Sujet HEC

E C G

Sujet de la semaine

Option économique

MATHEMATIQUES

9 septembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Problème

Dans tout le problème, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

La partie II est indépendante de la partie I et la partie III est indépendante de la partie II.

Partie I. Analyse

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
   (b) La suite est-elle convergente ?
   Dans toute la suite du problème, a et b ($a > b$) désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante : $x^2 - x - 1 = 0$
2. (a) Montrer que : $b = 1 - a = -\dfrac{1}{a}$. Établir l'encadrement suivant $1 < a < 2$.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n - b^n\right)$
   (c) En déduire un équivalent de u lorsque n tend vers $+\infty$
3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n = u_{n+1} - au_n$. Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, β_n en fonction de n et b.
4. On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x\rfloor$ qui vérifie : $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$.
   (a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor au_{2n}\rfloor = u_{2n+1} - 1$
   (b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $\lfloor au_{2n-1}\rfloor$, en fonction de u_{2n}
5. Soit y un réel fixé vérifiant $|y| < 1$ et k un entier fixé de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^k y^n$ est absolument convergente.

(b) En deduire la convergence de la serie $\sum_{n \geq 1} n^k \frac{u_n}{2^{n+1}}$

(c) En utilisant la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, calculer$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$

Partie II. Algèbre et algorithmique

6. Soit A la matrice carrée d'ordre 4 definie par : $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) La matrice A est-elle inversible ? (*) A est-elle diagonalisable ?

   (b) Calculer A^2 et A^3 Vérifier que A^3 est une combinaison linéaire de A et A^2

   (c) (*) Déterminer les valeurs propres de A.

   (d) Établir l'existence de deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ On ait :

   $$A^n = a_n A + b_n A^2$$

   (e) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

7. On propose la fonction Python suivante :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def f(n):
        u=0
        v=1
        for k in range(n):
                temp=...
                v=...
                u=...
        return(...)
```

   Compléter cette fonction de façon que la valeur rendue soit u_n.

8. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On dit que n admet une Z-décomposition s'il existe un entier r de $\mathbb{N}^*$ tel que l'on puisse écrire $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$, où, pour tout i de $[[1, r]]$ k_i est un entier supérieur ou égal à 2 et où, pour tout i de $[[1, r-1]]$ (avec $r \geq 2$), on a : $k_{i+1} - k_i \geq 2$.

   (a) Montrer que les entiers 37 et 272 admettent une Z-décomposition.

   (b) Soit n un entier admettant une Z-décomposition de la forme $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$. Montrer, par récurrence sur r, que l'on a : $n < u_{k_r+1}$ En déduire l'unicité de r.

   (c) Montrer que, pour tout entier p supérieur ou égal à 2, tout entier n qui vérifie $1 \leq n \leq u_p$ admet une unique Z-décomposition (on pourra faire un raisonnement par récurrence sur p).

*

Partie III. Probabilités

On effectue dans une urne qui contient des boules numérotées 0 ou 1 une suite illimitée de tirages avec remise d'une boule. À chaque tirage, la probabilité de tirer une boule numérotée 1 est p $(0 < p < 1)$ et la probabilité de tirer une boule numérotée 0 est q, avec $q = 1 - p$, et on suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux boules numérotées 1 de suite, c'est-à-dire lors de deux tirages consécutifs. On définit, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, les événements S_i : "le i-ième tirage donne une boule numérotée 1 ", et $B_i = S_i \cap S_{i+1}$. Si au moins un des événements B_i se réalise au cours de l'expérience, on note Y la valeur de l'entier j correspondant au premier événement B_j réalisé. Sinon, c'est-à-dire si aucun des événements B_i ne se réalise, on attribue à Y la valeur 0. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.
Par exemple, si le résultat de l'expérience est : 0,1,0,0,0, 1,1,0,1,1,1,0, ., alors Y prend la valeur 6.

9. (a) Calculer, pour tout i de $\mathbb{N}^*$ la probabilité $P(B_i)$.
   (b) Déterminer $Y(\Omega)$. Calculer $P([Y=1]), P([Y=2])$ et $P([Y=3])$.
10. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note C_n, l'événement "lors des n premiers tirages. il n'apparait jamais deux fois de suite une boule numérotée 1 ". On pose : $C_0 = \Omega$.
    (a) Calculer $P(C_0)$, $P(C_1)$ et $P(C_2)$
    (b) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, la relation : $P([Y=n+2]) = p^2 q P(C_n)$
11. (a) En considérant les résultats possibles des deux premiers tirages, montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité : $P(C_n) = qP(C_{n-1}) + pqP(C_{n-2})$
    (b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ une relation entre $P([Y=n+2])$, $P([Y=n+1])$ et $P([Y=n])$
12. On suppose dans cette question que $p=q=1/2$.
    (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $P([Y=n]) = \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a été définie dans le préambule du problème.
    (b) Que vaut $P([Y=0])$?
    (c) On note $E(Y)$ l'espérance de Y. Montrer que $E(Y)=5$.
    (d) Calculer la variance $V(Y)$ de Y.
13. On revient au cas général : $O < p < 1$ et $q = 1-p$.
    (a) Montrer que l'équation du second degré $x^2 - qx - pq{=}0$ admet deux racines distinctes. On les note r et s. avec $r > s$.
    (b) Établir les inégalités suivantes . $-1 < s < O < r < 1$ et $r > |s|$.
    (c) On pose $\Delta = q + 4pq$. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $P([Y=n]) = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}(r^n - s^n)$
    (d) Calculer $P([Y=0])$.
    (e) Montrer que Y admet des moments de tous ordres et calculer l'espérance de Y.
14.
    (a) Montrer, pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{r}$, la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} P([Y=n])\, x^n$. On pose alors :

    $$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([Y=n])\, x^n.$$

    (b) Établir, pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{r}$, la formule suivante : $g(x) = \dfrac{p^2 x}{1 - qx - pqx^2}$.
15. On suppose dans cette question que $p = 2/3$.
    (a) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $I = \left]-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right[$
    (b) Montrer l'existence d'un unique réel α de $\left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$ tel que g soit concave sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2}, \alpha\right[$ et convexe sur l'intervalle $\left]\alpha, \dfrac{3}{2}\right[$
    (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de g sur I dans le plan rapporté à un repère orthonormé.