espace vectoriel.

□

b) Déterminer $E_{-2}(A)$.

Démonstration.

- Rappelons : $E_{-2}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$.
  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_{-2}(A) & \Longleftrightarrow & AX = -2X \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & (A + 2I)\ X = 0 \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & + & 2z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ & & 5z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \underset{}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 5\, L_2}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & + & 2z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rrcl} x & & = & 0 \\ & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-2}(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 0 \ \text{ et } \ z = 0 \right\} \\[6pt]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\[6pt]
& = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\[6pt]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

□

c) Déterminer $E_3(A)$.

Démonstration.

- Rappelons : $E_3(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_3(A) & \Longleftrightarrow & AX = 3X \\ & \Longleftrightarrow & (A - 3I)\ X = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -2x & & & + & 2z & = & 0 \\ & - & 5y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2\,x & & & = & -2\,z \\ & - & 5y & = & -z \end{array} \right. \\ & \underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\overset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2} L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & = & z \\ & & 5y & = & z \end{array} \right. \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_3(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \text{ et } \ 5y = z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \frac{1}{5}\,z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que la matrice P est **triangulaire** (supérieure) et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Elle est donc inversible.
- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{5} L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D.

Démonstration.

- La matrice D est définie par :

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ obtenue est bien diagonale.}}$$

- Comme $D = P^{-1}AP$, alors $PD = AP$ et finalement $PDP^{-1} = A$.

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

Commentaire

- La matrice P est obtenue comme concaténation des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Ce n'est pas un hasard (on pourrait en dire autant des coefficients diagonaux de D) mais c'est un peu tôt pour en parler. Ceci sera détaillé dans le chapitre « Réduction ».

□

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $A^0 = I$.
- D'autre part : $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$).
Alors :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A \times A^n \\
&= A \times PD^nP^{-1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} && \textit{(d'après la question } \boldsymbol{3.b)}\textit{)} \\
&= PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} \\
&= PDID^nP^{-1} \\
&= PDD^nP^{-1} \ = \ PD^{n+1}P^{-1}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.}$$

□

3. La formule de la question ***2.c)*** est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Démonstration.
D'après la question ***3.b)*** : $A = PDP^{-1}$.
La matrice A est le produit de 3 matrices inversibles (la matrice D est inversible car diagonale et à cœfficients diagonaux tous non nuls). On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= (\ PDP^{-1}\ )^{-1} \\
&= (\ (PD)P^{-1}\ )^{-1} \\
&= (P^{-1})^{-1}\ (PD)^{-1} \ = \ P\ D^{-1}P^{-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La formule de la question } \boldsymbol{3.c)} \text{ est donc vérifiée pour } n = -1.}$$

□

Commentaire

- La forme : $A = PDP^{-1}$ permet d'obtenir facilement la formule de l'élévation à la puissance n de la matrice A demandée ici, à savoir :
$$A^n = PD^nP^{-1}$$

- Si on souhaite déterminer A^n il faut que D^n soit facile à calculer. C'est le cas ici puisque D est une matrice diagonale (encore une fois, ce n'est pas un hasard et ce sera détaillé dans le chapitre « Réduction »). Plus précisément, on a ici :
$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$
et ainsi :
$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & (-2)^n & -\frac{(-2)^n}{5} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^n - 1 \\ 0 & (-2)^n & \frac{3^n - (-2)^n}{5} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Cette première récurrence est l'occasion de faire un point sur la notion de variable muette.
Dans une proposition mathématique, on dit qu'une variable est **muette** (on parle aussi de variable **liée**) si elle est portée par un quantificateur. Ainsi, dans les propositions :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \qquad\qquad \exists n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$$
la variable n est muette. Cela signifie qu'on peut renommer la variable n sans que cela ne change le sens de la proposition mathématique. Ainsi, les propositions :
$$\forall m \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(m) \qquad\qquad \exists k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(k)$$
ont même sens que les propositions précédentes.
Par contre, si on considère seulement la proposition $\mathcal{P}(n)$ (sans faire apparaître de quantificateur devant), on obtient un objet mathématique qui dépend de ce n particulier. Le manque de compréhension de la notion de variable muette a pour conséquence trois erreurs classiques :
1) Montrons par récurrence : $\mathcal{P}(n)$.
$\hookrightarrow$ par récurrence, on démontre qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, pas seulement à un rang n donné.
2) ... où $\mathcal{P}(n)$: $\cancel{\forall n \in \mathbb{N}}$, ...
$\hookrightarrow$ nous avons déjà discuté de ce point au-dessus : une propriété commençant par $\forall n \in \mathbb{N}$ est indépendante de n (c'est alors une variable muette).
3) Supposons : $\cancel{\forall n \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
$\hookrightarrow$ ceci n'a pas de sens ! On ne peut supposer la propriété vraie pour tout n : c'est précisément ce que l'on souhaite démontrer.
Si l'une ou l'autre de ces erreurs est présente dans la rédaction, la récurrence ne sera pas lue et aucun point ne sera attribué sur la question.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. a) Déterminer $E_1(A)$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1(A) & \Longleftrightarrow & AX = X \\
& \Longleftrightarrow & (A - 1 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow 2\, L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 2y & = & -2z \\ & & 4y & = & 2z \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow 2\, L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 4x & & & = & -2z \\ & & 4y & = & 2z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -\frac{1}{2}\, z \\ y & = & \frac{1}{2}\, z \end{array} \right.
\end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\dfrac{1}{2}\, z \ \text{ et } \ y = \dfrac{1}{2}\, z \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\, z \\ \frac{1}{2}\, z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}$$

$\square$

b) Déterminer $E_2(A)$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_2(A) & \Longleftrightarrow & AX = 2X \\ & \Longleftrightarrow & (A - 2 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & -2z \\ & & 4y & = & 3z \end{array} \right. \\ & \underset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & & & = & -z \\ & & 4y & = & 3z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -\frac{1}{2}\,z \\ y & = & \frac{3}{4}\,z \end{array} \right. \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_2(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\dfrac{1}{2}\,z \ \text{ et } \ y = \dfrac{3}{4}\,z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,z \\ \frac{3}{4}\,z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)}$$

$\square$

c) Déterminer $E_3(A)$.

Démonstration.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_3(A) & \Longleftrightarrow & AX = 3X \\
& \Longleftrightarrow & (A - 3 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftrightarrow L_3 + 2\ L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 2z \\ & - & 2y & = & -2z \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow 2\ L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2x & & & = & 2z \\ & - & 2y & = & -2z \end{array} \right. \\
& \overset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}\ L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}\ L_2}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -z \\ y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_3(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \text{ et } \ y = z \} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \\
& = & \{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_3(A) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
On remarque :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } P \text{ est inversible, d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D.

Démonstration.

- La matrice D est définie par :

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ obtenue est bien diagonale.}}$$

- Comme $D = P^{-1}AP$, alors $PD = AP$ et finalement $PDP^{-1} = A$.

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

Commentaire

- La matrice P est obtenue comme concaténation des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Ce n'est pas un hasard (on pourrait en dire autant des coefficients diagonaux de D) mais c'est un peu tôt pour en parler. Ceci sera détaillé dans le chapitre « Réduction ».

□

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $A^0 = I$.
  - D'autre part : $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$).
  Alors :

$$\begin{array}{rcll} A^{n+1} & = & A \times A^n & \\ & = & A \times PD^nP^{-1} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\ & = & PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} & \\ & = & PDID^nP^{-1} & \\ & = & PDD^nP^{-1} \ = \ PD^{n+1}P^{-1} & \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.}$$

Commentaire

On retrouve la même question que dans l'Exercice 1.
C'est une question classique qu'il faut savoir résoudre.

□

II. Puissances d'une matrice via le binôme de Newton

Exercice 3
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. Démontrer que la matrice $A - 2I$ est non inversible. Déterminer $E_2(A)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A - 2I \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice $A - 2I$ possède deux colonnes égales : $C_1 = C_2$.

$$\boxed{\text{La matrice } A - 2I \text{ n'est donc pas inversible.}}$$

- Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_2(A) \quad & \iff \quad AX = 2X \\
& \iff \quad (A - 2 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & 0 & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -y & + & z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} E_2(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y+z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

2. Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftrightarrow L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2\ L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2\ L_2 + L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}\, L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

La première opération a consisté à échanger les lignes L_1 et L_2. Grâce à cette opération, on place le réel 1 (utilisé ensuite comme pivot non nul) en haut à gauche de la matrice.

□

3. Démontrer que la matrice $\Delta = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure et trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\Delta = \alpha I + J$$

Démonstration.

- La matrice Δ est définie par :

$$\begin{aligned} \Delta \ = \ P^{-1}AP \ &= \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ obtenue est bien triangulaire supérieure.}}$$

- On remarque alors :

$$\Delta - J \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ = \ 2\, I$$

$$\boxed{\text{La valeur } \alpha = 2 \text{ permet d'écrire la matrice } \Delta \text{ sous la forme : } \Delta = \alpha I + J.}$$

□

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer J^2, puis J^k pour tout entier $k \geqslant 2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$J^2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$: $J^k = 0$.
(on peut remarquer que, pour tout $k \geqslant 2$: $J^k = J^2 \times J^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times J^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$)

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 2,\ J^k = 0.}$$

□

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer Δ^n en fonction de I et J.

Démonstration.

- Les matrices $2I$ et J commutent car I commute avec toute matrice carrée de même ordre.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\big(2I + J\big)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k}\ J^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ I^{n-k}\ J^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ J^k && \textit{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ J^k + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ J^k} && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ J^k && \textit{(car pour tout } k \geqslant 2 : J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
&= \binom{n}{0} 2^n\ J^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1}\ J^1 \\
&= 2^n\ I + 2^{n-1}\ nJ \ = \ 2^{n-1}\ (2\ I + nJ) \\
&= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2n \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Enfin : $(2I + J)^0 = I$ et la formule précédente est donc aussi valable au rang $n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ \Delta^n = (2I + J)^n = 2^n I + n 2^{n-1} J.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ \ J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'indice 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.

□

c) En déduire l'expression matricielle de A^n.

Démonstration.

- Par récurrence immédiate, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \left(P\Delta P^{-1}\right)^n = P\Delta^n P^{-1}$$

Commentaire

On retrouve ici le résultat dont on s'est notamment servi dans l'Exercice 1.
Ici, démontrer le résultat n'est pas l'objectif de la question mais un résultat intermédiaire qui n'est pas cité dans l'énoncé. On peut donc utiliser ce résultat directement, en précisant simplement qu'il se montre par récurrence.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= P\Delta^n P^{-1} = P\big(2^n I + n2^{n-1}J\big)P^{-1} \\ &= 2^n PIP^{-1} + n2^{n-1}PJP^{-1} \\ &= 2^n PP^{-1} + n2^{n-1}PJP^{-1} \\ &= 2^n I + n2^{n-1}PJP^{-1} \end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} PJP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A - 2I \end{aligned}$$

Commentaire

On peut aussi faire ce calcul en revenant à l'écriture : $\Delta = 2I + J$.
Ainsi, $J = \Delta - 2I$ et :

$$PJP^{-1} = P\big(\Delta - 2I\big)P^{-1} = P\Delta P^{-1} - 2PIP^{-1} = A - 2I$$

- En conclusion :

$$\begin{aligned} A^n &= 2^n\, I + n2^{n-1}\, \big(A - 2I\big) = (2^n - n2^n)\, I + n\, 2^{n-1}\, A = (1-n)\; 2^n\; I + n\, 2^{n-1}\, A \\ &= 2^{n-1}\, \big((2-2n)\, I + n\, A\big) \\ &= 2^{n-1} \left(\begin{pmatrix} 2-2n & 0 & 0 \\ 0 & 2-2n & 0 \\ 0 & 0 & 2-2n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n & 0 & 0 \\ n & 3n & -n \\ n & n & n \end{pmatrix} \right) \\ &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2+n & -n \\ n & n & 2-n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2+n & -n \\ n & n & 2-n \end{pmatrix}.}$$

□

III. Manipulations de matrices en Python

Testez les commandes suivantes sur votre ordinateur.

- `np.array(L)` prend en paramètre une liste de listes `L` et renvoie la matrice dont les lignes sont les listes contenues dans `L`. Exemple :

```
M1 = np.array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]])
print(M1)
```

- `np.zeros([n,m])` renvoie la matrice de taille `n` $\times$ `m` remplie de 0. Exemple :

```
M2 = np.zeros([2,3])
print(M2)
```

- `np.ones([n,m])` renvoie la matrice de taille `n` $\times$ `m` remplie de 1. Exemple :

```
M3 = np.ones([4,2])
print(M3)
```

- `np.eye(n)` renvoie la matrice identité d'ordre `n`. Exemple :

```
M4 = np.eye(3)
print(M4)
```

- `np.dot(M,N)` renvoie la matrice $A = MN$ (produit matriciel). Exemple :

```
M6 = np.dot(M1,M4)
print(M6)
```

Exercice 4
On rappelle que la commande `rd.randint(a, b, [n, m])` renvoie une matrice aléatoire de taille $n \times m$ dont chaque coefficient est choisi indépendamment et uniformément dans $[\![a, b-1]\!]$.
Expliquer ce que fait le script **Python** suivant.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

A = np.array([[1,1,1], [0,1,1], [0,0,1]])
B = np.ones([3,3]) - np.eye(3)
C = rd.randint(-3, 4, [3,3])
D = np.dot(np.dot(A,B),C)
print('A = '), print(A)
print('B = '), print(B)
print('C = '), print(C)
print('D = '), print(D)
```

Démonstration. On commence par importer la bibliothèque `numpy` qui permet de manipuler des tableaux et des matrices puis son module `numpy.random` qui permet de générer des nombres aléatoires selon les lois usuelles.

Le script consiste à créer 4 matrices :

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Une matrice $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont choisis aléatoirement et indépendamment, en suivant la loi uniforme sur $[\![-3, 3]\!]$.

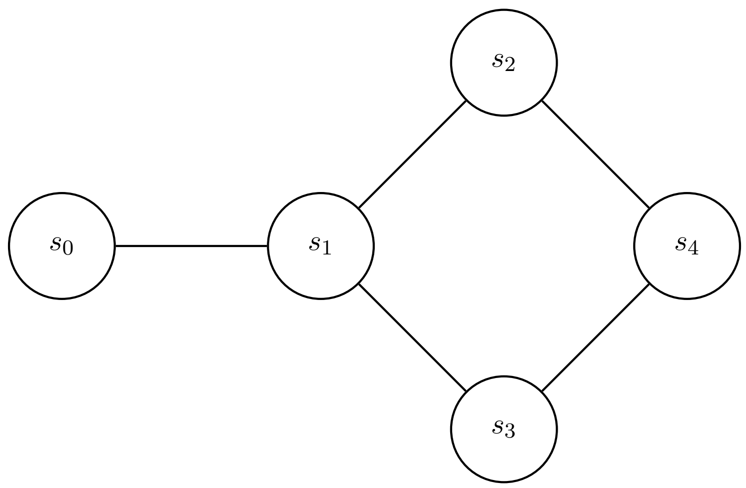
La matrice $D = ABC$.

Pour finir, le script affiche les 4 matrices avec leur nom devant, les unes à la suite des autres.

□

Exercice 5

On considère le graphe G non orienté suivant :



1. a) Rappeler la définition de la matrice d'adjacence du graphe G. On la notera M.

Démonstration. La matrice d'adjacence du graphe G est la matrice carrée $M = (m_{i,j})$ de taille 5 (puisque G a 5 sommets) telle que le coefficient $m_{i,j}$ vaut 1 si il existe une arête entre le i^{e} sommet et le j^{e} sommet de G, et 0 sinon.

De manière plus précise (et en faisant attention à la numérotation des sommets) : pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$,

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si il existe une arête entre } s_{i-1} \text{ et } s_{j-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

b) Quelle commande doit-on écrire pour définir la matrice M en **Python** ?

Démonstration.

La matrice d'adjacence est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ce que l'on traduit en **Python** par :

```
M = np.array([[0,1,0,0,0], [1,0,1,1,0], [0,1,0,0,1], [0,1,0,0,1], [0,0,1,1,0]])
```

□

c) Soient n un entier naturel non nul, i un entier de $\llbracket 1,5 \rrbracket$ et j un entier de $\llbracket 1,5 \rrbracket$.
Rappeler sans justification l'interprétation du coefficient situé à la ligne i et à la colonne j dans la matrice M^n.

Démonstration. Ce coefficient est égal au nombre de chemins de longueur n allant du sommet s_{i-1} au sommet s_{j-1}. □

2. Écrire une fonction en langage **Python**, nommée `matrice_vers_liste`, prenant en entrée la matrice d'adjacence `M` (définie sous forme de listes de listes) d'un graphe G non orienté et renvoyant la liste d'adjacence de G.

Démonstration.

```python
def matrice_vers_liste(M):
    p = len(M)
    L = [[] for k in range(p)]
    for i in range(p):
        for j in range(i+1, p):
            if M[i,j] == 1: # i.e. le sommets i et j sont voisins.
                L[i].append(j)
                L[j].append(i)
    return L
```

Commentaire

Soit G un graphe. Soit x un sommet de G. On appelle *liste d'adjacence* du sommet x la liste des voisins de x. Par extension, la liste d'adjacence de G est la liste de toutes les listes d'adjacence des sommets de G.
Dans le programme précédent, on utilise le fait que G est non orienté donc la matrice d'adjacence est symétrique. Ceci a permis de ne visiter que la partie triangulaire supérieure de la matrice (économie de temps).

□