Probabilités - niveau 3 (correction)

I. Formule des probabilités totales

Exercice 1
On dispose d'une pièce truquée. La probabilité qu'elle tombe sur `Pile` est $p \in]0,1[$ et la probabilité qu'elle tombe sur `Face` est $q = 1-p$. On considère une succession infinie de lancers de cette pièce.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit l'événement

B_n : « aucune séquence de `Face` de longueur 3 n'apparaît dans la suite des n premiers lancers »

et on note $b_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer b_1, b_2 et b_3.

Démonstration.

- Il ne peut pas y avoir de séquence de `Face` de longueur 3 dans une suite de 1 seul lancer donc
$$\boxed{b_1 = 1.}$$
- De même, il ne peut pas y avoir de séquence de `Face` de longueur 3 dans une suite de 2 lancers donc
$$\boxed{b_2 = 1.}$$
- Notons, pour tout entier $k \geqslant 1$,
$$P_k : \text{« On obtient Pile au } k^{\text{e}} \text{ lancer »}$$
$$F_k : \text{« On obtient Face au } k^{\text{e}} \text{ lancer »}$$
Alors
$$\overline{B_3} = F_1 \cap F_2 \cap F_3$$
donc, par indépendance,
$$\mathbb{P}(\overline{B_3}) = q^3$$
d'où
$$\boxed{b_3 = 1 - q^3.}$$

□

2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 4$,
$$b_n = pb_{n-1} + pqb_{n-2} + pq^2 b_{n-3}$$

Indication : interpréter cette formule comme l'application de la formule des probabilités totales avec un certain système complet d'événements qui fera apparaître les probabilités p, pq et pq^2.

Démonstration. Soit $n \geqslant 4$.
La famille $(P_1, F_1 \cap P_2, F_1 \cap F_2 \cap P_3, F_1 \cap F_2 \cap F_3)$ est un système complet d'événements et, par indépendance,
$$\mathbb{P}(P_1) = p, \qquad \mathbb{P}(F_1 \cap P_2) = pq, \qquad \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap P_3) = pq^2, \qquad \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = q^3$$
D'après la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_n \cap P_1) + \mathbb{P}(B_n \cap F_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(B_n \cap F_1 \cap F_2 \cap P_3) + \mathbb{P}(B_n \cap F_1 \cap F_2 \cap F_3)$$

Or, $B_n \cap F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \varnothing$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(B_n \cap P_1) + \mathbb{P}(B_n \cap F_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(B_n \cap F_1 \cap F_2 \cap P_3) \\
&= \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}_{P_1}(B_n) + \mathbb{P}(F_1 \cap P_2)\mathbb{P}_{F_1 \cap P_2}(B_n) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap P_3)\mathbb{P}_{F_1 \cap F_2 \cap P_3}(B_n) \\
&= p\mathbb{P}_{P_1}(B_n) + pq\mathbb{P}_{F_1 \cap P_2}(B_n) + pq^2\mathbb{P}_{F_1 \cap F_2 \cap P_3}(B_n)
\end{aligned}$$

De plus, si l'on sait que le premier lancer a donné un `Pile`, alors l'événement B_n est réalisé si et seulement si il n'y a pas de séquence de `Face` de longueur 3 dans la suite des lancers numéros 2 à n. Puisque les lancers sont indépendants et que cette suite de lancers à une longueur égale à $n-1$, on en déduit que

$$\mathbb{P}_{P_1}(B_n) = \mathbb{P}(B_{n-1})$$

En effet, tout se passe comme si on recommençait une nouvelle suite de $n-1$ lancers.
De la même manière, on a $\mathbb{P}_{F_1 \cap P_2}(B_n) = \mathbb{P}(B_{n-2})$ et $\mathbb{P}_{F_1 \cap F_2 \cap P_3}(B_n) = \mathbb{P}(B_{n-3})$.
D'où

$$\boxed{b_n = pb_{n-1} + pqb_{n-2} + pq^2b_{n-3}.}$$

□

3. *Informatique*

a) Écrire une fonction en **Python** qui prend en entrée un entier n et le réel p et qui renvoie un tableau contenant les n premiers termes de la suite $(b_k)_{k \geqslant 1}$.

Démonstration.

```
def calculPremTermes(n, p):
    q = 1-p
    T = np.ones(n)
    T[2] = 1-q**3
    for k in range(3, n):
        T[k] = p * T[k-1] + p * q * T[k-2] + p * q**2 * T[k-3]
    return T
```

□

b) En déduire un script **Python** permettant de tracer les 100 premiers termes de la suite lorsque $p = \frac{1}{2}$.

Démonstration.

```
n = 100
abscisse = [k for k in range(n)]
ordonnee = calculPremTermes(n, 1/2)
plt.plot(abscisse, ordonnee, '.')
plt.grid()
```

□

Exercice 2
On dispose d'une pièce truquée. La probabilité qu'elle tombe sur `Pile` est $p \in]0,1[$ et la probabilité qu'elle tombe sur `Face` est $q = 1 - p$. On considère une succession infinie de lancers de cette pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir deux `Pile` consécutifs sans avoir eu auparavant la séquence `Pile-Face` ?

Indication : commencer par lister tous les tirages possibles donnant les deux `Pile` avant la séquence `Pile-Face`. Formaliser ensuite le calcul en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à une variable aléatoire bien choisie.

Démonstration.
On commence par définir l'événement

A : « on obtient deux `Pile` consécutifs sans avoir eu auparavant la séquence `Pile-Face` »

Notons, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} P_k &: \text{« On obtient Pile au } k^{\text{e}} \text{ lancer »} \\ F_k &: \text{« On obtient Face au } k^{\text{e}} \text{ lancer »} \end{aligned}$$

Les tirages possibles sont

$$\begin{array}{l} (P, P, \dots) \\ (F, P, P, \dots) \\ (F, F, P, P, \dots) \\ (F, F, F, P, P, \dots) \\ \dots \end{array}$$

En effet, on remarque que

A est réalisé $\iff$ le premier `Pile` de la suite de lancers est suivi d'un `Pile`

On introduit alors X la variable aléatoire égale au rang du premier `Pile` obtenu. Il est clair que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Pour calculer $\mathbb{P}(A)$, on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap [X = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(F_1 \cap \dots F_{k-1} \cap P_k \cap P_{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(F_1) \dots \mathbb{P}(F_{k-1}) \mathbb{P}(P_k) \mathbb{P}(P_{k+1}) && \textit{(par indépendance)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{k-1} \\ &= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\ &= p^2 \frac{1}{1-q} && \textit{(car } 0 < q < 1\textit{)} \\ &= p && \textit{(car } q = 1 - p\textit{)} \end{aligned}$$

Commentaire

Ce résultat n'a rien de surprenant puisque A est réalisé ssi un certain lancer donne `Pile` (on ne connait pas le numéro du lancer à l'avance mais ça n'a pas d'importance puisque tous les lancers sont indépendants et se font dans les même conditions).
On aurait pu faire le calcul de manière plus théorique en utilisant une propriété des variables aléatoires discrètes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap [X=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(F_1 \cap \dots F_{k-1} \cap P_k \cap P_{k+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(F_1 \cap \dots F_{k-1} \cap P_k)\mathbb{P}(P_{k+1}) && \textit{(par indépendance)} \\
&= p \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \\
&= p && \textit{(car } \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) = 1 \textit{ puisque } X(\Omega) = \mathbb{N}^*\textit{)}
\end{aligned}$$

□

II. Théorème de transfert

Exercice 3
Soit $p \in]0,1[$. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}([Y = n]) = np^2(1-p)^{n-1}$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Y telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k : n \mapsto \mathbb{P}([X_n = k])$ définie sur $\mathbb{N}^*$.
On définit une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{E}(f_k(Y))$$

Montrer que $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, la v.a.r. Y est une v.a.r. discrète.
  Ainsi, on peut utiliser le théorème de transfert sous réserve d'existence de l'espérance $\mathbb{E}(f_k(Y))$.
  D'où

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big([Z = k]\big) \\
= \ & \mathbb{E}\big(f_k(Y)\big) \\
= \ & \sum_{y\in Y(\Omega)} f_k(y)\ \mathbb{P}\big([Y = y]\big) \\
= \ & \sum_{n=1}^{+\infty} f_k(n)\ \mathbb{P}\big([Y = n]\big) && \textit{(car } Y(\Omega) = \mathbb{N}^*\textit{)} \\
= \ & \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big)\ \mathbb{P}\big([Y = n]\big) && \textit{(par définition de } f_k\textit{)} \\
= \ & \sum_{\substack{n=1 \\ k\in X_n(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big)\ \mathbb{P}\big([Y = n]\big) + \cancel{\sum_{\substack{n=1 \\ k\notin X_n(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big)\ \mathbb{P}\big([Y = n]\big)} \\
= \ & \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big)\ \mathbb{P}\big([Y = n]\big)
\end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant (pour $k \in \mathbb{N}^*$) :

$$\left\{\begin{array}{l} k \in X_n(\Omega) = [\![1, n]\!] \\ n \in [\![1, +\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant k \\ k \leqslant n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ n \in [\![k, +\infty[\![\right.$$

- Finalement :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([Z=k]\big) & = & \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_n=k]\big)\ \mathbb{P}\big([Y=n]\big) & \\
& = & \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dfrac{1}{n}\ \mathbb{P}\big([Y=n]\big) & \textit{(car } X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dfrac{1}{\cancel{n}}\ \cancel{n}\, p^2\,(1-p)^{n-1} & \textit{(par définition de la loi de } Y\textit{)} \\
& = & \dfrac{p^2}{1-p} \sum\limits_{n=k}^{+\infty} (1-p)^n & \\
& = & \dfrac{p^{\cancel{2}}}{1-p}\ \dfrac{(1-p)^k}{\cancel{1-(1-p)}} & \textit{(d'après la formule donnant la somme d'une série géométrique de raison } (1-p) \in \,]0,1[\textit{)} \\
& = & \dfrac{p}{1-p}\ (1-p)^k & \\
& = & p\ (1-p)^{k-1} &
\end{array}$$

De plus, la reconnaissance d'une série géométrique convergente prouve l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(f_k(Y))$ et donc l'utilisation du théorème de transfert est licite.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Z=k]\big) \ = \ p\ (1-p)^{k-1}.\ \text{On en conclut : } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\,(p).}$$

□

III. Manipulation d'unions et d'intersections d'événements

Exercice 4

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que, si C et D sont deux événements, alors

$$\mathbb{P}(C \cup D) \leqslant \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D)$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{P}(C \cup D) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(C \cap D)$$

Or, $\mathbb{P}(C \cap D) \geqslant 0$, d'où

$$\boxed{\mathbb{P}(C \cup D) \leqslant \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D).}$$

□

2. Montrer que, pour toute suite (A_n) d'événements et pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

Démonstration. Soit (A_n) une suite d'événements.

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: « $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ »

<u>Initialisation</u> :

D'une part, $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{0} A_k = \varnothing$ (par convention) et donc $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{0} A_k\right) = 0$.
D'autre part, $\sum\limits_{k=1}^{0} \mathbb{P}(A_k) = 0$ (toujours par convention).
D'où $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}\right) && \textit{(cf question } \textbf{\textit{1}}\textit{)} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}\right) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k)
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)}$$

□

3. Montrer que, pour toute suite (A_n) d'événements et pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - (n-1)$$

Démonstration. Soit (A_n) une suite d'événements.
Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - (n-1)$ »
Initialisation :
D'une part, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{0} A_k = \Omega$ (par convention) et donc $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{0} A_k\right) = 1$.
D'autre part, $\sum\limits_{k=1}^{0} \mathbb{P}(A_k) - (0-1) = 1$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}\right) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&\geqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}\right) - 1 \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - (n-1) + \mathbb{P}\left(A_{n+1}\right) - 1 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) - ((n+1)-1)
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - (n-1)}$$

$\square$

IV. Quelques grands classiques hors programmes du TOP 3

Exercice 5
Soit N un entier supérieur ou égal à 1.
Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[\![1, N]\!]$.

1. Établir les deux relations suivantes :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}\big([Y > k]\big) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\big(Y^2\big) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\, \mathbb{P}\big([Y > k]\big)$$

Démonstration.

- La v.a.r. Y est une v.a.r. finie. Donc elle admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}([Y = k])$$

- Soit $k \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned} [Y > k-1] &= [Y \geqslant k] && \textit{(car Y est à valeurs entières)} \\ &= [Y = k] \cup [Y > k] \end{aligned}$$

De plus les événements $[Y = k]$ et $[Y > k]$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\mathbb{P}([Y > k-1]) = \mathbb{P}([Y = k]) + \mathbb{P}([Y > k])$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}([Y = k]) = \mathbb{P}([Y > k-1]) - \mathbb{P}([Y > k]).}$$

- On calcule alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(Y) \\ = \ & \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}([Y = k]) \\ = \ & \sum_{k=1}^{N} k\, \Big(\mathbb{P}([Y > k-1]) - \mathbb{P}([Y > k])\Big) \\ = \ & \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}([Y > k-1]) - \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}([Y > k]) \\ = \ & \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \mathbb{P}([Y > k]) - \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}([Y > k]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\ = \ & \sum_{k=0}^{N-1} k\, \mathbb{P}([Y > k]) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y > k]) - \sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}([Y > k]) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\ = \ & 0 \times \mathbb{P}([Y > 0]) + \cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k\, \mathbb{P}([Y > k])} + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y > k]) - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k\, \mathbb{P}([Y > k]} + N\, \mathbb{P}([Y > N])\right) \\ = \ & \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y > k]) + \cancel{N\, \mathbb{P}([Y > N])} && \textit{(car, comme $Y(\Omega) = [\![1, N]\!]$: $[Y > N] = \varnothing$)} \\ = \ & \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y > k]) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([Y > k])}$$

- La v.a.r. Y admet un moment d'ordre 2 car c'est une v.a.r. finie. De plus :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Y^2)\\
&= \sum_{k=1}^{N} k^2\,\mathbb{P}([Y=k])\\
&= \sum_{k=1}^{N} k^2\,\Big(\mathbb{P}([Y>k-1]) - \mathbb{P}([Y>k])\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{N} k^2\,\mathbb{P}([Y>k-1]) - \sum_{k=1}^{N} k^2\,\mathbb{P}([Y>k])\\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)^2\mathbb{P}([Y>k]) - \sum_{k=1}^{N} k^2\,\mathbb{P}([Y>k]) && \textit{(par décalage d'indice)}\\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (k^2+2k+1)\mathbb{P}([Y>k]) - \sum_{k=1}^{N} k^2\,\mathbb{P}([Y>k])\\
&= \sum_{k=0}^{N-1} k^2\,\mathbb{P}([Y>k]) + \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\mathbb{P}([Y>k]) - \sum_{k=1}^{N} k^2\,\mathbb{P}([Y>k]) && \textit{(par linéarité de la somme)}\\
&= 0^2\times\mathbb{P}([Y>0]) + \cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k^2\,\mathbb{P}([Y>k])} + \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\mathbb{P}([Y>k]) - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k^2\,\mathbb{P}([Y>k]} + N^2\,\mathbb{P}([Y>N])\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\mathbb{P}([Y>k]) + \cancel{N^2\,\mathbb{P}([Y>N])} && \textit{(car, comme } Y(\Omega)=[\![1,N]\!] \textit{ : } [Y>N]=\varnothing\textit{)}\\
&= \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\mathbb{P}([Y>k])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)\mathbb{P}([Y>k])}$$

□

2. Si $B\in\mathscr{A}$ est un événement de probabilité non nulle, on appelle espérance conditionnelle de Y sachant l'événement B, le réel défini par :

$$\mathbb{E}_B(Y) = \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}_B\big([Y=k]\big) \qquad \textit{(c'est la formule de l'espérance dans laquelle } \mathbb{P} \textit{ a été remplacé par } \mathbb{P}_B\textit{)}$$

Soit $m\in\mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ un système complet d'événements tel que : $\forall i\in[\![1,m]\!]$, $\mathbb{P}(A_i)\neq 0$. Démontrer la **formule de l'espérance totale** :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\times\mathbb{E}_{A_i}(Y)$$

Démonstration.

- Comme précisé en question précédente, la v.a.r. Y est finie et admet donc une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([Y=k])$$

- De plus, la famille $(A_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales, pour tout $k\in[\![1,N]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=k]) &= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i\cap[Y=k])\\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}_{A_i}([Y=k]) && \textit{(car : } \forall i\in[\![1,m]\!],\ \mathbb{P}(A_i)\neq 0\textit{)}
\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(Y) & = & \sum\limits_{k=1}^{N} \left(k \sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}_{A_i}([Y=k]) \right) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} k\, \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}_{A_i}([Y=k]) \right) \\
& = & \sum\limits_{\substack{1 \leqslant k \leqslant N \\ 1 \leqslant i \leqslant m}} \big(k\, \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}_{A_i}([Y=k]) \big) \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\sum\limits_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}_{A_i}([Y=k]) \right) \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\mathbb{P}(A_i) \sum\limits_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}_{A_i}([Y=k]) \right) \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{E}_{A_i}(Y)
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{E}_{A_i}(Y)}$$

□

3. Pour tout $C \in \mathscr{A}$, on appelle variable aléatoire indicatrice de l'événement C et on note $\mathbb{1}_C$ la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ par :

$$\mathbb{1}_C : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{si } \omega \notin C \end{cases}$$

a) Soit $C \in \mathscr{A}$. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_C$. En particulier, donner l'espérance de $\mathbb{1}_C$.

Démonstration.

- Par définition de $\mathbb{1}_C$, cette v.a.r. ne prend que les valeurs 0 et 1. Donc : $\mathbb{1}_C(\Omega) \subset \{0, 1\}$.
- Soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in [\mathbb{1}_C = 1] \ \Leftrightarrow\ \mathbb{1}_C(\omega) = 1 \ \Leftrightarrow\ \omega \in C$$

D'où : $[\mathbb{1}_C = 1] = C$. Ainsi : $\mathbb{P}\left([\mathbb{1}_C = 1]\right) = \mathbb{P}(C)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{1}_C \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}(C)\right). \text{ D'où : } \mathbb{E}(\mathbb{1}_C) = \mathbb{P}(C).}$$

□

b) Soit $(C, D) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A}$. Démontrer :

(i) $\mathbb{1}_{C \cap D} \ = \ \mathbb{1}_C \times \mathbb{1}_D$.

Démonstration.

Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :

- si $\omega \in C \cap D$, alors :
  - × d'une part : par définition de $\mathbb{1}_{C\cap D}$, on a : $\mathbb{1}_{C\cap D}(\omega) = 1$.
  - × d'autre part :

$$\begin{array}{rccc}
 & & \omega \in C \cap D & \\
\text{donc} & \omega \in C & \texttt{ET} & \omega \in D \\
\text{d'où} & \mathbb{1}_C(\omega) = 1 & \texttt{ET} & \mathbb{1}_D(\omega) = 1
\end{array}$$

On en déduit :
$$\mathbb{1}_C(\omega) \times \mathbb{1}_D(\omega) \;=\; 1 \;=\; \mathbb{1}_{C\cap D}(\omega)$$

- si $\omega \notin C \cap D$, alors :
  - × d'une part : par définition de $\mathbb{1}_{C\cap D}$, on a : $\mathbb{1}_{C\cap D}(\omega) = 0$.
  - × d'autre part :
$$\begin{array}{lccc} & & \omega \in \overline{C \cap D} & \\ \text{donc} & & \omega \in \overline{C} \cup \overline{D} & \\ \text{d'où} & \omega \in \overline{C} & \texttt{OU} & \omega \in \overline{D} \\ \text{ainsi} & \omega \notin C & \texttt{OU} & \omega \notin D \\ \text{alors} & \mathbb{1}_C(\omega) = 0 & \texttt{OU} & \mathbb{1}_D(\omega) = 0 \end{array}$$

  On en déduit :
$$\mathbb{1}_C(\omega) \times \mathbb{1}_D(\omega) \;=\; 0 \;=\; \mathbb{1}_{C\cap D}(\omega)$$

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_C(\omega) \times \mathbb{1}_D(\omega) = \mathbb{1}_{C\cap D}(\omega)$.

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{1}_C \times \mathbb{1}_D = \mathbb{1}_{C\cap D}.}$$

□

(ii) $\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_{\overline{C}} \;=\; 1$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

- si $\omega \in C$, alors :
  - × par définition de $\mathbb{1}_C$, on a : $\mathbb{1}_C(\omega) = 1$.
  - × comme $\omega \notin \overline{C}$, par définition de $\mathbb{1}_{\overline{C}}$, on a : $\mathbb{1}_{\overline{C}}(\omega) = 0$.

  On en déduit :
$$\mathbb{1}_C(\omega) + \mathbb{1}_{\overline{C}}(\omega) \;=\; 1 + 0 \;=\; 1$$

- si $\omega \notin C$, alors :
  - × par définition de $\mathbb{1}_C$, on a : $\mathbb{1}_C(\omega) = 0$.
  - × comme $\omega \in \overline{C}$, par définition de $\mathbb{1}_{\overline{C}}$, on a : $\mathbb{1}_{\overline{C}}(\omega) = 1$.

  On en déduit :
$$\mathbb{1}_C(\omega) + \mathbb{1}_{\overline{C}}(\omega) \;=\; 0 + 1 \;=\; 1$$

Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_C(\omega) + \mathbb{1}_{\overline{C}}(\omega) = 1$.

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_{\overline{C}} = 1.}$$

□