Épreuve n°1

E C G

CONCOURS BLANC N°1

Option Économique

MATHÉMATIQUES

3 Septembre 2024

QUESTIONS DE COURS :

Répondre directement sur ce document.

Fonctions

Propriétés, Opérations

- Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \qquad \mathrm{e}^{a-b} =$$
$$\frac{1}{\mathrm{e}^a} = \qquad (\mathrm{e}^a)^n =$$

- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\ln(ab) = \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) =$$
$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \qquad \ln(a^n) =$$

- Définition de la valeur absolue :

$$|x| = \left\{ \right.$$

- Soient x, y deux réels et n un entier naturel.
  - $|xy| =$
  - $|x^n| =$
  - Si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| =$

  Soient x, y deux réels et ε un réel strictement positif.
  - $|x| \leq \varepsilon \iff$
  - $|x| = |y| \iff$.
  - $|x| \geq \varepsilon \iff$.
  - $|x| = \varepsilon \iff$.

- Soit $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ (non nul si nécessaire). Alors :

$$\sqrt{ab} = \qquad\qquad \sqrt{\frac{a}{b}} =$$

De plus, pour x un réel :

$$\sqrt{x^2} =$$

- Soit a, b des réels (non nuls si nécessaire), $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$(ab)^n = \qquad \frac{1}{a^n} = \qquad (a^n)^m =$$

et

$$a^n a^m = \qquad \frac{a^n}{a^m} =$$

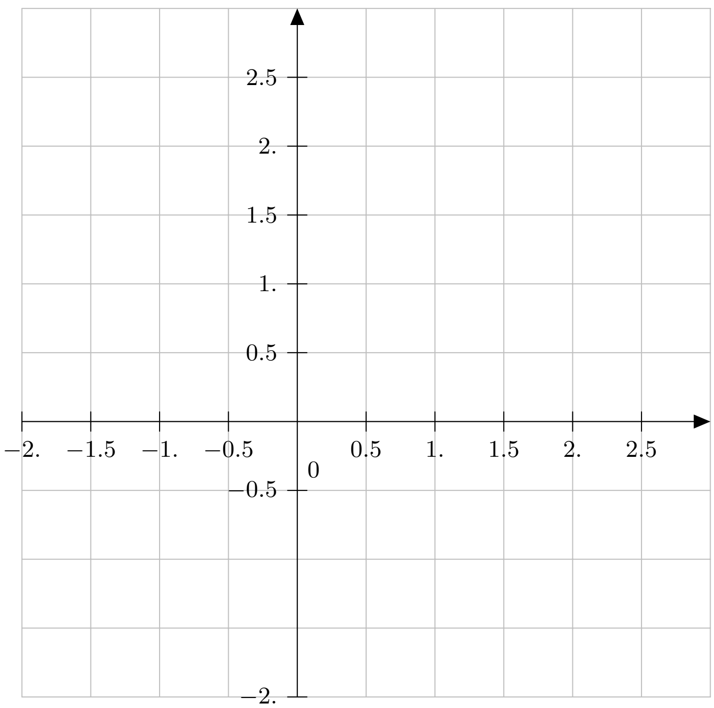
- Définition de la partie entière : Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\leq \lfloor x \rfloor <$$

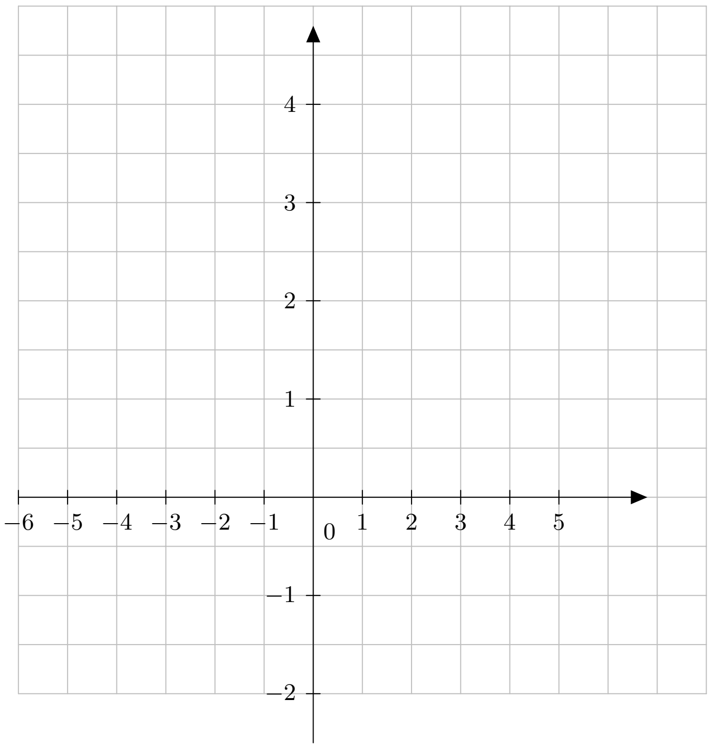
Représentations graphiques

Tracer les graphes des fonctions usuelles en mettant en évidence des points particuliers, asymptotes éventuelles. Faire bien attention à la position relative des courbes autour du point $(1, 1)$ dans le cas des puissances.

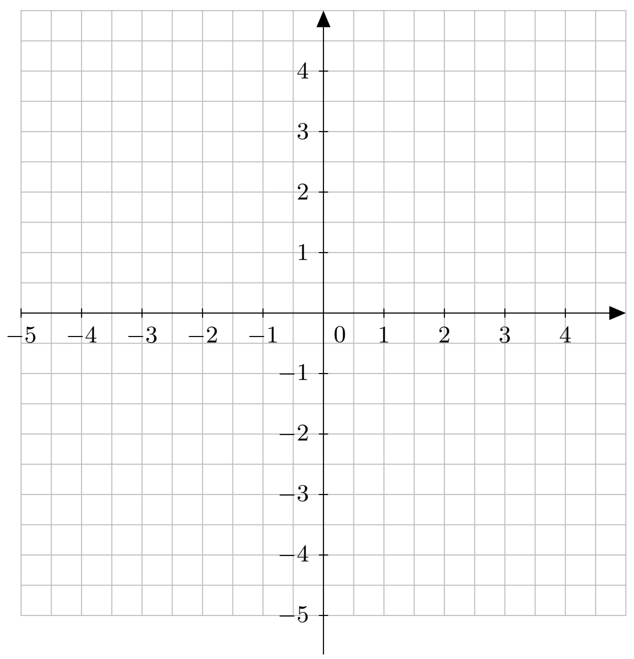
Représentation graphique des fonctions carré, cube et racine



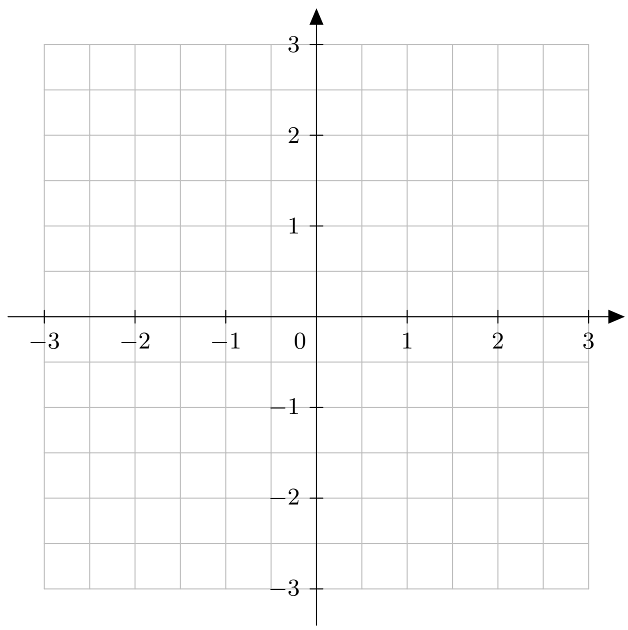
Représentation graphique des fonctions exponentielle et logarithme



Représentation graphique de la fonction valeur absolue



Représentation graphique de la fonction partie entière



Dérivées

Fonction f	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
$x \longrightarrow k \quad (k \in \mathbb{R})$			
$x \longrightarrow x^n \quad (n \in \mathbb{N})$			
$x \longrightarrow x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$			
$x \longrightarrow x^\alpha,\ \alpha \in]0, +\infty[$			
$x \longrightarrow \mathrm{e}^x$			
$x \longrightarrow \ln(x)$			

$(u+v)' =$	$(uv)' =$
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' =$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' =$

Fonction	**Dérivée**	**Conditions**
$f = u^n$	$f' =$	$n \in \mathbb{N}$
$f = \dfrac{1}{u^n} = u^{-n}$	$f' =$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$f = u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$f' =$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$f = \sqrt{u}$	$f' =$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$f = \ln(u)$	$f' = \dfrac{u'}{u}$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$f = \ln\|u\|$	$f' =$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$f = \mathrm{e}^u$	$f' =$	

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y =$$

Primitives

Compléter les tableaux de primitives suivant. On admet que $n \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ (selon les cas), et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Préciser les intervalles de dérivation dans le premier tableau.

la fonction f	admet pour primitive F	sur I
$f(x) = x^n$	$F(x) =$	
$f(x) = 1/x^n$	$F(x) =$	ou
$f(x) = x^\alpha$	$F(x) =$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) =$	ou

la fonction f	admet pour primitive F
$u' \times u^\alpha$	
$\dfrac{u'}{u}$	
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	
$u' \times e^u$	

Limites

Théorème 0.1 (Croissances comparées)

Soient α et β deux réels strictement positifs et $n \in \mathbb{N}$.

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\beta x}} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\ln^\beta(x)} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{\mathrm{e}^{\beta x}} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln^\beta(x)} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) =$

Théorème 0.2 (Taux d'accroissement)

Limites usuelles à connaître

- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} =$

Suites, sommes et séries

Théorème 0.3

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$.

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k =$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 =$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 =$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} & \text{si} \quad q = 1 \\ & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$

La somme des termes d'une suite géométrique peut être généralisée. Soit $n, p \in \mathbb{N}$, et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} q^k =$$

- Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r et p, n deux entiers naturels avec $p \leq n$.
  On a alors :
  $$\sum_{k=p}^{n} u_k = \qquad\qquad .$$
- Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q et p et n deux entiers naturels avec $p \leq n$.
  - Si $q \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k =$
  - Si $q = 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k =$
- Compléter les formules des sommes de séries suivantes, et préciser si besoin les conditions de convergence :
  - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k =$ si
  - $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2} =$ si
  - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^k =$ si
  - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} =$
- Donner la définition d'une série de Riemann, et dire à quelle condition elle converge.

Équations différentielles :

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Donner l'ensemble des solutions $y \in \mathcal{C}^1(I)$, de l'équation différentielle $y' + ay = 0$:

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ définie sur I avec $y \in \mathcal{C}^2(I)$
  - Rappeler l'expression du polynôme caractéristique associé à cette équation :
  - Donner, selon le nombre de racine du polynôme caractéristique, l'ensemble des solution de cette équation :

Probabilités

Théorème 0.4 (Formule des probabilités composées)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements avec $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$

Théorème 0.5 (Formule des probabilités totales)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Soit B un évènement.

- On a : $P(B) =$.
- Si de plus pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$ alors :

$$P(B) =$$

Théorème 0.6 (Formule de Bayes)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Soit B un événement. On suppose que tous ces événements ont une probabilité non nulle.
On a alors pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$:

$$\mathrm{P}_B(A_i) =$$

Lois usuelles

Compléter le tableau des lois usuelles discrètes :

Nom	**Notation**	$X(\Omega)$	**Loi**	**Espérance**	**Variance**
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$\{0,\ 1\}$	$\mathrm{P}(X=1)=$ et $\mathrm{P}(X=0)=$		
Uniforme sur $[\![1,\, n]\!]$	$\mathcal{U}([\![1,\, n]\!])$				
Uniforme sur $[\![a,\, b]\!]$	$\mathcal{U}([\![a,\, b]\!])$				
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$				
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$				
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$				

Polynômes

Proposition 0.7

Soit $(P,Q)\in(\mathbb{R}[X])^2$.

$\deg(P+Q)\leq$ $\qquad\qquad$ $\deg(PQ)=$

Théorème 0.8

Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ avec $a\neq 0$ et le polynôme $P(X)=aX^2+bX+c$. On pose $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta>0$, P admet deux racines simples $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et se factorise de la manière suivante :
  $P(X)=$ $\qquad\qquad$.
- Si $\Delta=0$, P admet une racine double $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ et se factorise de la manière suivante :
  $P(X)=$ $\qquad$.

Proposition 0.9 (Relations coefficients - racines)

Soit $P(X)=aX^2+bX+c$ un trinôme admettant deux racines x_1 et x_2. On a les relations suivantes :

$x_1+x_2=$ $\qquad\qquad$ et $\qquad\qquad$ $x_1x_2=$

Coefficients binomiaux

Théorème 0.10 (Formule du triangle de Pascal)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$. On a :

$$\binom{n}{p} =$$

Théorème 0.11 (Expresion à l'aide de factorielles)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$. On a :

$$\binom{n}{p} =$$

Théorème 0.12 (Formule du binôme de Newton)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a + b)^n =$$

Python - À faire sur une copie à part

Exercice 1

Écrire un script Python permettant de définir la fonction suivante :

$$f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{1+x^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ \exp(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Exercice 2

Créer une fonction `trier` qui prend en entrée trois nombres a, b, et c, et qui renvoie le triplet trié dans l'ordre croissant.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} & u_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} & = & \dfrac{2u_n+1}{1+u_n^2} \end{cases}$

Écrire une fonction Python d'en tête `suiteU` qui prend en entrée un paramètre n et calcule u_n.

Exercice 4

Soit (x_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. On admet que cette suite diverge vers $+\infty$. Écrire un programme `x_nDepasse`, prenant en entrée un réel `A` et qui renvoie le premier terme n_0 pour lequel $x_{n_0} \geq A$.

Exercice 5

Écrire une fonction d'en tête `indice(L,x)` qui renvoie le premier indice auquel apparaît dans la liste `L` et qui renvoie -1 si `x` n'est pas dans `L`.

Exercice 6

Soit f définie sur $[-1;3]$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-e^x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - x/2 & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ \ln(x^2-3) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Écrire un programme Python permettant de définir f et de donner sa représentation graphique.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amener à prendre.

Calculs

1. Calculer si elles existent les limites suivantes
   (a) $\dfrac{1+x+\ln(x)}{1+\exp(x)}$ en $+\infty$.
   (b) $\dfrac{e^x+\ln x}{x^2+x}$ en $+\infty$.
   (c) $\dfrac{\ln(1+3x)}{2x}$ en 0.
   (d) $\left(1-\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^2}$ en $+\infty$.
2. Calculer les intégrales suivantes
   (a) $I_1 = \displaystyle\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x$
   (b) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{-x} \,\mathrm{d}x$
   (c) $I_3 = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^{10}}{x} \,\mathrm{d}x$ on pourra poser $u = \ln x$
   (d) $I_4 = \displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ on pourra poser $u = \sqrt{x}$.
   (e) $I_5 = \displaystyle\int_0^1 e^{x+e^x} \,\mathrm{d}x$
3. Résoudre les équations et les inéquations suivantes.
   (a) $|x-2| \geqslant |x+1|$
   (b) $\sqrt{x} - \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 3$
   (c) $\exp(2x) + \exp(x) = 1$

Exercice n°1

Un jeu vidéo comporte N phases de jeu : niveau 1, niveau 2, ... niveau N. On suppose que N est un entier au moins égal 3. Le jeu commence au niveau 1. Ensuite, il faut réussir un niveau pour passer au suivant et ainsi de suite jusqu'au dernier niveau. Le jeu s'arrête si l'on a échoue à l'un des niveaux ou si l'on a réussi tous les niveaux. On suppose en outre que, lorsqu'on parvient au niveau $k \in [\![1,\ N]\!]$, la probabilité de réussir ce k-ième niveau est égale $1/k$.

On désigne par X_N la variable aléatoire donnant le nombre de niveaux entièrement franchis au moment où le jeu s'arrête. Ainsi, pour $k = 1, 2, ..., N-1$, l'événement $(X_N = k)$ signifie que l'on a échoué au niveau $k+1$, et l'événement $(X_N = N)$ que l'on est vainqueur du jeu. On note A_k l'évènement : "le niveau k est franchi".

1. Pour tout $k \in [\![1,\ N-1]\!]$, exprimer l'évènement $[X_N = k]$ en fonction des A_k puis démontrer que :
$$P\left(X_N = k\right) = \frac{k}{(k+1)!}$$
Montrer ensuite : $P\left(X_N = N\right) = \dfrac{1}{N!}$
2. Calculer $E\left(X_N + 1\right)$. En déduire que $E\left(X_N\right) = S_N - 1$ avec $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$.
Que vaut $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} E\left(X_N\right)$?
3. Montrer que $E\left[\left(X_N+1\right)\left(X_N-1\right)\right] = S_{N-3} + \dfrac{(N-1)(N+1)}{N!}$.
En déduire $V\left(X_N\right)$ en fonction de S_N,S_{N-3} et N.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} V\left(X_N\right) = 3e - e^2$.
5. Compléter la fonction suivante pour quelle simule cette expérience et renvoie le dernier niveau franchi.

```python
def jeux(N)
    nf=...
    while (rd.rand()<1/(nf+1)) and (...) :
        ...
    return(...)
```

6. On fixe $N = 10^7$. En utilisant la fonction précédente écrire un programme qui calcule une moyenne du nombre de niveaux franchis.

Exercice n°2

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On dit qu'un élément A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est colinéaire à I, s'il existe un réel λ tel que $A = \lambda I$.

On définit les deux applications suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, notées d et t par : pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
$$d(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \qquad \text{et} \qquad t(A) = a_{1,1} + a_{2,2}$$

1. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$.
   (a) Calculer $d(2I)$. En déduire que d n'est pas linéaire.

(b) Montrer que $d(AB) = d(A)d(B)$. *Indication : On pourra poser A et B sous la forme* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$.

(c) En déduire que si il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, $d(A) = d(B)$.

2. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que t est une application linéaire.
   (b) Donner une base et la dimension de $Ker(t)$ et $Im(t)$.
   (c) Montrer que $t(AB) = t(BA)$.
   (d) En déduire que si il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, $t(A) = t(B)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non colinéaire à I.
   (a) Etablir l'existence d'un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $A^2 = \alpha A + \beta I$.
   (b) Exprimer α et β en fonction de $d(A)$ et $t(A)$.
4. **Pour les cubes :** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$. On pose $w = e_1 + e_2$.
   (a) Montrer que e_1, e_2, et w ne peuvent être simultanément vecteurs propres de u.
   (b) En déduire qu'il existe au moins un éléments non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, u(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Montrer que la matrice M associée à u dans la base $(x, u(x))$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels, indépendants de la base $(x, u(x))$, que l'on exprimera en fonction de $d(A)$ et $t(A)$.
   (d) En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^tA$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AB = BA\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est une sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{C}(A)$. (On discutera selon que A est ou non colinéaire à I.)

Exercice n°3

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k = \ell$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1[$.
   (b) Étudier la monotonie de (u_n) puis étudier sa convergence. *On donnera la valeur de sa limite*
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \dfrac{1}{1 - u_n}$.
   (a) Calculer $w_{n+1} - w_n$ en fonction de u_n et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{n+1} - w_n$.
   (b) Déterminer un équivalent de w_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) **Pour les cubes :** En déduire que $u_n = 1 - \dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.