Analyse - niveau 3 (correction)

I. Déterminer la régularité d'une fonction

- La définition suivante est hors-programme, l'exercice est un entraînement à raisonner sur des notions nouvelles.

> *Une fonction f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:*
> - × *f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,*
> - × *f admet une limite à droite finie en a_i,*
> - × *f admet une limite à gauche finie en a_{i+1}.*
>
> *On note alors $\tilde{f}_i$ le prolongement par continuité de f sur $[a_i, a_{i+1}]$.*

En notant F_i une primitive de $\tilde{f}_i$ sur $[a_i, a_{i+1}]$, on peut alors définir **l'intégrale de a à b** de la fonction f :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt \ = \ \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{f}_i(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} \left(F_i(a_i) - F_i(a_{i-1})\right)}$$

Exercice 1
On considère la fonction :

$$f \ : \ \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}$$
$$x \ \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue par morceaux sur $[-4, 4]$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $[-4, -1[$ car est nulle sur cet intervalle.
- La fonction f est continue sur $]-1, 1[$ car polynomiale sur cet intervalle.
- La fonction f est continue sur $]1, 4[$ car est le quotient $\frac{g_1}{g_2}$ où :
  - × $g_1 : x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]1, 4[$,
  - × $g_2 : x \mapsto x$:
    - – est continue (car polynomiale) sur $]1, 4[$.
    - – ne s'annule pas sur $]1, 4[$.
- De plus, les limites à gauche et à droite en les points -1 et 1 sont toutes finies :
  - × $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 0$,
  - × $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$,
  - × $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -1$,
  - × $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est } \mathcal{C}^0_m \ (\textit{continue par morceaux}) \text{ sur } [-4, 4].}$$

□

2. Justifier l'existence et calculer la valeur de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(u)\ du$.

Démonstration.

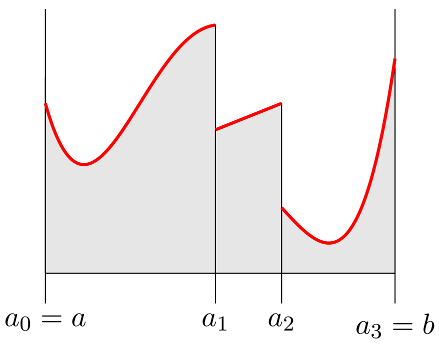
- La fonction f est $\mathcal{C}_m^0$ sur $[-4, 4]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)\ dx$ est bien définie.
- Par définition :

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{4} f(x)\ dx &= \int_{-4}^{-1} f(x)\ dx + \int_{-1}^{1} f(x)\ dx + \int_{1}^{4} f(x)\ dx \\
&= \int_{-4}^{-1} 0\ dx + \int_{-1}^{1} x\ dx + \int_{1}^{4} \frac{\ln(x)}{x}\ dx \\
&= \left[\ \frac{x^2}{2}\ \right]_{-1}^{1} + \left[\ \frac{(\ln(x))^2}{2}\ \right]_{1}^{4} \qquad \textit{(on reconnaît la forme classique } u' \times u^{\alpha} \textit{ avec } u = \ln(x) \textit{ et } \alpha = 1\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\ \left[\ x^2\ \right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\ \left[\ (\ln(x))^2\ \right]_{1}^{4} \\
&= \frac{1}{2}\ (\cancel{1^2} - \cancel{(-1)^2}) + \frac{1}{2}\ ((\ln(4))^2 - \cancel{(\ln(1))^2}) \\
&= \frac{1}{2}\ (2\ln(2))^2 \ = \ \frac{4(\ln(2))^2}{2} \ = \ 2(\ln(2))^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-4}^{4} f(x)\ dx = 2(\ln(2))^2}$$

Commentaire

- La fonction f `N'EST PAS` continue sur $[-4, 4]$ car elle n'est pas continue en -1 (ni en 1). Elle est par contre continue par morceaux sur $[-4, 4]$ ce qui suffit pour démontrer que l'intégrale $\int_{-4}^{4} f(t)\ dt$ est bien définie. On la calcule en appliquant la **définition** d'intégrale dans le cas de telles fonctions : il s'agit de calculer les intégrales sur chaque « intervalle de continuité » $[a_i, a_{i+1}]$ (c'est la fonction $\tilde{f}_i$ qui est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$).
- Même si le calcul se fait en découpant sur des intervalles, ce n'est pas pour autant une application du théorème de Chasles. Le théorème de Chasles s'applique **après** avoir démontré que l'intégrale existait (*cf* cours) et ne sert donc pas à la définir.
- On place ci-dessous une représentation graphique permettant de comprendre comment est définie l'intégrale sur un segment $[a, b]$ d'une fonction f qui est C_m^0 sur $[a, b]$.



La fonction f est continue par morceaux sur $[a_0, a_3]$ car elle vérifie les propriétés suivantes.

- La fonction f est continue sur $[a_0, a_1[$.
- La fonction f est continue sur $]a_1, a_2[$.
- La fonction f est continue sur $]a_2, a_3]$.
- La fonction f admet des limites finies (éventuellement non égales) à gauche et à droite de a_1 et a_2.

$\square$

3. Ecrire un programme en **Python** permettant de tracer le graphe de f au dessus du segment $[-4,4]$.

Démonstration. On propose le programme suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    if x <= -1:
        return 0
    elif x < 1:
        return x
    else:
        return np.log(x) / x

abscisse = np.linspace(-4, 4, 1000)
ordonnee = [f(x) for x in abscisse]
plt.plot(abscisse, ordonnee)
plt.grid()
```

- La fonction f étant définie par morceaux, on utilise une structure conditionnelle (à l'aide des commandes `if`, `elif` et `else`) pour définir la fonction f en **Python**.
- La commande `np.linspace(-4, 4, 1000)` permet de créer une liste (ou un tableau unidimensionnel, c'est pareil pour **Python**) qui contient 1000 nombres régulièrement espacés, commençant à -4 et finissant à 4.
- On utilise ensuite une fonctionnalité de **Python** permettant de créer une liste par compréhension. Ainsi, la commande `[f(x) for x in abscisse]` crée la liste contenant tous les nombres $f(x)$ pour x variant dans la liste `abscisse`.
- Pour bien comprendre ce que fait `plt.plot`, notons $x_0, x_1, \ldots, x_{999}$ les nombres contenus dans la liste `abscisse` et notons $y_0, y_1, \ldots, y_{999}$ les nombres contenus dans la liste `ordonnee`. On rappelle que, par construction, $y_i = f(x_i)$.
  La commande `plt.plot(abscisse, ordonnee)` trace tous les points de coordonnées $(x_i, y_i) = (x_i, f(x_i))$ et les relie, dans l'ordre, par un segment de droite.
  On obtient bien une approximation du graphe de f si le nombre de points est suffisamment élevé, puisque le graphe de f est par définition
  $$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-4,4]\}$$
- La commande `plt.grid()` permet de tracer des lignes en dessous du graphe pour mieux visualiser les valeurs prises par la fonction f.

Commentaire

Le tracé fait par **Python** fait apparaître deux segments de droites verticaux, qui ne devraient pas figurer sur un tracé à la main. Ces segments relient deux points qui sont de part et d'autre d'un point de discontinuité de f.

□

II. Comparaison séries / intégrales

Exercice 2

1. On considère dans la suite une fonction f continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer : $\forall k \geqslant 1,\ \ f(k+1) \ \leqslant\ \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \ \leqslant\ f(k)$.

Faire apparaître sur une même représentation graphique ces trois quantités sous forme d'aires. *(cela ne constitue pas une démonstration)*

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$. Soit $t \in [k, k+1]$ (autrement dit : $k \leqslant t \leqslant k+1$).
Comme f est décroissante, on a :

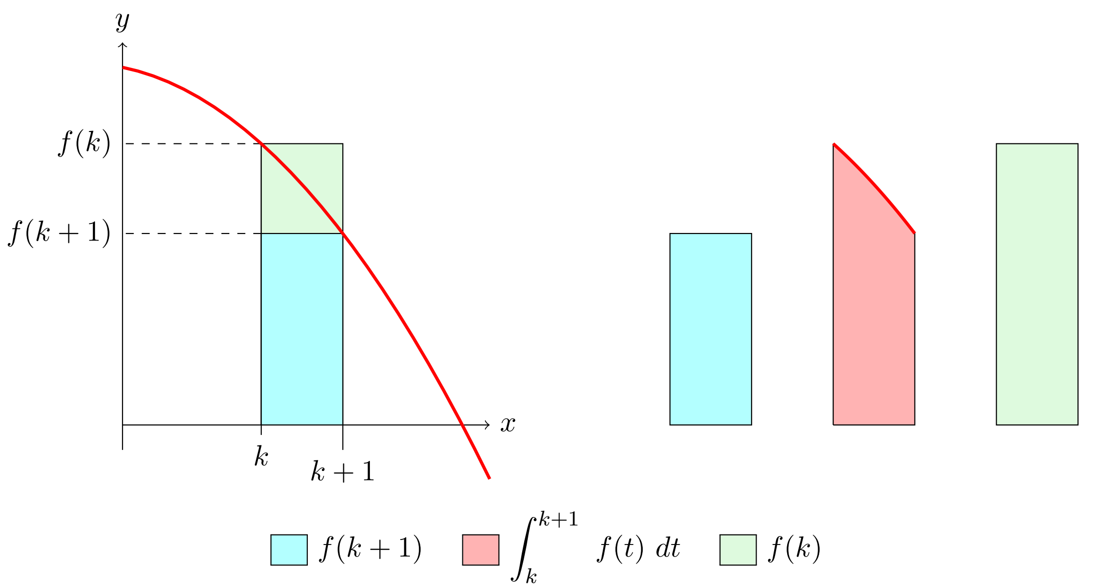
$$f(k+1) \ \leqslant\ f(t) \ \leqslant\ f(k)$$

Ainsi, par croissance de l'intégration (les bornes sont bien ordonnées : $k \leqslant k+1$) :

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \ \leqslant\ \int_k^{k+1} f(t)\,dt \ \leqslant\ \int_k^{k+1} f(k)\,dt$$

$$f(k+1) \ =\ ((\cancel{k}+1)-\cancel{k})\,f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \qquad \int_k^{k+1} f(k)\,dt = ((\cancel{k}+1)-\cancel{k})\,f(k) \ =\ f(k)$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \ f(k+1) \ \leqslant\ \int_k^{k+1} f(t)\,dt \ \leqslant\ f(k)}$$



□

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \ \leqslant\ \int_1^{n+1} f(t)\,dt \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

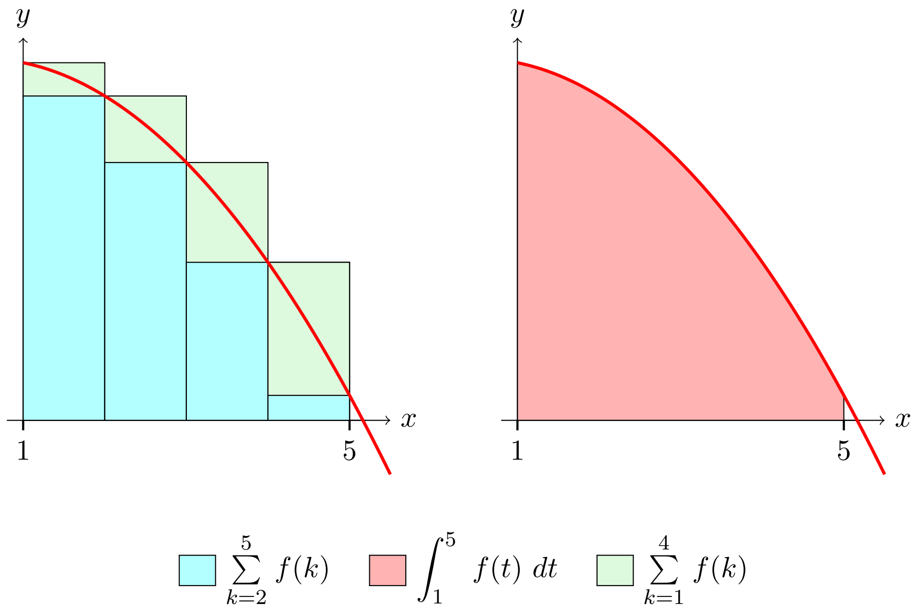
Faire apparaître sur une nouvelle représentation graphique ces trois quantités sous forme d'aires. *(cela ne constitue pas une démonstration)*

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$. En sommant les inégalités de la question précédente, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k+1) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\ dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} f(k) & & \displaystyle\int_{1}^{n+1} f(t)\ dt & & \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \ \leqslant\ \int_{1}^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} f(k)}$$

Représentation graphique : avec $n = 4$



$\square$

c) Démontrer enfin que, pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$\int_{2}^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ \sum_{k=2}^{n} f(k) \ \leqslant\ \int_{1}^{n} f(t)\ dt$$

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$. Soit $t \in [k, k+1]$. On a : $t - 1 \ \leqslant\ k \ \leqslant\ t$.
Comme f est décroissante, on a :

$$f(t) \ \leqslant\ f(k) \ \leqslant\ f(t-1)$$

Ainsi, on a :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_{k}^{k+1} f(t)\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_{k}^{k+1} f(k)\ dt & \leqslant & \displaystyle\int_{k}^{k+1} f(t-1)\ dt \\ & & \shortparallel & & \shortparallel \\ & & ((\cancel{k}+1) - \cancel{k})\ f(k) & & \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(u)\ du \end{array}$$

(le calcul de droite est obtenu par le changement de variable $\boxed{u = t-1}$*)*

Par sommation de ces inégalités, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\ dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k) & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\ dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ \displaystyle\int_{2}^{n+1} f(t)\ dt & & & & \displaystyle\int_{1}^{n} f(t)\ dt \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \int_{2}^{n+1} f(t)\ dt \ \leqslant\ \sum_{k=2}^{n} f(k) \ \leqslant\ \int_{1}^{n} f(t)\ dt}$$

$\square$

2. On considère maintenant la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$.

a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \ \leqslant\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \ \leqslant\ \ln(n)$$

Démonstration.

- Notons tout d'abord que $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante et continue sur $[1, +\infty[$.
- Soit $n \geqslant 2$. D'après la question ***1.c)***, on a :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \displaystyle\int_{2}^{n+1} \frac{1}{t}\ dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} & \leqslant & \displaystyle\int_{1}^{n} \frac{1}{t}\ dt & & \\ & & \shortparallel & & & & \shortparallel & & \\ \ln(n+1) - \ln(2) & = & \Big[\ \ln(|t|)\ \Big]_{2}^{n+1} & & & & \Big[\ \ln(|t|)\ \Big]_{1}^{n} & = & \ln(n) - \cancel{\ln(1)} \end{array}$$

- Si $n = 1$, alors, par convention : $\displaystyle\sum_{k=2}^{1} \frac{1}{k} = 0$

  Or $\ln(1+1) - \ln(2) = 0$ et $\ln(1) = 0$. Donc on a toujours :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n)$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \ln(n+1) - \ln(2) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n)}$$

$\square$

b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 1$.

- On remarque : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$.
- D'après la question précédente, on a :

$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \ \leqslant\ 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \ \leqslant\ 1 + \ln(n)$$

  D'où :

$$\ln(n+1) + 1 - \ln(2) \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ \leqslant\ 1 + \ln(n)$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \ln(n+1) + 1 - \ln(2) \ \leqslant\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ \leqslant\ 1 + \ln(n)}$$

$\square$

c) En déduire : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Démonstration.
D'après la question précédente, on a :

$$\frac{\ln(n+1)+1-\ln(2)}{\ln(n)} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \leqslant \frac{1+\ln(n)}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)} + 1$$

- Étudions le membre de gauche.
  - × Tout d'abord :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

  - × Ensuite : $\frac{1-\ln(2)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

  Ainsi : $\frac{\ln(n+1)+1-\ln(2)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- Étudions le membre de droite.
  $\frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $1 + \frac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

On en déduit, par le théorème d'encadrement : $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on a : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

□

d) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$?

Démonstration.
Comme $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a, d'après la question précédente, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \text{ est donc divergente.}}$$

□

3. On considère maintenant la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ sur $[2, +\infty[$.

a) Soit $n \geqslant 1$. Calculer $\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ \ln(x)}\, dx$.

Démonstration.

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ \ln x}\, dx = \int_2^{n+1} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx = [\ \ln(|\ln x|)\ ]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$

$$\boxed{\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ \ln(x)}\, dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))}$$

□

b) À l'aide de ce qui précède, comparer $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ \ln(x)}\ dx$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

Démonstration.
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ \ln(x)}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$.

En effet, elle est dérivable (même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $[2, +\infty[$ en tant qu'inverse de la fonction $x \mapsto x\ \ln(x)$:

- × dérivable (même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $[2, +\infty[$ par produit de fonctions dérivables (même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $[2, +\infty[$.
- × et qui ne s'annule pas sur $[2, +\infty[$.

Et pour tout $x \geqslant 2$, on a : $f'(x) \ = \ -\dfrac{1+\ln(x)}{(x\ \ln(x))^2} \ \leqslant \ 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question } \textbf{\textit{1.c)}}\text{, on a : } \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \ \geqslant \ \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ \ln(x)}\ dx.}$$

□

c) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

Démonstration.
D'après les questions précédentes, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \ \geqslant \ \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ \ln(x)}\ dx \ = \ \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$$

Or, par théorème de composition des limites : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n+1)) \ = \ \lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n)) \ = \ +\infty$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)} \text{ est donc divergente.}}$$

□

d) Écrire en **Python** une fonction `sommeSI` qui :

- × prend en paramètre une variable `n`,
- × renvoie la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{\mathtt{n}} \frac{1}{k\ln(k)}$.

Démonstration.

```python
def sommeSI(n):
    S = 0
    for k in range(2, n+1):
        S = S + 1 / (k * np.log(k))
    return S
```

□