Épreuve n°1

E C G

CONCOURS BLANC N°1

Option Économique

MATHÉMATIQUES

3 Septembre 2024

Exercice n°1

Un jeu vidéo comporte N phases de jeu : niveau 1, niveau 2, ... niveau N. On suppose que N est un entier au moins égal 3. Le jeu commence au niveau 1. Ensuite, il faut réussir un niveau pour passer au suivant et ainsi de suite jusqu'au dernier niveau. Le jeu s'arrête si l'on a échoue à l'un des niveaux ou si l'on a réussi tous les niveaux. On suppose en outre que, lorsqu'on parvient au niveau $k \in [\![1,\ N]\!]$, la probabilité de réussir ce k-ième niveau est égale $1/k$.

On désigne par X_N la variable aléatoire donnant le nombre de niveaux entièrement franchis au moment où le jeu s'arrête. Ainsi, pour $k = 1, 2, ..., N-1$, l'événement $(X_N = k)$ signifie que l'on a échoué au niveau $k+1$, et l'événement $(X_N = N)$ que l'on est vainqueur du jeu.

1. Démontrer que : $P\left(X_N = k\right) = \dfrac{k}{(k+1)!}$ pour $k = 1, 2, ...N-1$ et que $P\left(X_N = N\right) = \dfrac{1}{N!}$.

RÉPONSE:

Soit A_k l'évènement « le niveau k est franchi ». On a alors, pour $k < n$

$$[X_N = k] = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}$$

*On utilise le **théorème des probabilitées composées***

$$P(X_N = k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots P_{A_1 \cap \cdot \cap A_{k-1}}(A_k)P_{A_1 \cap \cdot \cap A_k}(\overline{A_{k+1}})$$

L'énoncé nous dit « lorsqu'on parvient au niveau k ($k = 1, 2, ..., N$), la probabilité de réussir ce kème niveau est égale $1/k$ ». On sait donc que $P(A_1) = \dfrac{1}{2}$, $P_{A_1}(A_2) = \dfrac{1}{2}$, $P_{A_1 \cap \cdot \cap A_{k-1}}(A_k) = \dfrac{1}{k}$. De plus

$$P_{A_1 \cap \cdots \cap A_k}(\overline{A_{k+1}}) = 1 - P_{A_1 \cap \cdots \cap A_k}(A_{k+1}) = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$$

Donc

$$P(X_N = k) = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1}$$

Ce qui montre que

$$\boxed{P(X_N = k) = \frac{k}{(k+1)!}}$$

Remarque : Cette formule est juste aussi pour $[X_N = 1] = A_1 \cap \overline{A_2}$
On a aussi

$$[X_N = N] = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N$$

En utilisant le théorème des probabilitées composées :

$$P(X_N = N) = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\textit{Pour } k = 1, 2, ...N-1 \textit{ on a } P(X_N = k) = \frac{k}{(k+1)!} \textit{ et } P(X_N = N) = \frac{1}{N!}}$$

* * *

2. Calculer $E(X_N + 1)$. En déduire que $E(X_N) = S_N - 1$ avec

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

Que vaut $\lim_{N\to+\infty} E(X_N)$?

RÉPONSE:

Comme la variable aléatoire $X_N + 1$ est à support fini égal à $[\![2,\, N+1]\!]$, elle admet donc une espérance et

$$\begin{aligned}
E(X_N + 1) &= \sum_{k=2}^{N} (k+1) P(X_n = k) && \textit{théorème de transfert} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} (k+1) \frac{k}{(k+1)!} + \frac{N+1}{N!} && \textit{question précédente} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k-1)!} + \frac{N}{N!} + \frac{1}{N!} && \textit{simplification factorielle} \\
&= \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(N-1)!} + \frac{1}{N!} && \textit{changement d'indice} \\
&= S_N
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X_N + 1) = S_N}$$

Or on sait que $E(X_N + 1) = E(X_N) + 1$, donc

$$\boxed{E(X_N) = S_N - 1}$$

On reconnaît en S_N, la somme partielle de la série exponentielles, donc

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = e$$

donc

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} E(X_N) = e - 1}$$

* * *

3. Exprimer $E\left[\left(X_N+1\right)\left(X_N-1\right)\right]$ l'aide de S_{N-3}. En déduire $V\left(X_N\right)$ en fonction de S_N,S_{N-3} et N.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
E\left[\left(X_N+1\right)\left(X_N-1\right)\right] &= \sum_{k=1}^{N}(k-1)(k+1)P(X_N=k) && \textit{théorème de transfert}\\
&= \sum_{k=1}^{N-1}(k-1)(k+1)\frac{k}{(k+1)!}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!} && \textit{question 1}\\
&= \sum_{k=2}^{N-1}(k-1)(k+1)\frac{k}{(k+1)!}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}\\
&= \sum_{k=2}^{N-1}\frac{1}{(k-2)!}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!} && \textit{propriétés factorielle}\\
&= \sum_{k=1}^{N-3}\frac{1}{k!}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!} && \textit{changement d'indice}\\
&= S_{N-3}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E\left[\left(X_N+1\right)\left(X_N-1\right)\right] = S_{N-3}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
E\left[\left(X_N+1\right)\left(X_N-1\right)\right] &= E(X_N^2-1)\\
&= E(X_n^2)-1
\end{aligned}$$

Donc

$$E(X_n^2)=1+S_{N-3}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}$$

En utilisant la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned}
V(X_N) &= E(X_N^2)-E(X_N)^2\\
&= 1+S_{N-3}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}-(S_N-1)^2 && \textit{questio ns précédentes}\\
&= S_{N-3}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}-S_N^2+2S_N
\end{aligned}$$

$$\boxed{V(X_N)=S_{N-3}+\frac{(N-1)(N+1)}{N!}-S_N^2+2S_N}$$

* * *

4. Montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} V\left(X_N\right)=3e-e^2$.

RÉPONSE:

On a comme dans la question précédente

$$\lim_{N\to+\infty} S_{N-3}=e \qquad \lim_{N\to+\infty} S_N=e \qquad \lim_{N\to+\infty} S_N^2=e^2$$

De plus pour $N \in \mathbb{N}^*$, $N-1 \leqslant N$ donc

$$0 \leqslant \frac{(N-1)(N+1)}{N!} \leqslant \frac{N(N+1)}{N!}$$

Puis

$$0 \leqslant \frac{(N-1)(N+1)}{N!} \leqslant \frac{(N+1)}{(N-1)!}$$

et finalement

$$0 \leqslant \frac{(N-1)(N+1)}{N!} \leqslant \frac{(N-1)}{(N-1)!} + \frac{1}{(N-1)!}$$

et

$$0 \leqslant \frac{(N-1)(N+1)}{N!} \leqslant \frac{1}{(N-2)!} + \frac{1}{(N-1)!}$$

Comme $\lim\limits_{N \to +\infty} N! = +\infty$, *et en utilisant le théorème des encadrements*

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{(N-1)(N+1)}{N!} = 0$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} V(X_N) = 3e - e^2.}$$

* * *

```python

import numpy.random as rd


def jeux(N):
        nf=0
        while (rd.random()<1/(nf+1)) and (nf<=N):
                nf=nf+1
        return nf


N=10**7
nbexp=10^5 # un grand nombre d'expériences
m=0
for i in range(nbexp)
        m=m+jeux(n)

print(m/1000000)
```

5. **Exercice n°2**

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On dit qu'un élément A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est colinéaire à I, s'il existe un réel λ tel que $A = \lambda I$.

On définit les deux applications suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, notées d et t par : pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$d(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \qquad \text{et} \qquad t(A) = a_{1,1} + a_{2,2}$$

1. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$.

   (a) Calculer $d(2I)$. En déduire que d n'est pas linéaire.

RÉPONSE:

On a $2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *donc* $d(2I) = 2\cdot 2 - 0\cdot 0 = \boxed{4}$ *alors que* $d(I) = 1$. *Donc* $d(2I) \neq 2d(I)$.

Conclusion : $\boxed{d \text{ n'est pas linéaire.}}$

* * *

   (b) Montrer que $d(AB) = d(A)d(B)$.

RÉPONSE:

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

On a alors $A\ B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} d(A)\,d(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\ &\quad - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ &= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} \\ &\quad - [a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}] \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \\ &= d(A)\,d(B) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{d(AB) = d(A)\,d(B) \text{ pour toutes matrices } A \text{ et } B}$

* * *

   (c) En déduire que si il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, $d(A) = d(B)$.

RÉPONSE:

Si A *et* B *sont semblables, il existe* P *tel que* $A = PBP^{-1}$
Donc $d(A) = d\left(PBP^{-1}\right) = d(P)\,d(B)\,d\left(P^{-1}\right) = d(P)\,d\left(P^{-1}\right)d(B) = d\left(PP^{-1}B\right) = d(B)$
On peut aussi remarquer que $d\left(PP^{-1}\right) = d(P)\,d\left(P^{-1}\right)$ *d'une part et* $d\left(PP^{-1}\right) = d(I) = 1$.
Donc $d\left(P^{-1}\right) = d(P)^{-1}$ *et* $d(A) = d\left(PBP^{-1}\right) = d(P)\,d(B)\,d\left(P^{-1}\right) = d(B)$
Conclusion : $\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont semblables, on a : } d(A) = d(B).}$

* * *

2. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que t est une application linéaire.

RÉPONSE:

t est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ donc $\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} \\ \alpha a_{21} + \beta b_{21} & \alpha a_{22} + \beta b_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} t(\alpha A + \beta B) &= \alpha a_{11} + \beta b_{11} + \alpha a_{22} + \beta b_{22} \\ &= \alpha(a_{11} + a_{22}) + \beta(b_{11} + b_{22}) \\ &= \alpha t(A +) \beta t(B) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{t \text{ est une application linéaire de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathbb{R}}$.

* * *

   (b) Donner une base et la dimension de $Ker(t)$ et $Im(t)$.

RÉPONSE:

On a $\operatorname{Im}(t) \subset \mathbb{R}$ et elle n'est pas réduite à $\{0\}$ $(t(I) = 2$ $)$. $\operatorname{Im}(t)$ étant un sous espace de $\mathbb{R}$ on a donc
Conclusion : $\boxed{\operatorname{Im}(t) = \mathbb{R} \text{ et } \dim(\operatorname{Im}(t)) = 1}$. *Le théorème du rang donne alors* $\boxed{\dim(\operatorname{Ker}(t)) = 4 - 1 = 3}$

* * *

   (c) Montrer que $t(AB) = t(BA)$.

RÉPONSE:

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \text{ et} \\ t(AB) &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \text{ et} \\ BA &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ t(BA) &= a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont deux éléments de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ on a : } t(AB) = t(BA)}$

* * *

   (d) En déduire que si il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, $t(A) = t(B)$.

RÉPONSE:

Donc si A et B sont semblables avec$A = PBP^{-1}$ on a $t(A) = t(PBP^{-1}) = t(PP^{-1}B) = t(B)$
Conclusion : $\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont semblables, on a : } t(A) = t(B).}$

* * *

3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non colinéaire à I.
   (a) Etablir l'existence d'un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $A^2 = \alpha A + \beta I$.

RÉPONSE:

Comme A et I sont deux matrices non colinéaires, elles forment une famille libre et α et β sont uniques.
Reste à démontrer l'existence :
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *et* $A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{12}(a_{11}+a_{22}) \\ a_{21}(a_{11}+a_{22}) & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$ *et* $\alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \beta + \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \beta + \alpha a_{22} \end{pmatrix}$
Donc $A^2 = \alpha A + \beta I \iff \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = \beta + \alpha a_{11} & a_{12}(a_{11}+a_{22}) = \alpha a_{12} \\ a_{21}(a_{11}+a_{22}) = \alpha a_{21} & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = \beta + \alpha a_{22} \end{pmatrix}$
ce qui est vrai si (condition suffisante) $\alpha = a_{11} + a_{22} = t(A)$ *et*

$$\begin{aligned}\beta &= a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - \alpha a_{11} = a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - a_{11}(a_{11}+a_{22}) \\ &= a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -d(A) \quad \textit{et} \\ \beta &= a_{22}^2 + a_{12}a_{21} - \alpha a_{22} = -d(A)\end{aligned}$$

* * *

   (b) Exprimer α et β en fonction de $d(A)$ et $t(A)$.

RÉPONSE:

$\boxed{\alpha = t(A) \textit{ et } \beta = -d(A) \textit{ sont les seules solutions de } A^2 = \alpha A + \beta I.}$

* * *

4. **Pour les cubes :** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$. On pose $w = e_1 + e_2$.
   (a) Montrer que e_1, e_2, et w ne peuvent être simultanément vecteurs propres de u.

RÉPONSE:

Si les trois sont vecteurs propres, il existe alors trois réels tels que $u(e_1) = \alpha_1 e_1$, $u(e_2) = \alpha_2 e_2$ *et* $u(e_1+e_2) = \alpha_3(e_1+e_2)$
et par linéarité : $u(e_1+e_2) = u(e_1) + u(e_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$.
Donc $\alpha_3(e_1+e_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ *et comme la famille* (e_1, e_2) *est libre alors* $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_2$.
Et pour tout vecteur $v = xe_1 + ye_2$ *on a* $u(v) = \alpha_1 v$ *donc* $u = \alpha_1 \mathrm{Id}$ *et* $A = \alpha I$
La contraposée est alors
Conclusion : $\boxed{\textit{les trois vecteurs } e_1, e_2 \textit{ et } w \textit{ ne peuvent être simultanément vecteurs propres de } u.}$

* * *

   (b) En déduire qu'il existe au moins un éléments non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, u(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

RÉPONSE:

La famille$(x, u(x))$ n'est pas une base si les deux vecteurs x et $u(x)$ sont liéés, donc si x est vecteur propre.
Or, un des trois vecteurs e_1, e_2 et w n'est pas vecteurs propre et donc pour un de ces trois vecteurs (non nul) .$(x, u(x))$ es tlibre donc base ($\dim \mathbb{R}^2 = 2$).
Conclusion : $\boxed{\textit{il existe au moins un élément non nul } x \textit{ de } \mathbb{R}^2 \textit{ tel que la famille } (x, u(x)) \textit{ soit une base de } \mathbb{R}^2}$

* * *

   (c) Montrer que la matrice M associée à u dans la base $(x, u(x))$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels, indépendants de la base $(x, u(x))$, que l'on exprimera en fonction de $d(A)$ et $t(A)$.

RÉPONSE:

On a $u(x) = 0x + 1u(x)$ *d'où ses coordonénes dans la base* $(x, u(x))$
Et comme $A^2 = \alpha A + \beta I$*. on a alors* $u^2 = \alpha u + \beta \mathrm{Id}$ *et* $(u(x)) = \beta x + \alpha u(x)$ *donc avec* $a = \beta = -d(A)$ *et* $b = \alpha = t(A)$ *(indépendants de* x *)*

Conclusion : $\boxed{\text{la matrice de } u \text{ dans la base } (x, u(x)) \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}}$

* * *

(d) En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^tA$.

RÉPONSE:

A est donc semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}$

et ${}^tA$ *n'est pas colinéaire à* I *non plus,* ${}^tA$ *est semblable à* $\begin{pmatrix} 0 & -d({}^tA) \\ 1 & t({}^tA) \end{pmatrix}$

Enfin, comme $d(A) = d({}^tA)$ *et* $t(A) = t({}^tA)$ *alors*

Conclusion : $\boxed{A \text{ est semblable à sa transposée } {}^tA}$

* * *

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AB = BA\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est une sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

RÉPONSE:

On vérifie les 3 critères :

- $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- *avec* 0 *la atrice nulle,* $A0 = 0A$ *donc* $0 \in \mathcal{C}(A)$
- *Si* B *et* $B' \in \mathcal{C}(A)$ *et* α *et* β *réels,* $A(\alpha B + \beta B') = \alpha AB + \beta AB' = \alpha BA + \beta B'A = (\alpha B + \beta B')A$
  Donc $\alpha B + \beta B' \in \mathcal{C}(A)$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

* * *

(b) Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{C}(A)$. (On discutera selon que A est ou non colinéaire à I.)

RÉPONSE:

Si A *est colinéaire avec* I *alors toute matrice commute avec* A *et* $\mathcal{C}(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *et* $\dim(\mathcal{C}(A)) = 4$

Si A *n'est pas colinéaire avec* I *alors il existe* P *inversible telle que* $A = P\begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}P^{-1}$

Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *et* $B' = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *on a :*

$$AB = BA \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} B' = B' \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}$$

avec $\begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c\,d(A) & -e\,d(A) \\ a + c\,t(A) & b + e\,t(A) \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b\,t(A) - a\,d(A) \\ e & e\,t(A) - c\,d(A) \end{pmatrix}$ *donc*

$$AB = BA \iff \begin{cases} b = -c\,d(A) & b\,t(A) - a\,d(A) = -e\,d(A) \\ e = a + c\,t(A) & e\,t(A) - c\,d(A) = b + e\,t(A) \end{cases}$$

$$\text{par substitution} \iff \begin{cases} b = -c\,d(A) & -c\,d(A)\;t(A) - a\,d(A) = -\left[a + c\,t(A)\right]\,d(A) \\ e = a + c\,t(A) & 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -c\,d(A) \\ e = a + c\,t(A) \end{cases}$$

Donc $\mathcal{C}(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} a & -c\,d(A) \\ c & a + c\,t(A) \end{pmatrix} P^{-1} \;/\; a, c \in \mathbb{R} \right\}$ *et en notant* $M = P \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} P^{-1}$ *on a*
$\mathcal{C}(A) = \mathrm{Vect}\,(I, M)$ *famille qui est libre (si* $\alpha I + \beta M = 0$ *alors* $P^{-1}(\alpha I + \beta M)\,P = 0$ *et* $\alpha I + \beta \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} = 0$
d'où $\alpha = \beta = 0$ *)*

Conclusion : $\boxed{(I, M) \text{ est une base de } \mathcal{C}(A) \text{ et donc } \dim(\mathcal{C}(A)) = 2 \text{ si } A \text{ n'est pas colinéaire avec } I}$

* * *

Exercice n°3 - À ne faire que si le reste est fait.

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \ell$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$.

1. Étudier la convergence de la suite (u_n)

RÉPONSE:

On a $u_0 = 0; u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{5}{8}; u_3 = \frac{89}{128}$.
On peut montrer par récurrence que pour tout n *appartenant à* $\mathbb{N}, 0 \leqslant u_n < 1$.

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geqslant 0$ *donc* $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$
- *La suite* (u_n) *est croissante et majorée par 1 donc elle converge. D'après un théorème de point fixe,* $\boxed{\text{sa limite vérifie } l}$

* * *

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \frac{1}{1-u_n}$.
   (a) Déterminer un équivalent de w_n lorsque n tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

Pour tout n *appartenant à* $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{u_n^2+1}{2}} - \frac{1}{1-u_n} \\ &= \frac{2}{1-u_n^2} - \frac{1}{1-u_n} \\ &= \frac{1}{1+u_n} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_{n+1}-w_n) = \frac{1}{2}$.

D'après la propriété donnée dans l'énoncé, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1}-w_k) = \frac{1}{2}$

Or $\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1}-w_k) = w_n - w_0 = w_n - 1$, *ainsi* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}w_n = \frac{1}{2}, \text{ d'où } w_n \sim \frac{n}{2}.}$

* * *

   (b) En déduire que $u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

RÉPONSE:

Lorsque n *tend vers* $+\infty$, *on a donc :*

$u_n = 1 - \frac{1}{w_n} = 1 - \frac{1}{\frac{n}{2}+o(n)} = 1 - \frac{2}{n}\times\frac{1}{1+o(1)} = \boxed{1 - \frac{2}{n}(1+o(1)) = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}.$

* * *

Calculs

1. Calculer si elles existent les limites suivantes

   (a) $\dfrac{1+x+\ln(x)}{1+\exp(x)}$ en $+\infty$.

RÉPONSE:

On factorise par les termes prépondérants :

$$\frac{1+x+\ln(x)}{1+\exp(x)} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}}{1+\frac{1}{e^x}}$$

Par croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x+\ln(x)}{1+\exp(x)} = 0}$$

* * *

   (b) $\dfrac{e^x+\ln x}{x^2+x}$ en $+\infty$.

RÉPONSE:

De la même façon :

$$\frac{e^x+\ln x}{x^2+x} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1+\frac{\ln(x)}{e^x}}{1+\frac{1}{x}}$$

Par croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+\ln x}{x^2+x} = +\infty}$$

* * *

   (c) $\dfrac{\ln(1+3x)}{2x}$ en 0.

RÉPONSE:

On pose $u = 3x$.

$$\frac{\ln(1+3x)}{2x} = \frac{\ln(1+u)}{\frac{2u}{3}} = \frac{3}{2} \times \frac{\ln(1+u)}{u}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} u = 0$ *et* $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$ *(taux d'accroissement usuel). Donc par composition :*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} = \frac{3}{2}}$$

* * *

(d) $\left(1 - \dfrac{1}{n^3}\right)^{n^2}$ en $+\infty$.

RÉPONSE:

On passe l'expression sous forme exponentielle :

$$\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1-\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$

$$n^2 \ln\left(1-\frac{1}{n^3}\right) \underset{+\infty}{\sim} n^2 \times \frac{-1}{n^3} \qquad \textit{ou encore } n^2 \ln\left(1-\frac{1}{n^3}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \ln\left(1-\dfrac{1}{n^3}\right) = 0$, *et par composition :*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{n^2} = 1}$$

* * *

2. Calculer les intégrales suivantes

(a) $I_1 = \displaystyle\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x$

RÉPONSE:

Si on ne connait pas une primitive de $\ln$ *on procède par intégration par parties. On pose alors*

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \textit{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

Les fonctions u *et* v *ainsi définies sont de classe* C^1 *sur* $[1, e]$ *et par IPP :*

$$I_1 = \int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e 1 \,\mathrm{d}x = e - (e-1) = \boxed{1}$$

* * *

(b) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{-x} \,\mathrm{d}x$

RÉPONSE:

On procède par intégration par parties. On pose alors

$$\begin{cases} u(x) &= x+1 \\ v'(x) &= e^{-x} \end{cases} \quad \textit{et} \quad \begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= -e^{-x} \end{cases}$$

Les fonctions u et v ainsi définies sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et par IPP :

$$I_2 = [-(x+1)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = [-(x+1)e^{-x}]_0^1 + [-e^{-x}]_0^1 = -2e^{-1} + 1 - e^{-1} + 1 = \boxed{2 - 3e^{-1}}$$

* * *

(c) $I_3 = \displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^{10}}{x}\,\mathrm{d}x$ on pourra poser $u = \ln x$

RÉPONSE:

- *On pose $u = \ln(x)$ ou encore $x = e^u$.*
- *La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est de classe C^1 sur $[1,e]$.*
- *On a $\mathrm{d}x = e^u\,\mathrm{d}u$.*
- *Si $x = 1$, $u = 0$ et si $x = e$, $u = 1$.*

On effectue le changement de variables :

$$I_3 = \int_0^1 \frac{u^{10}}{e^u} \times e^u\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u^{10}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{11}}{11}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{11}}$$

* * *

(d) $I_4 = \displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ on pourra poser $u = \sqrt{x}$.

RÉPONSE:

- *On pose $u = \sqrt{x}$ ou encore $x = u^2$.*
- *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^1 sur $[1,4]$.*
- *On a $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$.*
- *Si $x = 1$, $u = 1$ et si $x = 4$, $u = 2$.*

On effectue le changement de variables :

$$I_4 = \int_1^2 \frac{1-u}{u} \times 2u\,\mathrm{d}u = 2\int_1^2 (1-u)\,\mathrm{d}u = 2\left[u - \frac{u^2}{2}\right]_1^2 = 2\left(2 - 2 - 1 + \frac{1}{2}\right) = \boxed{-1}$$

* * *

(e) $I_5 = \int_0^1 e^{x+e^x}\,\mathrm{d}x$

RÉPONSE:

Pour tout $x \in [0,1]$, $e^{x+e^x} = e^x \times e^{e^x}$. L'intégrande est donc de la forme $u'e^u$ ou u est définie par $u(x) = e^x$. Ainsi

$$I_5 = \left[e^{e^x}\right]_0^1 = e^e - e^1 = \boxed{e^e - e}$$

* * *

3. Résoudre les équations et les inéquations suivantes.

(a) $|x-2| \geqslant |x+1|$

RÉPONSE:

Cette inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. Par définition on a

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & si \quad x \geq 2 \\ 2-x & sinon \end{cases} \qquad et \qquad |x+1| = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq -1 \\ -1-x & sinon \end{cases}$$

On distingue ainsi trois situations :

- *Si $x < -1$:*

$$|x-2| \geqslant |x+1| \Leftrightarrow 2-x \geq -1-x \Leftrightarrow 2 \geq -1$$

Donc tous les $x \in]-\infty; -1[$ sont solutions de l'inéquation.

- *Si $-1 \leq x < 2$:*

$$|x-2| \geqslant |x+1| \Leftrightarrow 2-x \geq 1+x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq x$$

Donc tous les $x \in [-1; \frac{1}{2}]$ sont solutions de l'inéquation.

- *Si $x \geq 2$:*

$$|x-2| \geqslant |x+1| \Leftrightarrow x-2 \geq 1+x \Leftrightarrow -2 \geq 1$$

Il n'y a pas de solution.

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{S =]-\infty; -1[\cup \left[-1; \frac{1}{2}\right]}$$

* * *

(b) $\sqrt{x} - \dfrac{4}{\sqrt{x}} = 3$

RÉPONSE:

L'équation est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 3u - 4 = 0$$

où $u = \sqrt{x}$. On cherche les racines du trinômes, et on trouve $u = -1$ ou $u = 4$.

$$u = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -1 \text{ Impossible}$$

$$u = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{S = \{16\}}$$

* * *

(c) $\exp(2x) + \exp(x) = 1$

RÉPONSE:

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$*. On pose* $u = e^x$*. L'équation devient* $u^2 + u - 1 = 0$ *qui a deux solutions :* $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

$$u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$u = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

ce qui est impossible. L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{S = \left\{\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}}$$

* * *