Devoir Libre n°1

Réponse le 19/09/24

Exercice

On définit les fonctions ch et sh par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Exprimer la dérivées des fonctions ch et sh en fonction de ch et sh. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) > 0$. Calculer $\mathrm{sh}(0)$ et déterminer le signe de $\mathrm{sh}(x)$.
2. Soit u_0 un réel fixé strictement supérieur à 1 . Déduire de la question précédente qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $\mathrm{ch}(\alpha) = u_0$.
3. On considère le programme Python suivant

```python
import numpy as np

u0=3/2

def ch(x):
        return((np.exp(x)+np.exp(-x))/2)

a=0
b=2
c=(a+b)/2
while b-a>10**(-3):
        if (ch(a)-u0)*(ch(c)-u0)<0:
                b=c
        else:
                a=c
        c=(a+b)/2
print(c)
```

   (a) Que fait ce programme ? Comment s'appelle ce type de programme ?

   (b) Pourquoi a-t-on pris $b = 2$?
   On considère la suite (u_n) de premier terme u_0 et définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}}.$$

4. (a) Vérifier que (u_n) est bien définie.

   (b) Étudier les variations de $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

   (c) Résoudre

$$\sqrt{\frac{1+x}{2}} = x, \quad \sqrt{\frac{1+x}{2}} > x$$

   (d) En déduire le sens de variations de (u_n).

   (e) Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 = \operatorname{ch}(x)$$

6. En déduire, par récurrence, que pour tout entier n

$$u_n = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

7. Montrer que

$$\operatorname{ch}(x) - 1 = 2\left(\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

8. Calculer $\operatorname{sh}'(0)$.
9. En déduire les équivalences suivantes

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

10. En déduire un équivalent de $(u_n - 1)$ quand n tend vers $+\infty$.

Problème - Oral HEC 2016

On suppose que toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

1. Pour tout réel x on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.
   (a) Soit un réel x fixé. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.
   (b) Pour tout réels x et y , établir l'équivalence $\lfloor y \rfloor \leqslant x \Leftrightarrow y < \lfloor x \rfloor + 1$.
   (c) Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.
   On note $N_n(\alpha, \beta)$ le nombre d'entiers k qui vérifient $\alpha < \dfrac{k}{n} \leqslant \beta$. Exprimer $N_n(\alpha, \beta)$ en fonction de $\lfloor n\alpha \rfloor$ et de$\lfloor n\beta \rfloor$
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note Y_n la variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall k \in [\![0,\, n-1]\!] \qquad \mathrm{P}\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

   Soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$. On définit Z_n par

$$Z_n = \frac{\lfloor nZ \rfloor}{n}$$

   Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\alpha < Y_n \leqslant \beta\right) = \beta - \alpha$.
   (b) Comparer les fonctions de répartition respectives de Y_n et Z_n. Conclusion