Chapitre 1

# Couples de variables aléatoires discrètes.

Dans tout ce chapitre, les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

## I. Loi d'un couple

**Définition 1.1**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.
La *loi* du couple $(X, Y)$ est la donnée des réels $\mathrm{P}([X = i] \cap [Y = j])$ pour tout couple $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

### Remarque :

Cette **loi jointe du couple** $(X, Y)$ est l'application :

$$\mathrm{P} : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ (i,j) & \mapsto & P([X = i] \cap [Y = j]) \end{array} \right.$$

On dit aussi *loi conjointe du couple*, ou tout simplement loi de $(X, Y)$.

### Exemple :

On lance deux pièces non truquées et de couleurs distinctes. On note $X_1$ la variable qui vaut 1 si la première pièce tombe sur Pile, et $X_2$ qui vaut 1 lorsque la deuxième tombe sur Pile. On peut étudier le couple de variables aléatoires $(X_1, X_2)$. On a alors $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0, 1\}$. La loi du couple est la donnée des quatre réels suivants :

$$\mathrm{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{1}{4} \qquad \mathrm{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{4}$$
$$\mathrm{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = \frac{1}{4} \qquad \mathrm{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{4}$$

qui peuvent s'écrire sous forme de tableau

| $X/Y$ | | | loi de $X$ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| loi de $Y$ | | | |

(exemple1)

### Exemple :

On lance deux dés de couleurs différentes, et on note $D_1$ le résultat du premier dé, $D_2$ celui du deuxième. On peut étudier le couple de variables aléatoires $(D_1, D_2)$. On a alors $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et la loi de probabilité du couple est donnée par

$$\forall i \in [\![1, 6]\!] \quad \forall j \in [\![1, 6]\!] \qquad \mathrm{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \frac{1}{36}$$

**Exemple :**

Dans une urne se trouve trois billes, numérotées de 1 à 3. On effectue trois tirages successifs et on note la valeur de la bille. On note $m$ la variable donnant le minimum des trois valeurs, et $M$ la maximum. On étudie la loi du couple $(m, M)$. On a $m(\Omega) = M(\Omega) = \{1,\ 2,\ 3\}$ et nous devons calculer, une à une (pour le moment) toutes les probabilitées suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}([m=1]\cap[M=1]) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3\\
\mathrm{P}([m=2]\cap[M=2]) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3\\
\mathrm{P}([m=3]\cap[M=3]) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3\\
\mathrm{P}([m=1]\cap[M=2]) &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^3\\
\mathrm{P}([m=2]\cap[M=1]) &= 0\\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Combien y-a-t'il de calculs à faire ? Justifier les réponses.

**Notation :** À la place de $\mathrm{P}([X=i]\cap[Y=j])$ on peut noter $\mathrm{P}(X=i, Y=j)$ ou $\mathrm{P}([X=i],[Y=j])$.

**Méthode :**

Pour obtenir la loi du couple $(X, Y)$ :

- on commence par déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
- on donne, pour tout $(i, j) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, $\mathrm{P}(X=i, Y=j)$

**Remarque :**

Dans le cas où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis et de cardinaux petits on pourra résumer la loi jointe dans un tableau à double entrée.

**Attention:**

En toute généralité

$$\mathrm{P}(X=i, Y=j) \neq \mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=j)$$

On peut parfois utiliser la formule des probabilités composées

$$\mathrm{P}(X=i, Y=j) =$$

**Type Concours**

On lance une pièce qui, à chaque lancer, donne *Pile* avec probabilté $p$, $p \in ]0,1[$. On note $X$ le rang d'apparition du premier *Pile*, $Y$, le rang d'apparition du premier *Face*, et $Z$ le rang d'apparition du second *Pile*.

1. Déterminer la loi conjointe de $(X, Z)$.
2. Déterminer la loi conjointe de $(X, Y)$.

**Proposition 1.2**

- La famille $([X=i]\cap[Y=j])_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.
- La série double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])$ est convergente et sa somme est égale à 1 .

### Remarque :

On a la relation :

$$\sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{j\in Y(\Omega)} \mathrm{P}(X=i,Y=j)=\sum_{j\in Y(\Omega)}\sum_{i\in X(\Omega)} \mathrm{P}(X=i,Y=j)$$

**Exercice 1**

Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ telles que $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1;n+1]\!]$. On suppose qu'il existe un réel $a$ tel que :

$$\forall(i,j)\in[\![1;n+1]\!]^2,\quad \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])=a\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

Déterminer la valeur de $a$

## II. Lois marginales

**Définition 2.1**

- La première loi marginale du couple $(X,Y)$ est la loi de la variable $X$.
- La seconde loi marginale du couple $(X,Y)$ est la loi de la variable $Y$.

### Méthode :

Soit $(X,Y)$ un couple de variable aléatoires discrètes dont on connait la loi conjointe.

- On obtient la loi de $X$ grâce à la formule des probabilités totales, avec le S.C.E

$$\forall\square\in X(\Omega),\ P(X=\square)=$$

- On obtient la loi de $X$ grâce à la formule des probabilités totales, avec le S.C.E

$$\forall\nabla\in Y(\Omega),\ P(Y=\nabla)=$$

**Exercice 2**

Après avoir vérifier que le tableau suivant décrit bien une loi conjointe, trouver les lois marginales de $X$ et $Y$.

| $X/Y$ | 1 | 2 | 3 | loi de $X$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | |
| 2 | 1/12 | 0 | 1/18 | |
| 3 | 1/12 | 1/6 | 2/18 | |
| loi de $Y$ | | | | 1 |

**Attention:**

Dans le cas ou les variables aléatoires ne sont pas finies, les sommes sont des séries à termes positifs qui convergent.

**Exercice 3**

Déterminer les lois marginales des variables $X$ et $Y$ définies dans l'exercice 1.

**Type Concours**

Donner les lois marginales des variables aléatoires $X$ et $Z$ de l'exercice type concours précédent.

# III. Lois conditionnelles

**Définition 3.1 — Lois conditionnelles**

- Soit $j \in Y(\Omega)$ telle que $\mathrm{P}(Y = j) \neq 0$.
  On définit *la loi conditionnelle de $X$ sachant* $[Y = j]$ comme l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ i & \mapsto & \mathrm{P}_{(Y=j)}(X = i) \end{array} \right.$$

- Soit $i \in X(\Omega)$ telle que $\mathrm{P}(X = i) \neq 0$.
  On définit *la loi conditionnelle de $Y$ sachant* $[X = i]$ comme l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ j & \mapsto & \mathrm{P}_{(X=i)}(Y = j) \end{array} \right.$$

**Méthode :**

Pour déterminer la loi conditionnelle de $X$ sachant $[Y = j]$ :

1. On détermine $X(\Omega)$.
2. On détermine, pour tout $i \in X(\Omega)$, $\mathrm{P}_{(Y=j)}(X = i)$.

**Méthode :**

Pour obtenir une loi conditionnelle, on peut :

- Si on connait la loi du couple, on utilise la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\forall i \in X(\Omega),\ P_{Y=j}(X = i) =$$

- Si on ne connait pas la loi du couple, on peut souvent reconnaitre la loi conditionnelle dans l'énoncé.

**Exercice 4**

On s'intéresse à une chaîne de production d'une pièce automobile mise en place par un construction. On estime que 10% des pièces produites sont défectueuses. On suppose que le nombre de pièces produites en une heure est une variable aléatoire $X$ qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10$. On note $Y$ la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses produites en une heure.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X = n]$.
2. En déduire la loi de $Y$.

**Exercice 5**

On dispose de $n$ urnes numérotées de 1 à $n$. Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne $k$ contient des boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à $k$.
On choisit une urne au hasard et on pioche une boule dans cette urne. On note $X$ le numéro de l'urne choisie et $Y$ le numéro de la boule piochée.

1. Reconnaître le loi de $X$. Rappeler la valeur de $E(X)$.
2. Pour tout $k \in X(\Omega)$, déterminer la loi conditionelle de $Y$ sachant $[X = k]$.
3. En déduire la loi marginale de $Y$. On exprimera le résultat sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.
4. Calculer $E(Y)$.
5. Ecrire une fonction Python d'en tête `def simul_XY(n)` qui renvoie une simulation du couple $(X, Y)$ .

**Exercice 6**

On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in ]0; 1[$. On note $X$ le rang d'apparition du premier pile et, si ce premier pile arrive au rang $n$, on note $Y$ le nombre de faces obtenus lors de $n$ lancers supplémentaires.

1. Déterminer la loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X = n]$.
2. Préciser $Y(\Omega)$ puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(Y = k) = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \binom{n}{k} (pq)^n$$

## Remarque :

**De la loi conditionnelle à la loi marginale :**

Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et telles que pour tout $j \in Y(\Omega)$ on a $\mathrm{P}(Y = j) \neq 0$. Comme la famille est un S.C.E, d'après la formule des probabilités totales

$$\forall i \in X(\Omega), \qquad P(X = i) =$$

De même, si pour tout $i \in X(\Omega)$ on a $\mathrm{P}(X = i) \neq 0$, la formule des probabilités totales donne

$$\forall j \in Y(\Omega), \qquad P(Y = j) =$$

# IV. Indépendance de variables aléatoires

**Définition 4.1**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes. On dit que $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si

## Méthode :

**Montrer que des variables sont mutuellement indépendantes.**

1. Si l'énoncé précise que les deux variables aléatoires sont indépendantes, ou si c'est sous-entendu ("deux dés lancés", " tirages avec remise...."). Alors il faut utiliser la relation de la définition pour faire des calculs .
2. L'énoncé introduit deux variables aléatoires discrètes, et demande (éventuellement après plusieurs calculs) si ces deux variables aléatoires sont indépendantes ou non. Il faut alors vérifier si les égalités

$$\mathrm{P}([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i)P(Y = j)$$

sont vérifiées pour tout couple $(i, j)$ dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Pour montrer que deux variables **ne sont pas indépendantes**, il suffit de trouver un contre-exemple à la relation précédente. *On cherche alors souvent des évènements* $[X = i]$ *et* $[Y = j]$ *de probabilités non nulles tels que* $[X = i] \cap [Y = j]$ *soit impossible.*

## Exemple :

On lance deux dés non truqués. On note $X$ le minimum des deux résultats et $Y$ le maximum des deux résultats. Montrer que $X$ et $Y$ ne sont pas indépendants.
On note $X_i$ la variable donnant le résultat du $i$ème dé.
Par exemple $[Y = 1] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ donc $\mathrm{P}(Y = 1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$. De même $[X = 6] = [X_1 = 6] \cap [X_2 = 6]$ donc $\mathrm{P}(X = 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$.
Mais $[X = 6] \cap [Y = 1] = \emptyset$ donc $\mathrm{P}([X = 6] \cap [Y = 1]) \neq \mathrm{P}([X = 6])\,\mathrm{P}([Y = 1])$.

**Définition 4.2**

- Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes.
  On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes lorsque :
  $$\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_k = x_k]\right)$$
- Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes.
  On dit que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

**Type Concours**

On considère une suite $(X_n)$ de variables mutuellement indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On note $Z_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathrm{P}(X_j > k) = (1 - p)^k$.
2. Justifier que $\mathrm{P}(Z_n > k) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} [X_j > k]\right)$.
3. En déduire la loi de $Z_n$.

**Lemme 4.3 — Lemme des coalitions**

1. Si les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors toute variable aléatoire fonction de $X$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de $Y$.
2. Soient $n \in [\![3; +\infty[\![$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes.

Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors pour tout $p \in [\![2; n-1]\!]$, toute variable aléatoire fonction des $X_1, \ldots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $X_{p+1}, \ldots, X_n$

## Exemple :

- Si $X_1, X_2, X_3$ sont mutuellement indépendantes, alors $X_1$ est indépendantes de $X_2 + X_3$, $X_2^2$ est indépendantes de $\min(X_1, X_3)$.
- Si $X^2$ et $Y^2$ ne sont pas indépendantes, alors $X$ et $Y$ ne le sont pas non plus.

# V. Exemples classiques.

### V. 1 Rang d'apparition du second succès

On lance un dé indéfiniment. On note $X$ le rang d'apparition du premier 6 et $Y$ le rang d'apparition du second 6.
On note $r = \dfrac{1}{6}$ et $q = 1 - r$. $S_k$ est l'événement « on obtient 6 au tirage $k$ » et $E_k = \overline{S_k}$
On sait que $X$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(r)$.
On voit aussi que $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

1. Déterminer la loi du couple $(X, Y)$.
2. Déterminer la loi marginale de $Y$.
3. Déterminer la loi conditionnelle de $Y$ sachant $[X = i]$.

### V. 2 Une urne variable

On choisit un entier naturel selon la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Si cet entier est $k$ on remplit l'urne avec $k$ boules rouges et une boule noire. On mélange les boules l'urne et on tire une bille. On gagne si la bille est noire.
On note $X$ la variable aléatoire liée au nombre entier choisi avec la loi de Poisson, et $Y$ la variable aléatoire lié au succès :y $Y = 1$ si la bille tirée est noire $Y = 0$ sinon.

1. Calculer la probabilité de gagner.
2. Calculer la loi (conjointe) du couple $(X, Y)$.

# VI. Calculs d'espérances

### VI. 1 Théorème de transfert

Le théorème de transfert est aussi valide pour les couples de variables aléatoires discrètes.Il permet de calculer l'espérance d'une variable aléatoire de la forme $Z = g(X, Y)$ sans connaître la loi de $Z$, mais uniquement à partir de la loi du couple $(X, Y)$.

**Théorème 6.1**

Soit $(X,\ Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes et $g\ : (x, y) \mapsto g(x, y)$ une fonction définie sur l'ensemble $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors
$$E(g(X, Y)) = \sum_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$
sous réserve que cette dernière série converge absolument.

**Remarque :**

- Si $X$ et $Y$ sont à supports finis, il n'y a pas de problème de convergence, puisqu'il s'agit dune somme (double) finie.
- Si au moins l'une des deux est à support infini, l'existence de l'espérance est conditionnée à la convergence absolue. Dans les sujets de concours, soit les questions vous guident vers la justification de l'existence d'une telle somme, soit la convergence absolue est admise.

**Exercice 7**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$ avec $n \geqslant 3$.

1. Calculer $E(|X - Y|)$.
2. Donner une situation réelle (par exemple un jeu) pour lequel $|X - Y|$ à un sens concret.

**Exercice 8**

Soient deux variables aléatoires discrètes $X$ et $Y$ telles que :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}; \quad \forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X=j] \cap [Y=k])) = \frac{j+k}{2^{j+k} j! k!}$$

1. Pourquoi peut-on dire que les deux lois marginales sont les mêmes ?
2. Justifier que la variable aléatoire $2^{X+Y}$ admet une espérance et la déterminer.

### VI. 2 Espérance d'une somme

**Proposition 6.2**

Soit $(X_1, X_1, ..., X_n)$ des variables aléatoires discrètes admettant une espérance, et $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$E(\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n) =$$

**Exercice 9**

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ des variables aléatoires discrètes de même loi admettant une espérance $\mu$. Déterminer l'espérance de $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

### VI. 3 Espérance d'un produit

**Remarque :**

Soit $(X,Y)$ un couple de variable aléatoires discrètes. Alors le théorème de transfert donne, sous réserve de convergence absolue,

$$E(XY) =$$

**Proposition 6.3**

1. Si $X$ et $Y$ sont indépendantes et admettent une espérance, alors la variable aléatoire $XY$ admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
2. Si $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\prod_{k=1}^{n} X_k$ admet une espérance et $\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$.

**Remarque :**

Le théorème précédent peut servir notamment à montrer que deux variables ne sont pas indépendantes. Il suffit de vérifier que $E(XY) \neq E(X)E(Y)$.

**Attention:**

La réciproque est fausse !

*Démonstration.* □