Les basiques

Exercice 1

Le couple de variable aléatoires (X, Y) a pour loi conjointe

X/Y	1	2	3	
1	1/5	1/5	α	
2	1/10	1/10	1/20	
3	1/5	0	1/10	

1. Trouver la valeur de α pour que l'on ait bien une loi de probabilité.
2. Calculer les lois marginale de X et Y.
3. Calculer la loi de X sachant $[Y = 1]$
4. Les variables aléatoires sont elles indépendantes ?

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

$$P(X = -1) = \frac{1}{6} \qquad P(X = 0) = \frac{1}{2} \qquad P(X = 1) = \frac{1}{12} \qquad P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

On note $Y = X^2$.

1. Calculer la loi du couple (X, Y)
2. X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 3

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne k contient k billes numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard dans cette urne.
On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la bille tirée.

1. L'énoncé nous donne de façon implicite deux probabilités, dont une conditionnelle. Lesquelles ?
2. Calculer la loi du couple (X, Y)
3. En déduire la loi de Y.
4. Calculer $P(X = Y)$
5. X et Y sont elles des variables aléatoires indépendantes ?

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires dont on suppose que la loi du couple est donnée par le tableau

Y	1	2	3
1	2β	3β	3β
2	3β	2β	3β
3	3β	3β	2β

1. Déterminer la valeur du réel β pour que ce tableau représente effectivement la loi d'un couple.
2. Expliciter les lois marginales de X et Y. En déduire la valeur de $E(X)$ et $E(Y)$.
3. Calculer $E(XY)$.
4. (*) Vérifier que $\mathrm{Cov}(X, Y) = -\dfrac{1}{12}$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Les classiques

Exercice 5

Les clients d'un supermarché ont chacun une probabilité $p \in]0, 1[$ de payer avec une carte bancaire.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients en une journée et Y le nombre de personnes qui payent par carte bancaire en une journée. On admet que X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisée $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Rappeler les propriétés de la loi de Poisson.
2. Interpréter l'énoncé pour obtenir $P_{(X=k)}(Y = i)$
3. En déduire la loi marginale de Y.
4. Y admet-elle une espérance ? Si oui la calculer.

Exercice 6

On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent une même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Z = X + Y$.

1. Compléter et démontrer la formule suivante pour $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$

$$[Z = n] = \bigcup_{k=\ldots}^{\ldots} [X = k] \cap [Y = \ldots]$$

2. En déduire la loi de Z

Exercice 7

On suppose que X et Y sont indépendantes et que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ où λ et μ sont deux réels strictement positifs.
On pose $Z = X + Y$

1. Compléter et démontrer la formule suivante pour $n \in \mathbb{N}$

$$[Z = n] = \bigcup_{k=\dots}^{\dots} [X = k] \cap [Y = \dots]$$

2. En déduire que

$$\mathrm{P}(Z = n) = \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \mu^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Simplifier ce résultat en utilisant la formule du binôme de Newton.

3. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 8

Soit n un entier non nul fixé. On choisit au hasard et indépendamment deux nombres dans $[|1, n|]$.
On note X et Y les variables aléatoires désignant ces nombres et on suppose qu'il existe un espace probabilisé $\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ représentant cette expérience.
On note $M = \max(X, Y)$

1. Quelles sont les lois de X et Y.
2. Calculer la probabilité $P(X \leqslant k)$ pour $k \in [|0, n|]$.
3. Quel est le support de M ?
4. Pour $k \in [|1, n|]$, compléter et démontrer la formule suivante.

$$[M \leqslant k] = [X \leqslant \dots] \cap [Y \leqslant \dots]$$

5. En déduire la fonction de répartition de M.
6. Quelle est la loi de M ?

Exercices avec des $\sum\sum$

Exercice 9

On peut écrire $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right)$. Réecrire les sommes suivantes

1. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} a_{i,j}$
2. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j}$
3. $\displaystyle\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^*} a_{i,j}$
4. $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j} a_{i,j}$

Exercice 10

Soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ des réels. Simplifier les quantités suivantes

1. $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_i b_j$
2. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_j$
3. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_i$
4. $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i < n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} i b_j$

Exercice 11

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathrm{P}([X = j] \cap [Y = k]) = a \cdot \frac{j + k}{2^{j+k}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales X et Y.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$.

Exercice 12

Soient $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont on donne la loi jointe

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+j} j!}$$

1. Déterminer la valeur de a
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y)
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 13

Soient $a \in \mathbb{R}$ et (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont on donne la loi jointe

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{a(i+j)}{2^{i+j} i! j!}$$

1. Déterminer la valeur de a
2. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y).
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 14

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathrm{P}([X=j] \cap [Y=k]) = \frac{a}{j!k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que $\displaystyle\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{P}([X=j] \cap [Y=k]) = 1$
2. Reconnaître les lois marginales de X et Y.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 15

On continue ici l'exercice

1. Montrer que $E(Y) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$
2. En déduire que $E(Y) = \dfrac{n+3}{4}$
3. Avec une technique analogue calculer $E(Y^2)$ et en déduire la variance de Y.

Exercice 16

Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{i,j} = \dfrac{1}{(i+j)!}$.

1. (a) Établir : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, u_{i,j} \leqslant \dfrac{1}{j!} \dfrac{1}{(j+1)^i}$
2. En déduire que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} u_{i,j}$ est convergente et que sa somme, notée s_j, vérifie : $s_j \leqslant \dfrac{2}{j!}$.
3. Démontrer alors que la série double $\sum (i,j) \in \mathbb{N}^2 u_{i,j}$ est convergente. Pour la suite de l'exercice, on notera $a = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$.

2. Justifier l'existence d'un couple (X,Y) de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{1}{a(i+j)!}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer simplement $\mathbb{P}([X+Y=n])$ en fonction de a et n.
4. En déduire la valeur de a

Vers les concours

Exercice 17

Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n. Une urne U_2 contient des boules rouges en proportion p. On tire une boule au hasard dans U_1 et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule obtenue. Si $X = k$, on tire k fois, avec remise, une boule dans l'urne U_2 et on appelle Y le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$, pour $k \in X(\Omega)$.
3. Déterminer la loi du couple (X,Y).
4. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 18

Soient X et Y telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et telles que la loi conditionnelle de Y, sachant $X = k$ (où $k \in X(\Omega)$) est une loi binomiale de paramètre $n-k$ et p. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 19

On place au hasard deux paires de chaussettes de couleurs différentes dans deux tiroirs notés t_1 et t_2. Un tiroir peut donc contenir de 0 à 2 paires.

On note X_1 et X_2 respectivement les variables aléatoires égales au nombre de paires de chaussettes contenues dans les tiroirs t_1 et t_2 ainsi que N le nombre de tiroirs occupés.

On note alors T_i le numéro du tiroir choisi pour la paire de chaussettes numéro i. Les paires de chaussettes étant rangées dans les tiroirs indépendamment les unes des autres, on suppose donc que les variables T_1 et T_2 sont indépendantes.

1. Préciser les lois de T_1 et T_2.
2. À l'aide des variables T_i, déterminer la loi conjointe du couple (N, X_1) que l'on présentera en recopiant et complétant le tableau suivant.

X_1/N	0	1	2
1			
2			

3. En déduire les lois marginales de N et X_1. Que dire de l'indépendance de N et X_1 ?
4. Calculer $E(N), E(X_1)$ puis $\operatorname{cov}(N, X_1)$.
5. Que peut-on dire du couple (N, X_2) ?

Exercice 20

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n (où $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$). On effectue deux tirages sans remise dans cette urne et on note X (resp. Y) le plus petit (resp. grand) numéro obtenu.

1. Déterminer les lois de X et Y ainsi que $E(X)$ et $E(Y)$.
2. Montrer que

$$P(X = i \cap Y = j) = \begin{cases} \dfrac{2}{n(n-1)}, \text{ si } 1 \leqslant i < j \leqslant n \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

3. Montrer que

$$E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

4. (*) En déduire la $\operatorname{Cov}(X, Y)$.
5. Écrire une fonction Python qui permette de simuler le couple (X, Y). On commencera par simuler la pioche successive sans remise de deux boules.

Exercice 21

Un binôme de deux personnes nommées A et B participent à une épreuve physique. Ces deux personnes doivent grimper une corde. Une fois que l'une des deux personnes a réussi, elle doit attendre que l'autre personne en fasse de même. On considère que

- A et B disposent chacun de leur propre corde.
- A et B ont droit à autant d'essais qu'ils le souhaitent.
- Les essais sont indépendants.
- Chaque essai, qu'il soit réussi ou non, dure une minute et est réussi avec probabilité p.

On note X_1 (resp. X_2) le nombre d'essais nécessaires à A (resp. B) pour grimper la corde, et Y la variable aléatoire réelle égale à $|X_1 - X_2|$.

1. Quelle est la loi de X_1 ? De X_2 ? Donner leur espérance et leur variance.
2. Que représente l'événement $[Y = 0]$? Déterminer sa probabilité.
3. Montrer que pour tout on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y = k) = \frac{2p(1-p)^k}{2-p}$$

4. Écrire un programme Python permettant de simuler la variable aléatoire Y.
5. Pour quelles valeurs de p les deux personnes s'attendront-elles en moyenne moins de 5 minutes ?