Feuille II. Rappels élémentaires et compléments sur les fonctions numériques

Exercices d'application du cours

Exercice II.1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

a. $f_1 : x \mapsto \sqrt{3x+2}$

b. $f_2 : x \mapsto \ln(x^2+2x-3)$

c. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x-2)}$

d. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{-x^2+3x-2}$

e. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2-6x)(x^2-2x+1)}$

f. $f_6 : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$

g. $f_7 : x \mapsto \sqrt{x^2-5x+6}$

h. $f_8 : x \mapsto \ln(x^2-2x+1)$

i. $f_9 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2x-1}{3x+1}\right)$.

j. $f_{10} : x \mapsto \ln(x+3)+\ln(2x+1)$

Exercice II.2

Montrer que les fonctions suivantes sont paires.

a. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

b. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

Exercice II.3

Montrer que les fonctions suivantes sont impaires.

a. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

b. $f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Exercice II.4

Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(6-3x)^2}$ puis encadrer $f(x)$ lorsque $x \in [0\,;1]$.

Exercice II.5

Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto e^{(1-x)^2}$ puis encadrer $f(x)$ lorsque $x \in [2\,;4]$.

Exercice II.6

1) Montrer que $f : x \mapsto 3x^2+2x+1$ admet un maximum et un minimum sur $[-1\,;1]$ que l'on déterminera.

2) En déduire que f est bornée sur $[-1\,;1]$.

3) Mêmes questions en remplaçant $[-1\,;1]$ par $[-2\,;2]$.

Exercice II.7

1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x}{2+x}$ admet un maximum et un minimum sur $[0\,;2]$ que l'on déterminera.

2) En déduire que f est bornée sur $[0\,;2]$.

Exercice II.8

Écrire sans les valeurs absolues les nombres suivants $\left|\sqrt{2}-1\right|$ et $|\pi-5|$.

Exercice II.9

Donner la valeur des quantités suivantes en fonction de x.

a. $|x-1|$
b. $|x+2|$
c. $|x-1|+|x+2|$

Exercice II.10

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$.

Exercice II.11

Résoudre les (in)équations suivantes.

a. $|x+7|=1$
b. $|2x-3|=|x+1|$
c. $|x+2|=-6$
d. $|x+2|=6$
e. $|x-1|=|x+1|$
f. $|2x+3|-|2-x|=1$
g. $|2x-3|+|x+1|=2$
h. $|x|>3$
i. $|x+1|<4$
j. $|-2x+1|<4$
k. $|x+2|>3$
l. $|x+2|>-2$
m. $|-3x+1|<1$
n. $|6x-1|>3$
o. $|2x-1| \leqslant |x-1|$
p. $|x+1|-|x-1|>3$
q. $\sqrt{(x-1)^2}=x-5$

Exercice II.12

1) Simplifier $A = 3\ln 3 - \ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$.

2) Simplifier $B = \dfrac{\ln 16 + \ln 8}{10\ln 2 + \ln 4}$ sous la forme d'un nombre rationnel.

3) Développer au maximum $C = \ln(\sqrt{96})$.

4) Simplifier $\ln\left(\dfrac{e^5 \times 12}{e^{-6} \times e^2}\right)$ sous la forme $m + n\ln 2 + p\ln 3$ avec $m, n, p \in \mathbb{Z}$.

Exercice II.13

Résoudre les (in)équations suivantes :

a. $\ln(x+2)=1$
b. $\ln(2x+1) > \ln(x^2+2)$
c. $3\ln x + \ln(x^2) < 5\ln 2$
d. $\ln(x^2+2) = \ln(x+3)$
e. $\ln(\ln x) < 0$
f. $\ln(x^2-1) - \ln x < 0$
g. $\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right) = 2$
h. $\ln(2x) + \ln(x+1) > 2$

Exercice II.14

Simplifier $A = \dfrac{2e^4 \times e^{-2} + e^2}{e^4 \times e^6}$.

Exercice II.15

Résoudre les (in)équations suivantes :

a. $e^{2x+1} = 4$
b. $e^x e^{8x+1} = 1$
c. $e^{2x+1} - 3 > 0$

Exercice II.16

Mettre sous forme exponentielle les quantités 2^x et x^3.

Exercice II.17

Résoudre l'équation $x^{\frac{2}{3}} = 2$.

Exercice II.18

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0{,}99^n < 0{,}5$.

Exercice II.19

A-t-on, pour tout $x \in \mathbb{R}, 2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$?

Exercice II.20

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}, \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercice II.21

Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition et la fonction dérivée.

a. $f_1 : x \mapsto x^3 + x + 3$
b. $f_2 : x \mapsto 3(x^2 + 4)$
c. $f_3 : x \mapsto (-2x + 3)(5x - 3)$
d. $f_4 : x \mapsto (2x - 7)^2$
e. $f_5 : x \mapsto \dfrac{3x - 4}{x^2 + 3}$
f. $f_6 : x \mapsto e^{2x+1}$
g. $f_7 : x \mapsto \ln(-2x + 5)$
h. $f_8 : x \mapsto 2x\sqrt{x}$
i. $f_9 : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$
j. $f_{10} : x \mapsto x^x$
k. $f_{11} : x \mapsto \dfrac{x + 1}{3}$
l. $f_{12} : x \mapsto \dfrac{1}{x} + \ln(x^2 + 1)$
m. $f_{13} : x \mapsto e^{-x^2}$
n. $f_{14} : x \mapsto x \ln x$
o. $f_{15} : x \mapsto \sqrt{x + 6}$
p. $f_{16} : x \mapsto \ln(x^2 + \sqrt{x} + 1)$
q. $f_{17} : x \mapsto e^{\frac{2x+1}{x+2}}$
r. $f_{18} : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$
s. $f_{19} : x \mapsto \dfrac{1}{(x + 2)^3}$
t. $f_{20} : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x + 3}}$

Exercice II.22

Dans l'exercice précédent, calculer pour chaque fonction l'équation de la tangente à sa courbe représentative en $a = 1$.

Exercice II.23

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$.

Exercice II.24

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leqslant x - 1$.

Exercices d'approfondissement

Exercice II.25 - ⁂⁂

Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes.

a. $f : x\dfrac{\ln(e^{-x} - e^2)}{\ln(2x + 1)}$
b. $g : x\sqrt{\dfrac{16 - x^2}{e^{x^2+3} - 1}}$
c. $h : x\sqrt{\dfrac{3x + 2}{-2x + 5}}$

Exercice II.26 - ⁂

Quelle est la parité des fonctions suivantes :

a. $f_1 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2$
b. $f_2 : x \mapsto \left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)^2 \times \dfrac{x^3}{\sqrt{3x^2 + 5}}$
c. $f_3 : x \mapsto x(2x + 3)^2 \ln(x^2 + 1)$
d. $f_4 : x \mapsto \dfrac{\ln(x^2)}{e^{x^2} + x^4 + 2x^2}$

Exercice II.27 - ⁂⁂⁂

Démontrer les affirmations suivantes :

a. La somme de deux fonctions (im)paires est (im)paire.

b. La multiplication d'une fonction (im)paire par un nombre réel reste (im)paire.

c. Le produit ou le quotient de deux fonctions paires est pair.

d. Le produit ou le quotient de deux fonctions impaire est pair.

e. Le produit ou le quotient d'une fonction paire par une fonction impaire (ou d'une fonction impaire par une fonction paire) est impair.

f. La composée de deux fonctions impaires est impaire.

g. La composée $g \circ f$ d'une fonction paire g avec une fonction impaire f est paire.

h. La composée $g \circ f$ d'une fonction quelconque g avec une fonction paire f est paire.

Exercice II.28 - ⁂⁂⁂⁂

Démontrer les propriétés sur la somme, le produit avec un réel, le produit et la composée de fonctions monotones et strictement monotones.

Exercice II.29 - ⁂

Écrire les nombres suivants sans valeur absolue :

- **a.** $A = |-6|$
- **b.** $B = \left|2^{-3}\right|$
- **c.** $C = \left|1 - \dfrac{7}{15}\right|$
- **d.** $D = |-3| - |-3+1|$
- **e.** $E = \left|1 - \dfrac{1}{2}\right| + \left|1 + \dfrac{1}{2}\right|$
- **f.** $F = \left|e^{-6}\right|$
- **g.** $G = |4\ln 6 - 2\ln 4|$

Exercice II.30 - ⁂

Écrire les quantités suivantes en fonction de x, sans valeur absolue :

- **a.** $A(x) = |x+5| + |2x-6|$
- **b.** $B(x) = 2\,|2x+3| - |4-x|$

Exercice II.31 - ⁂

Simplifier $\sqrt{4x^2 - 8x + 4}$ à l'aide de la valeur absolue.

Exercice II.32 - ⁂⁂

Résoudre les (in)équations suivantes.

- **a.** $|x-e| = -2$
- **b.** $|x+5| = 6$
- **c.** $|x+1| - 1 = |x-1|$
- **d.** $|5x+3| = 1 - 2x$
- **e.** $|x+1| \leqslant 3$
- **f.** $|x-1| > 3$
- **g.** $|x+1| + |x-1| > 2$
- **h.** $|x-1| \leqslant |x-3| + 2x$

Exercice II.33 - ⁂

Exprimer uniquement à l'aide de $\ln 2$ les quantités suivantes :

- **a.** $A = \ln 8$
- **b.** $B = \ln(\sqrt{2})$
- **c.** $C = \ln 6 - \ln 3$
- **d.** $D = \ln(2e^2)$

Exercice II.34 - ⁂⁂

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

- **a.** $A = \dfrac{e^{x^2}}{e^{2x}}$
- **b.** $B = e^{x^2} - (e^x)^2$
- **c.** $C = \dfrac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}$
- **d.** $D = \dfrac{\ln(2x)}{\ln x}$
- **e.** $E = e^{2\ln x}$
- **f.** $F = \ln(2x) - \ln x$
- **g.** $G = \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
- **h.** $H = \ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
- **i.** $I = \ln(e^4) - \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e})$
- **j.** $J = \ln(e^2\sqrt{e}) + \ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$
- **k.** $K = \dfrac{\ln(e^5)}{\ln(e^3)}$
- **l.** $L = \sqrt{e^{2x}}e^{-x}$
- **m.** $M = \dfrac{e^{x^2-2x}(e^x)^2}{(e^{2x})^3}$
- **n.** $N = \dfrac{\sqrt{e^{5x+3}}}{e^{3x}e^{-3x+1}}$
- **o.** $O = \ln\left(\dfrac{e^2 \times 24}{e^3} \times e^2\right)$

Exercice II.35 - ⁂⁂

Résoudre les (in)équations suivantes :

- **a.** $\ln(1+e^x) - 2 = 0$
- **b.** $\ln(x-1) - \ln(x+1) = 0$
- **c.** $\ln(2x) \leqslant 1$

d. $\ln(2-x^2) < 0$
e. $e^{3x-1} - 1 \leqslant 0$
f. $\dfrac{1}{e^x+1} < 1$
g. $(\ln x)^2 + 3\ln x + 1 = 0$
h. $\dfrac{1}{e^x+1} < 1$
i. $(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0$
j. $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$
k. $\ln(x+3) = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$

Exercice II.36 - ⁂⁂

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (\lfloor x \rfloor - x)^2$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x) + 1$. Qu'en déduit-on pour la courbe représentative de f ?

3) Représenter $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;1]$ puis, à l'aide de la question précédente, sur $[-3\,;3]$. La fonction f semble-t-elle continue ?

Exercice II.37 - ⁂⁂⁂

Soit d la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $d(x) = x - \lfloor x \rfloor$. On l'appelle la fonction partie fractionnaire.

1) Calculer $d(3{,}786453), d(7), d(-2{,}3456)$.

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d(x+1) = d(x)$. Que peut-on dire de d ?

3) À quelle fonction d est-elle égale sur $[0\,;1[$.

4) En déduire l'image de d.

5) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$d(x) = 0 \iff x \in \mathbb{Z}.$$

Exercice II.38 - ⁂⁂

Donner l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes.

a. $f_1 \colon x \mapsto -5x^2 + 8x - 4$
b. $f_2 \colon x \mapsto \dfrac{3x+9}{-7x+1}$
c. $f_3 \colon x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x-12}$
d. $f_4 \colon x \mapsto \dfrac{2x+1}{e^{-7x+1}}$
e. $f_5 \colon x \mapsto \dfrac{3}{\ln(x+5)}$
f. $f_6 \colon x \mapsto \dfrac{5x^2-x+8}{x^2+x+1}$
g. $f_7 \colon x \mapsto -3\ln(x^3-3x+5)$
h. $f_8 \colon x \mapsto 2e^{-7x+1}$
i. $f_9 \colon x \mapsto x^{\ln x}$
j. $f_{10} \colon x \mapsto x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$
k. $f_{11} \colon x \mapsto \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x$

Exercice II.39 - ⁂⁂⁂

Donner l'ensemble de définition, la dérivée et les variations des fonctions suivantes.

a. $f_1 \colon x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$
b. $f_2 \colon x \mapsto x - \dfrac{1}{x}$
c. $f_3 \colon x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$
d. $f_4 \colon x \mapsto x^2 e^x$
e. $f_5 \colon x \mapsto x\sqrt{x}$
f. $f_6 \colon x \mapsto e^{x^2+2x+1}$
g. $f_7 \colon x \mapsto \ln(x^2+1)$
h. $f_8 \colon x \mapsto \ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$
i. $f_9 \colon x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x^2+5}}$

Exercice II.40 - ⁂⁂

Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x}$ puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x} \leqslant 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice II.41 - ⁂⁂

1) Soit u, v, w trois fonctions dérivables sur un intervalle I. Montrer que uvw est dérivable sur I et que :

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

2) Calculer la dérivée de la fonction f : $x \mapsto x^2 e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1-x}$ définie sur $]0\,;1[$.

Exercice II.42 - ⁂

1) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{\dfrac{1}{x+3}} \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$.

2) Montrer que, pour tout $[)x \in \mathbb{R}, e^{2x+1} \leqslant e^{(x+1)^2}$.

3) Encadrer les fonctions suivantes :

a. $x \mapsto x^2$ sur $[-1\,;1]$.

b. $x \mapsto e^{(1-x)^2}$ sur $[2\,;4]$.

c. $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(1-x^2)}$ sur $]0\,;1[$.

Exercice II.43 - ⁂⁂

1) **a.** Montrer que $x \in \mathbb{R}_+, e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

b. En utilisant la même méthode, en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3$.

c. Conjecturer une généralisation de la question précédente.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$.

3) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier les variations de la fonction définie sur R_+^* par $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x}$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x} \geqslant 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

4) Montrer que, pour tout $x \in]0\,;1[, x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice II.44 - ⁂

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

1) Donner l'ensemble de définition de f.

2) Étudier les variations de f.

3) Tracer la courbe représentative de f en s'appuyant sur les questions précédentes.

Exercice II.45 - ⁂⁂

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$.

2) Démontrer que f est paire.

3) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$.

4) Donner le tableau de variations de f.

5) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, -\dfrac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.

6) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4} \leqslant f(x)$.

Exercice II.46 - ⁂⁂

On définit les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Soit également f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$.

1) Étude des fonctions cosinus et sinus hyperboliques

a. Quels sont les ensembles de définition de ch et sh ?

b. Étudier la parité de ch et sh.

c. Étudier les variations de sh. En déduire son signe.

d. Étudier les variations de ch.

e. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}\, x > \mathrm{sh}\, x$.

f. Tracer les courbes représentatives des deux fonctions.

2) Étude de la fonction f

a. Donner l'ensemble de définition de f ?

b. Étudier la parité de f.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $g(x) = \mathrm{sh}\, x - x \,\mathrm{ch}\, x$. Étudier les variations de g et en déduire son signe.

d. En déduire les variations de f.

e. Tracer la courbe représentative de f.

3) Quelques formules

a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

b. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \mathrm{ch}(a+b)$.