Épreuve n°2

E C G

CONCOURS BLANC N°1

Option Économique

MATHÉMATIQUES

5 Septembre 2024

Exercice n°1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
On considère les matrices A , B et P définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = Ae_1 + e_1.$$

1. (a) Calculer v.

RÉPONSE:

On trouve

$$v = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

* * *

(b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

RÉPONSE:

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X = au + bv + ce_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = x \\ -a - 2b = y \\ b = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = x - b - a \\ a = -2b - y \\ b = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = x - z + 2z + y \\ a = -2z - y \\ b = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = x + z + y \\ a = -2z - y \\ b = z \end{cases}$$

Le système est de Cramer. $\boxed{\textit{Donc la famille } (u, v, e_1) \textit{ est bien une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

$***$

(c) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.

RÉPONSE:

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. *On résout* $PX = A$.

$$PX = A \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & +z & = & a \\ -x & -2y & & = b & \\ & y & & = & c \end{cases}$$

On retrouve le même système que précédemment. On trouve ainsi

$$\begin{cases} x & = & -b-2c \\ y & = & c \\ z & = & a+b+c \end{cases}$$

$\boxed{\text{La matrice } P \text{ est donc inversible, d'inverser } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$

$***$

2. (a) Déterminer la matrice A' telle que PAP^{-1}.

RÉPONSE:

Un simple calcul donne $\boxed{A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

$***$

(b) Justifier sans calcul que A' est inversible, puis que A est inversible. Donner l'expression de A^{-1} en fonction de A'^{-1}, P et P^{-1}.

RÉPONSE:

La matrice A' *est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, elle est donc inversible. Comme* $A = PA'P^{-1}$, $\boxed{A^{-1} = PA'^{-1}P^{-1}.}$

$***$

3. (a) Montrer : $B^2 = 2B$.

RÉPONSE:

Simple calcul.

$***$

(b) Montrer que B n'est pas inversible.

RÉPONSE:

On raisonne par l'absurde. On suppose que B *est inversible. Ainsi il existe une matrice* C *telle que* $BC = CB = I_3$. *Comme* $B^2 = B$, *en multipliant par* C *on obtient* $B^2C = BC$, *puis en simplifiant,* $B = I_3$. *Ce dernier résultat est absurde. Donc* $\boxed{B \text{ n'est pas inversible.}}$

* * *

(c) Soit $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ BX = \lambda X\}$.

i. Montrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par un vecteur u_1 que l'on précisera.

RÉPONSE:

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$BX = 0 \begin{cases} x & +y & -z & = & 0 \\ & 2y & & = & 0 \\ -x & +y & +z & = & 0 \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{cases} x & +y & +z & = & 0 \\ & 2y & & = & 0 \\ & 2y & & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\mathbb{E}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$\boxed{\text{Donc } E_0 \text{ est le sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ engendré par } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

* * *

ii. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par deux vecteurs u_2 et u_3 que l'on précisera.

RÉPONSE:

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$BX = 2X \begin{cases} x & +y & -z & = & 2x \\ & 2y & & = & 2y \\ -x & +y & +z & = & 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x & +y & -z & = & 0 \\ -x & +y & -z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x = y - z$$

Ainsi $\mathbb{E}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z,\ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \end{pmatrix} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$\boxed{\text{Donc } E_2 \text{ est le sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ engendré par } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{et } u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

* * *

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

RÉPONSE:

— *Par définition on a* $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

— *On remarque que* $0_{3,3} \in (\mathbb{R})$ *est dans* $\mathcal{E}$, *car* $B0_{3,3} = 0_{3,3}A = 0_{3,3}$.

— *Soit* $(X, Y) \in \mathcal{E}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$B(\lambda X + Y) = \lambda BX + BY = \lambda XA + YA = (\lambda X + Y)A$$

Donc $\lambda X + Y \in \mathcal{E}$.

Ainsi $\mathcal{E}$ *est bien un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

* * *

(b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$.
Montrer que M n'est pas inversible. *(On pourra raisonner par l'absurde).*

RÉPONSE:

Soit $M \in \mathcal{E}$. *Raisonnons par l'absurde et supposons que* M *est inversible. Ainsi il existe une matrice* $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $MN = NM = I_3$. *Comme* $BM = MA$ *en multipliant à droite par* N *on obtient*

$$B = MAN$$

Comme M, A *et* N *sont inversible,* MAN *l'est également, et donc* B *aussi. Ce qui est absurde d'après la question 3(b).*

Donc M *n'est pas inversible.*

* * *

Exercice n°2

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un premier jeu

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :

Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1^er pile par A (resp. par B) lors de la k-ième manche.

On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'évènement : « Il y a égalité à la fin de la k-ième manche ».

On note E l'évènement : « Il y a perpéuellement éalité ».

On note G (resp. H) l'évèement : « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'évènement : « A (resp. B) gagne le jeu à la n-ième manche ».

1. Etude de la première manche.

   (a) Justifier soigneusement la loi commune à X_1 et Y_1.

RÉPONSE:

Les variables aléatoires X_1 et Y_1 correspondent au rang d'apparition pour la première fois de l'événement « obtenir pile » , qui est de probabilité p, au cours d'une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

X_1 et Y_1 suivent donc la loi géométrique de paramètre p :

$$X_1(\Omega) = Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X_1 = k) = P(Y_1 = k) = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p$$

* * *

   (b) On note, J_A (resp. J_B) l'évènement "le joueur A (resp. B) n'obtient jamais Pile", et F l'évènement "la première manche ne finit jamais". Calculer $P(J_A)$ et en déduire $P(F)$.

RÉPONSE:

La première manche dure éternellement si, et seulement si, A et B n'obtiennent jamais pile .

Donc $P(F) = P(J_A \cap J_B)$.
Or $P(J_A) = 0$.
En effet :

$$\begin{aligned}
P(J_A) &= 1 - P(\text{« } A \text{ obtient un pile »}) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p \\
&= 1 - p \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \\
&= 1 - p \frac{1}{1-q} = 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Comme $P(J_A \, capJ_B) \leqslant P(J_A)$ (car $J_A \cap J_B \subset J_A$), on en déduit que alors

$$\boxed{P(F) = 0}$$

* * *

(c) Érire l'évènement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.

RÉPONSE:

L'événement E_1 est réalisé si, et seulement si , X_1 et Y_1 prennent la même valeur, donc $\boxed{E_1 = [X_1 = Y_1]}$.

* * *

(d) Montrer que $P(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)\, P(Y_1 = i)$ puis que $P(E_1) = \dfrac{p}{1+q}$.

RÉPONSE:

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$, :

$$\begin{aligned}
P(E_1) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(E_1 \cap [Y_1 = i] = \sum_{i=1}^{+\infty} P([X_1 = Y_1] \cap [Y_1 = i] \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P([X_1 = i] \cap [Y_1 = i] = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = i) P(Y_1 = i).
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant obtenue par indépendance de X_1 et Y_1 .

$$\begin{aligned}
\textit{On en déduit : } \underline{P(E_1)} &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = i) P(Y_1 = i) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p q^{k-1} p = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} = p^2 \frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \boxed{\frac{p}{1+q}}
\end{aligned}$$

* * *

(e) Justifier sans aucun calcul que les évènements G_1 et H_1 sont équiprobables. En utilisant le système complet d'évènement (G_1, H_1, E_1), déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.

RÉPONSE:

Les joueurs A et B ont les mêmes pièces et les lancent dans les mêmes conditions , donc les probabilités que A ou B gagnent sont les mêmes .

On a donc $P(G_1) = P(H_1)$ *et* $\boxed{G_1 \text{ et } H_1 \text{ sont équiprobables}}$.

A ou B gagne ou alors il y a égalité , donc les événements G_1,H_1 *et* E_1 *forment un système complets d'événements .*
On en déduit

$$1 = P(G_1) + P(H_1) + P(E_1) = 2P(G_1) + P(E_1)$$

Et par conséquent :

$$\underline{P(G_1)} = \frac{1}{2}(1 - P(E_1)) = \frac{1}{2}(1 - \frac{p}{1+q}) = \frac{1}{2}(\frac{1+q-p}{1+q}) = \frac{1}{2}(\frac{2q}{1+q}) = \boxed{\frac{q}{1+q}}$$

* * *

2. Calcul de la probabilité de l'évènement G.
   (a) Pour n entier naturel , justifier la relation suivante :

$$G_n = E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{n-1} \cap [X_n \leqslant Y_n]$$

RÉPONSE:

L'événement G_n *est réalisé si, et seulement si, les n-1 premières manches ont donné égalité et si A obtient pile avant B à la n-ième manche, donc :* $\boxed{G_n = E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap (X_n \leqslant Y_n).}$

* * *

   (b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $P_{E_1 \cap \ldots E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geqslant 2, \ \ P(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}.$$

RÉPONSE:

Pour entier $k \geqslant 2$,

$$P_{E_1 \ldots E_{k-1}}(E_k) = P(\text{ « égalité à la k-ième manche »}) = P(E_1) = \boxed{\frac{p}{1+q}}$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 2, \quad P(G_n) &= P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap (X_n \leqslant Y_n)) \\
&= P(E_1) P_{E_1}(E_2) \ldots P_{E_1 \ldots E_{n-2}}(E_{n-1}) P_{E_1 \ldots E_{n-1}}(X_n \leqslant Y_n) \\
&= \frac{p}{1+q} \cdots \frac{p}{1+q} \frac{q}{1+q} \\
&= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}
\end{aligned}$$

$$* * *$$

(c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

RÉPONSE:

Pour $n = 1$ *, on a bien* $\left(\frac{p}{1+q}\right)^{1-1} \frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q} = P(G_1)$.

$$* * *$$

(d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul, que : $P(G) = \frac{1}{2}$.

RÉPONSE:

A gagne lorsque qu'il gagne une manche numéro n, pour un n dans $\mathbb{N}^*$ *, on a donc* $\boxed{G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n}$.

Les événements $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont 2 à 2 incompatibles (car A ne peut pas gagner à deux manches différentes) , on a donc*

$$\underline{P(G)} = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q} = \frac{q}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{q}{1+q} \frac{1}{1-\frac{p}{1+q}} = \frac{q}{1+q} \frac{1}{\frac{1+q-p}{1+q}} = \frac{q}{1+q-p} = \frac{q}{2q} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$* * *$$

(e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'évènement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, c'est à dire que $P(E) = 0$.

RÉPONSE:

Par symétrie (A et B ont autant de chance de gagner l'un que l'autre) , on obtient la probabilisé de l'événement H :

$$P(H) = P(\text{« } B \textit{ gagne à ce jeu} \text{ »}) = P(\text{« } A \textit{ gagne à ce jeu} \text{ »}) = P(G) = \frac{1}{2}$$

et donc :

$$P(\textit{ ce jeu a une fin }) = P(A \textit{ ou } B \textit{ gagne }) = P(G) + P(H) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

puis finalement :

$$\boxed{P(E) = P(\textit{ ce jeu s'éternise }) = 0}$$

.

$$* * *$$

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. (a) À l'aide du système complet d'évènements $(X_1 = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $P(Y_1 = X_1 + 1) = \dfrac{pq}{1+q}$.

RÉPONSE:

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned}
\underline{P\left(Y_1 = X_1 + 1\right)} &= \sum_{i=1}^{+\infty} P([Y_1 = X_1 + 1] \cap [X_1 = i]) = \sum_{i=1}^{+\infty} P([Y_1 = i + 1] \cap [X_1 = i]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_1 = i + 1)P(X_1 = i) \quad \textit{par indépendance de} X_1 \textit{ et } Y_1 \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} q^i p q^{i-1} p = p^2 q \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i-1} = p^2 q \frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{p^2 q}{(1-q)(1+q)} = \boxed{\frac{pq}{1+q}}
\end{aligned}$$

* * *

(b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

RÉPONSE:

La probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart est :

$$u = P\left(Y_1 = X_1 + 1\right) + P\left(X_1 = Y_1 + 1\right).$$

Donc, toujours par symétrie :

$$u = P\left(Y_1 = X_1 + 1\right) + P\left(X_1 = Y_1 + 1\right) = \frac{pq}{1+q} + \frac{pq}{1+q} = \frac{2pq}{1+q}.$$

* * *

4. (a) Utiliser les évènements E_k pour décrire l'évènement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la n-ième manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

RÉPONSE:

On a $K_n = E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap \left[(X_n = Y_n + 1)\ \cup (Y_n = X_n + 1)\right].$

* * *

(b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $P(K_n)$.

RÉPONSE:

Donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\underline{P(K_n)} &= P(E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1} \cap ([(X_n = Y_n + 1)\ \cup (Y_n = X_n + 1)]) \\
&= P(E_1)P_{E_1}(E_2)\ldots P_{E_1\ldots E_{n-2}}(E_{n-1})P_{E_1\ldots E_{n-1}}([(X_n = Y_n + 1)\ \cup (Y_n = X_n + 1)]) \\
&= \frac{p}{1+q} \cdots \frac{p}{1+q}\frac{2pq}{1+q} \\
&= \boxed{\left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q}}.
\end{aligned}$$

* * *

5. Donner finalement la probabilité de l'évènement K : « A gagne ce pari ».

RÉPONSE:

A gagne ce pari s'il le gagne à une manche numéro n, pour un des n de $\mathbb{N}^*$. On a donc $\boxed{K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n}$

.

Les événements $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont 2 à 2 incompatibles , donc :

$$\underline{P(K)} = \sum_{n=1}^{+\infty} P(K_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{2pq}{1+q} = \frac{2pq}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{2pq}{1+q} \frac{1}{1-\dfrac{p}{1+q}} = \frac{2pq}{1+q} \frac{1}{\dfrac{1+q-p}{1+q}} = \frac{2pq}{1+q-p} = \frac{2pq}{2q} = \boxed{p}$$

* * *

Partie 3 : Informatique

On rappelle que la commande `rd.geometric(p)` permet à Python de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Recopier et compléter le script Python suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné

RÉPONSE:

```python
p=float(input('Donner un reel entre 0 et 1'))

c=1
X=rd.geometric(p)
Y=rd.geometric(p)
while X==Y:
    X=rd.geometric(p)
    Y=rd.geometric(p)
    c=c+1
print(c)
if X<Y :
    print('A gagne')
else :
    print('B gagne')
```

* * *

7. Compléter le script précédent pour permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

RÉPONSE:

A gagne le 2-ième jeu lorsque $X = Y + 1$ ou $Y = X + 1$, c'est à dire lorsque $|X - Y| = 1$.
Pour simuler le deuxième jeu et en donner le nom du vainqueur, on rajoute :

```
        if abs(X-Y)==1:
                print('A gagne le deuxième jeu')
        else:
        print('B gagne le deuxième jeu')
```

* * *

Exercice n°3

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in\,]-\infty, 1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\, \ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty, 1]$.

RÉPONSE:

La fonction φ est continue :

- *sur $]-\infty, 1[$ en tant que somme et produit de fonctions continues sur $]-\infty, 1[$.*
  Notons que la fonction $g : x \mapsto \ln(1-x)$ est continue sur $]-\infty, 1[$ car elle est la composée $g = g_2 \circ g_1$ de :
  - $\times$ *$g_1 : x \mapsto 1 - x$ qui est :*
    - *continue sur $]-\infty, 1[$,*
    - *telle que : $g_1(]-\infty, 1[) \subset]0, +\infty[$.*
  - $\times$ *$g_2 : x \mapsto \ln(x)$ qui est continue sur $]0, +\infty[$.*
- *en 1. En effet :*
  - $\times$ *d'une part, avec le changement de variable $u = 1 - x$:*

    $$\lim_{x \to 1} (1-x)\, \ln(1-x) \;=\; \lim_{u \to 0} u\, \ln(u) \;=\; 0 \qquad \textit{(par croissances comparées)}$$

    D'où : $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = 1 + 0 = 1$.
  - $\times$ *d'autre part : $\varphi(1) = 1$.*

  On obtient bien : $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = \varphi(1)$.

$$\boxed{\textit{La fonction } \varphi \textit{ est donc continue sur }]-\infty, 1].}$$

* * *

2. a) Justifier que φ est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$ et calculer, pour tout $x \in\,]-\infty, 1[$, $\varphi'(x)$.

RÉPONSE:

- *La fonction φ est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$ en tant que somme et produit de fonctions de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$.*
- *Soit $x \in\,]-\infty, 1[$.*

$$\varphi'(x) \;=\; 1 + (-1) \times \ln(1-x) + (1-x) \times \left(-\frac{1}{1-x}\right) \;=\; \cancel{1} - \ln(1-x) - \cancel{1}$$

$$\boxed{\textit{Finalement : } \varphi' : x \mapsto -\ln(1-x).}$$

* * *

b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty, 1]$.

RÉPONSE:

- *Soit* $x \in\ ]-\infty, 1[$.

$$\begin{aligned} \varphi'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\ln(1-x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(1-x) < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - x < e^0 = 1 \qquad \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < x \end{aligned}$$

- *On obtient le tableau de variations suivant.*

x	$-\infty$		0		1
Signe de $\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Détaillons le calcul de $\varphi(0)$ *:*

$$\varphi(0) \;=\; 0 + (1-0)\ \ln(1-0) \;=\; \ln(1) \;=\; 0$$

* * *

c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?

RÉPONSE:

Soit $x \in\ ]-\infty, 1[$.

$$\begin{aligned} \tau_1(\varphi)(x) \;&=\; \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} \\ &=\; \frac{x + (1-x)\ \ln(1-x) - 1}{x-1} \\ &=\; \frac{x - 1 - (x-1)\ \ln(1-x)}{x-1} \\ &=\; \frac{\cancel{(x-1)}\ \big(1 - \ln(1-x)\big)}{\cancel{x-1}} \\ &=\; 1 - \ln(1-x) \end{aligned}$$

Or, avec le changement de variable $u = 1 - x$ *:*

$$\lim_{x\to 1} 1 - \ln(1-x) \;=\; \lim_{u \to 0} 1 - \ln(u) \;=\; +\infty$$

La fonction taux d'accroissement $\tau_1(\varphi)$ *n'admet donc pas de limite finie en* 1.

On en conclut que la fonction φ n'est pas dérivable en 1.

$* * *$

3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.

RÉPONSE:

Soit $x \in]-\infty, 0[$.

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x + (1-x)\ln(1-x)\\ &= x + \ln(1-x) - x\ln(1-x)\\ &= x\ln(1-x)\left(\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x} - 1\right) \quad \text{(la mise en facteur est licite car, comme } x<0 : x\ln(1-x) \neq 0\text{)}\end{aligned}$$

Or :

- *avec le changement de variable $u = 1-x$:* $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x) = \lim\limits_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty$.

  D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\ln(1-x)} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln(1-x) = -\infty$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$.

$* * *$

4. Etudier la convexité de φ.

RÉPONSE:

La fonction φ' est de classe C^1 sur $]-\infty;1[$ comme composée de fonction de classe C^1. Pour tout $x<1$:

$$\varphi''(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

La fonction φ est convexe sur $]-\infty;1[$.

$* * *$

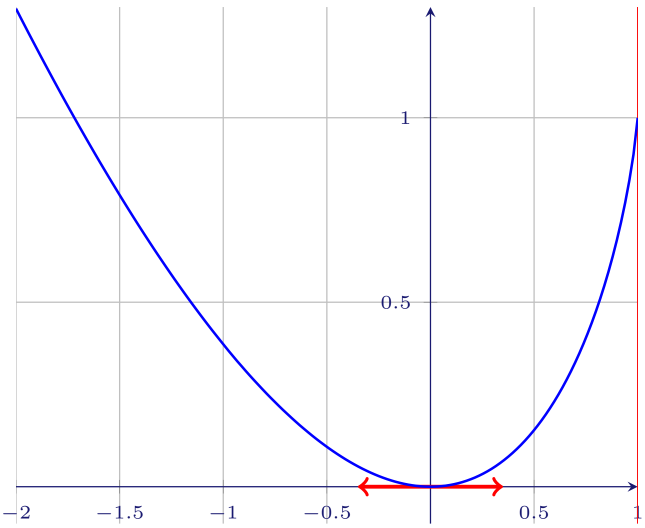
5. Donner l'équation de la tangente en 0 puis tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.

RÉPONSE:

La tangente en 0 a pour équation

$$y = \varphi'(0)(x-0) + \varphi(0) = 0$$

Il s'agit donc d'une tangente horizontale.



Commentaire

- *D'après la question **2.c)** :* $\lim\limits_{x \to 1} \tau_1(\varphi)(x) = +\infty$. *On en déduit que la droite d'équation* $x = 1$ *est tangente à la courbe représentative de* φ *en* 1.
- *Comme la fonction* φ *est seulement définie à gauche de* 1*, il s'agit même d'une demi-tangente en* 1.

$* * *$

6. a) Soit $a \in]0;1]$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I_a = \displaystyle\int_a^1 t\ \ln(t) \underset{\cdot}{t}$.

RÉPONSE:

- *Soit* $a \in \,]0,1]$.
  On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(t) & & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\[2ex] v'(t) & = & t & & v(t) & = & \dfrac{1}{2}\, t^2 \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u *et* v *sont de classe* C^1 *sur le segment* $[a,1]$.
On obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^1 t\ \ln(t)\ dt &= \left[\frac{1}{2}\, t^2\, \ln(t) \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{1}{t} \times \frac{1}{2}\, t^2\ dt \\ &= \frac{1}{2}\, \left(\cancel{1^2\, \ln(1)} - a^2\, \ln(a) \right) - \frac{1}{2} \int_a^1 t\ dt \\ &= -\frac{1}{2}\, a^2\, \ln(a) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}\, t^2 \right]_a^1 \\ &= -\frac{1}{2}\, a^2\, \ln(a) - \frac{1}{4}\, (1 - a^2) \end{aligned}$$

$* * *$

b) En déduire : $F_a = \displaystyle\int_0^{1-a} \varphi(x)dx$ et montrer que $\displaystyle\lim_{a\to 0} F_a = \frac{1}{4}$.

RÉPONSE:

- *On calcule :*

$$\int_0^{1-a} \varphi(t)\ dt = \int_0^{1-a} t + (1-t)\ \ln(1-t)\ dt = \int_0^{1-a} t\ dt + \int_0^{1-a} (1-t)\ \ln(1-t)\ dt$$

- *Tout d'abord :*

$$\int_0^{1-a} t\ dt = \left[\frac{1}{2}\ t^2\right]_0^{1-a} = \frac{1}{2}\ (1-a)^2$$

- *Pour calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{1-a} (1-t)\ \ln(1-t)\ dt$, *on effectue le changement de variable* $\boxed{u = 1-t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = 1-t \quad \textit{(et donc } t = 1-u\textit{)} \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \textit{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 1 \\ \bullet\ t = 1-a \ \Rightarrow\ u = a \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto 1-u$ *est de classe* C^1 *sur* $[0, 1-a]$.
On obtient alors :

$$\int_0^{1-a} (1-t)\ \ln(1-t)\ dt = \int_1^a u\ \ln(u)\ (-\ du) = \int_a^1 u\ \ln(u)\ du$$

- *On sait :*
  - × *d'une part, par croissances comparées :* $\displaystyle\lim_{A\to 0} A^2\ \ln(A) = 0$,
  - × *d'autre part :* $\displaystyle\lim_{A\to 0} A^2 = 0$.

$$\boxed{\textit{On en déduit que } \lim_{a\to 0} \int_a^1 t\ \ln(t)\ dt = -\frac{1}{4}.}$$

Comme $\displaystyle\lim_{a\to 0} \frac{1}{2}\ (1-a)^2 = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\textit{On en déduit : } \lim_{a\to 0} F_a = \frac{1}{4}.}$$

* * *

Partie B : Étude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0, 1[$.

6. a) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0, x]$: $\displaystyle\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [0, x]$. Comme $t \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

$$\boxed{\textit{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, x],\ \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}.}$$

* * *

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre l'égalité de la question précédente entre 0 et x. On obtient :

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$$

Étudions le membre de gauche. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt &= \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^x t^k\, dt \right) \\
&= \Big[-\ln(1-t) \Big]_0^x - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{k+1}\, t^{k+1} \right]_0^x \\
&= -\ln(1-x) + \cancel{\ln(1-0)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \left(x^{k+1} - 0^{k+1} \right) \\
&= -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \qquad \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\textit{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt.}$$

* * *

7. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \leqslant \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.

En déduire la limite de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Soit* $t \in [0, x]$.

$$\begin{array}{lccccccl} \textit{Alors} & 0 & \leqslant & t & \leqslant & x & & \\ \textit{donc} & 0 & \geqslant & -t & \geqslant & -x & & \\ \textit{d'où} & 1 & \geqslant & 1-t & \geqslant & 1-x & & \\ \textit{alors} & 1 & \leqslant & \dfrac{1}{1-t} & \leqslant & \dfrac{1}{1-x} & & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \textit{ainsi} & t^n & \leqslant & \dfrac{t^n}{1-t} & \leqslant & \dfrac{t^n}{1-x} & & \textit{(car } t^n \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\textit{Par transitivité : } \forall t \in [0,x],\ 0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}.}$$

- *Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant* ($0 \leqslant x$) *:*

$$0 \ \leqslant\ \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \ \leqslant\ \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\, dt$$

Or :

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-x}\, dt \ =\ \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n\, dt \ =\ \frac{1}{1-x} \left[\frac{1}{n+1}\, t^{n+1} \right]_0^x \ =\ \frac{1}{1-x}\, \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

On obtient :

$$0 \ \leqslant\ \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \ \leqslant\ \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,(1-x)}$$

- *De plus :*

$$\begin{array}{lccccl} & x & < & 1 & & \\ \textit{donc} & x^{n+1} & \leqslant & 1 & & \textit{(par croissance de } t \mapsto t^{n+1} \textit{ sur } \mathbb{R}_+ \textit{ (car } x \geqslant 0\textit{))} \\ \textit{d'où} & \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\,(1-x)} & \leqslant & \dfrac{1}{(n+1)\,(1-x)} & & \textit{(car } (n+1)\,(1-x) > 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\textit{On en conclut, par transitivité : } 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt \leqslant \frac{1}{(n+1)\,(1-x)}}$$

- *On remarque alors :*
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$,
  × $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{(n+1)\,(1-x)} = 0$.

$$\boxed{\textit{Par théorème d'encadrement : } \lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt = 0.}$$

∗ ∗ ∗

8. Montrer alors que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

RÉPONSE:

- *D'après la question **6.b)**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$$

Or, d'après la question précédente : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\, dt = 0$. *On en déduit que la suite* $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente et :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) + 0$$

- *Par ailleurs,* $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est la suite des sommes partielles de la série* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$.

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ *est convergente et :* $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

* * *

9. a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

RÉPONSE:

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{cl}
 & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} \\
\Longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{a\,(n+1) + b\,n}{n\,(n+1)} \\
\Longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 = a\,(n+1) + b\,n \\
\Longleftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 = a + (a+b)\,n \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} a & & & = & 1 \\ a & + & b & = & 0 \end{array}\right. \qquad \textit{(par identification)} \\
\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcr} a & = & 1 \\ b & = & -1 \end{array}\right.
\end{array}$$

Finalement, en choisissant $a = 1$ et $b = -1$, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

* * *

b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} = \varphi(x)$.

RÉPONSE:

- *Soit* $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} x^{n+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) && \textit{(d'après 9.a)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= x \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n}}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= x \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n}}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{x^{n}}{n} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= x \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n}}{n} - \left(\sum_{n=1}^{N+1} \frac{x^{n}}{n} - \frac{x^1}{1}\right) \\
&= x + x \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n}}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{x^{n}}{n}
\end{aligned}$$

- *Or, d'après la question **8.**, la série* $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ *est convergente.*

$$\boxed{\textit{On en déduit que la série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} \textit{ est convergente.}}$$

- *De plus, toujours d'après la question **8.** :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} = x + x \times \big(-\ln(1-x)\big) - \big(-\ln(1-x)\big)$$

$$\boxed{\textit{On obtient : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} = x + (1-x)\,\ln(1-x) = \varphi(x).}$$

* * *

10. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\,(n+1)} = \varphi(1)$.

RÉPONSE:

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) && \textit{(d'après 9.a))} \\
&= 1 - \frac{1}{N+1} && \textit{(par télescopage)} \\
&\underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\textit{On en déduit que la série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} \textit{ est convergente et : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1 = \varphi(1).}$$

* * *

Partie C : Application en probabilité

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

× si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;

× si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

11. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'évènement $[N = n]$ en fonction des évènements B_k et R_k.

RÉPONSE:

- *Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.*
  L'événement $[N = n]$ est réalisé si et seulement si lorsque l'expérience s'arrête, l'urne contient n boules, c'est-à-dire $n - 1$ boules bleues et 1 boules rouges. Autrement dit, $[N = n]$ est réalisé si et seulement si, lorsque l'expérience s'arrête on a ajouté $n - 1 - 1 = n - 2$ boules bleues dans l'urne, c'est-à-dire si et seulement si on a pioché $n - 2$ boules bleues puis la boule rouge. Ainsi :

$$[N = n] \;=\; B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}$$

* * *

b) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}\big(N = n\big) = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

RÉPONSE:

On en déduit par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\,[N = n]\,\big) \\
= \;& \mathbb{P}\big(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2} \cap R_{n-1}\big) \\
= \;& \mathbb{P}(B_1) \;\times\; \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \;\times\; \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \;\times\; \cdots \;\times\; \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-3}}(B_{n-2}) \;\times \\
= \;& \frac{1}{2} \;\times\; \frac{2}{3} \;\times\; \frac{3}{4} \;\times\; \cdots \;\times\; \frac{n-2}{n-1} \;\times
\end{aligned}$$

Précisons cette dernière égalité :

× $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{1}{2}$.

× $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}}(R_{n-1}) = \dfrac{1}{n}$ *car chaque boule a même probabilité d'être tirée.*

Plus précisément, si l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2}$ est réalisé, c'est que les $n - 2$ permiers tirages ont donné une boule bleue.

Dans ce cas, l'événement R_{n-1} est réalisé si et seulement si lors du $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage la boule rouge est tirée dans l'urne contenant n boules.

Finalement, en procédant à des simplifications successives, on obtient :

$$\mathbb{P}\big(\,[N = n]\,\big) \;=\; \frac{1}{(n-1)\,n}$$

$$\boxed{\textit{Finalement, pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \mathbb{P}\big([N = n]\big) \ = \ \frac{1}{n\,(n-1)}.}$$

* * *

c) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

RÉPONSE:

- *La v.a.r. N admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\,\mathbb{P}([N = n])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.*
- *Soit $N \geqslant 2$.*

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{N} n\,\mathbb{P}([N = n]) &= \sum_{n=2}^{N} \cancel{n}\,\frac{1}{\cancel{n}(n-1)} && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} && \textit{(par décalage d'indice)} \end{aligned}$$

- *Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 ($1 \not> 2$). Elle est donc divergente.*
  Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} n\,\mathbb{P}([N = n])$ est divergente.

$$\boxed{\textit{On en déduit que la v.a.r. } N \textit{ n'admet pas d'espérance.}}$$

* * *

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires X_1, …, X_n et N sont mutuellement indépendantes.
On note F la fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_n pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$.
On définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \dots, X_N)$, ce qui signifie :

$$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) \ = \ \max\big(X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)\big)$$

Ainsi par exemple, si N prend la valeur 3, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3)$; si N prend la valeur 5, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$; etc.

13. a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \mathbb{P}_{[N=n]}\big([T \leqslant x]\big) \ = \ \big(F(x)\big)^n$.

RÉPONSE:

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

- *Notons tout d'abord que la probabilité $\mathbb{P}_{[N=n]}([T \leqslant x])$ est bien définie car, d'après la question **11.a)** : $\mathbb{P}([N = n]) \neq 0$.*
- *Ensuite :*

$$\mathbb{P}_{[N=n]}([T \leqslant x]) \ = \ \frac{\mathbb{P}([N = n] \cap [T \leqslant x])}{\mathbb{P}([N = n])}$$

- *Déterminons alors* $\mathbb{P}([N=n]\cap[T\leqslant x])$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([N=n]\cap[T\leqslant x]) &= \mathbb{P}([N=n]\cap[\max(X_1,\dots,X_N)\leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}([N=n]\cap[\max(X_1,\dots,X_n)\leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}\left([N=n]\cap\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k\leqslant x]\right)\right) \\
&= \mathbb{P}([N=n])\times\left(\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}([X_k\leqslant x])\right) && \textit{(car les v.a.r. } X_1,\ \dots,\ X_n \textit{ et } N \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \mathbb{P}([N=n])\times\left(\prod_{k=1}^{n}F_{X_k}(x)\right) \\
&= \mathbb{P}([N=n])\times\big(F(x)\big)^n && \textit{(car les v.a.r. } X_1,\ \dots,\ X_n \textit{ ont même loi)}
\end{aligned}$$

- *On obtient alors :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[N=n]}([T\leqslant x]) &= \frac{\mathbb{P}([N=n]\cap[T\leqslant x])}{\mathbb{P}([N=n])} \\
&= \frac{\cancel{\mathbb{P}([N=n])}\times\big(F(x)\big)^n}{\cancel{\mathbb{P}([N=n])}} \\
&= \big(F(x)\big)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \mathbb{P}_{[N=n]}([T\leqslant x])=\big(F(x)\big)^n}$$

$* * *$

b) En déduire : $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([T\leqslant x]\big) \ = \ \varphi\big(F(x)\big)$.

RÉPONSE:

Soit $x\in\mathbb{R}$.
La famille $\big(\ [N=n]\ \big)_{n\geqslant 2}$ *forme un système complet d'événements.*
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T\leqslant x]) &= \sum_{n=2}^{+\infty}\mathbb{P}([N=n]\cap[T\leqslant x]) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\mathbb{P}([N=n])\times\big(F(x)\big)^n && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\,(n-1)}\ \big(F(x)\big)^n && \textit{(d'après } \textbf{\textit{11.a)}}\textit{)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big(F(x)\big)^{n+1}}{(n+1)\,n} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \varphi\big(F(x)\big) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.}} \textit{ et } \textbf{\textit{10.}}\textit{, car, comme } F \textit{ est une fonction de répartition : } F(x)\in[0,1]\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \mathbb{P}([T\leqslant x])=\varphi\big(F(x)\big)}$$

$* * *$