Épreuve n°2

E C G

CONCOURS BLANC N°1

Option Économique

MATHÉMATIQUES

6 Septembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amener à prendre.

Exercice n°1

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On considère les matrices A , B et P définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, on pose : $u = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = Ae_1 + e_1$.

1. (a) Calculer v.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
2. (a) Déterminer la matrice A' telle que $A = PA'P^{-1}$.
   (b) Justifier sans calcul que A' est inversible, puis que A est inversible. Donner l'expression de A^{-1} en fonction de A'^{-1}, P et P^{-1}.
3. (a) Montrer : $B^2 = 2B$.
   (b) Montrer que B n'est pas inversible.
   (c) Soit $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ BX = \lambda X\}$.
      i. Montrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par un vecteur u_1 que l'on précisera.
      ii. Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par deux vecteurs u_2 et u_3 que l'on précisera.

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

4. (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$.
   Montrer que M n'est pas inversible. *(On pourra raisonner par l'absurde).*

Exercice n°2 :

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un premier jeu

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :

Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1$^{\text{er}}$ pile par A (resp. par B) lors de la k-ième manche.

On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'évènement : « Il y a égalité à la fin de la k-ième manche ».

On note E l'évènement : « Il y a perpéuellement éalité ».

On note G (resp. H) l'évèement : « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'évènement : « A (resp. B) gagne le jeu à la n-ième manche ».

1. Etude de la première manche.
   (a) Justifier soigneusement la loi commune à X_1 et Y_1.
   (b) On note, J_A (resp. J_B) l'évènement "le joueur A (resp. B) n'obtient jamais Pile", et F l'évènement "la première manche ne finit jamais". Calculer $P(J_A)$ et en déduire $P(F)$.
   (c) Érire l'évènement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.
   (d) Montrer que $P(E_1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i)\, P(Y_1 = i)$ puis que $P(E_1) = \dfrac{p}{1+q}$.
   (e) Justifier sans aucun calcul que les évènements G_1 et H_1 sont équiprobables. En utilisant le système complet d'évènement (G_1, H_1, E_1), déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.
2. Calcul de la probabilité de l'évènement G.
   (a) Pour n entier naturel , justifier la relation suivante :
   $$G_n = E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{n-1} \cap [X_n \leq Y_n]$$
   (b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $P_{E_1 \cap ... E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :
   $$\forall n \geq 2, \;\; P(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}.$$
   (c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.
   (d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul, que : $P(G) = \dfrac{1}{2}$.
   (e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'évènement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, c'est à dire que $P(E) = 0$.

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. (a) À l'aide du système complet d'évènements $(X_1 = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, montrer que $P(Y_1 = X_1 + 1) = \dfrac{pq}{1+q}$.
   (b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

4. (a) Utiliser les évènements E_k pour décrire l'évènement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la n-ième manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $P(K_n)$.
5. Donner finalement la probabilité de l'évènement K : « A gagne ce pari ».

Partie 3 : Informatique

On rappelle que la commande `rd.geometric(p)` permet à Python de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Recopier et compléter le script Python suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné

```
p=float(input('Entrez une valeur pour p:'))
c=1
X=rd.geometric(p)
Y=rd.geometric(p)
while X==Y:
    X=...
    Y=...
    c=...

if X<Y :
        ...
else :
        ...

print(c)
```

7. Compléter le script précédent pour permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

Exercice n°3

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in\,]-\infty,1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A :Étude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty, 1]$.
2. (a) Justifier que φ est de classe $\mathbb{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et montrer que pour tout $x \in\,]-\infty, 1[$, $\varphi'(x) = -\ln(1-x)$.
   (b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty, 1]$.
   (c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?
3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.
4. Etudier la convexité de φ sur $]-\infty; 1[$.
5. Donner l'équation de la tangente en 0 puis tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.
6. (a) Soit $a \in]0;1]$. à l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I_a = \displaystyle\int_a^1 t\,\ln(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire : $F_a = \displaystyle\int_0^{1-a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ et montrer que $\displaystyle\lim_{a\to 0} F_a = \frac{1}{4}$.

Partie B : Étude de deux séies

Soit x un réel appartenant à $[0,1[$.

7. (a) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0,x]$: $\dfrac{1}{1-t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k \; = \; \dfrac{t^n}{1-t}$.

   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-\ln(1-x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k} \; = \; \int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

8. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $0 \; \leq \; \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \; \leq \; \dfrac{1}{(n+1)\,(1-x)}$.

   En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

9. Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} \; = \; -\ln(1-x)$.

10. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n\,(n+1)} \; = \; \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$.

    (b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} \; = \; \varphi(x)$.

11. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\,(n+1)} \; = \; \varphi(1)$.

Partie C : Application en probabilité

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont supposéas définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;
- si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expéience, R_k l'évènement "on obtient une boule rouge au k-ième tirage", et B_k l'évènement "on obtient une boule bleue au k-ième tirage".

12. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'évènement $[N = n]$ en fonction des évènements B_k et R_k.

    (b) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \mathrm{P}\left(N = n\right) = \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

    (c) La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

13. Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Python suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N.

```python
def simuleN():
        b = 1 #b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rand() < ... :
        b=b+1
    return(...)
```

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires X_1, …, X_n et N sont mutuellement indépendantes.
On note F la fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_n pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = P(X_1 \leq x) = P(X_2 \leq x) = ... = P(X_n \leq x)$$

On définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \dots, X_N)$.
Ainsi par exemple, si N prend la valeur 3, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3)$; si N prend la valeur 5, alors $T = \max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$; etc.

14. (a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\mathrm{P}_{[N=n]}\left(T \leq x\right) \ = \ \left(F(x)\right)^n$.

    (b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}\left(T \leq x\right) \ = \ \varphi\big(F(x)\big)$.