Chapitre 2

Comparaison de fonctions

I. Comparaison de fonctions

Dans la suite a est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, et toutes les fonctions étudiées sont définies au voisinage de a.

I. 1 Négligeabilité.

Définition 1.1

On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage de a si et seulement si il existe une application ε définie au voisinage de a telle que :

-
-

On note alors :

On peut aussi noter

Et on dit« f est une petit "o" de g » .

En pratique pour montrer qu'une application est négligeable au voisinage d'un point on utilisera le résultat suivant :

Théorème 1.2

Si f et g sont deux fonctions de I vers $\mathbb{R}$ telles que le quotient $\dfrac{f}{g}$ est défini au voisinage de a (sans être forcément défini en a).

$$\boxed{f \underset{a}{=} o\left(g\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

Exemple :

- $x \underset{+\infty}{=} o\left(x^2\right)$.
- $\ln x \underset{+\infty}{=} o\left(\sqrt{x}\right)$.
- $x^3 \underset{+\infty}{=} o\left(2^x\right)$.
- $x^6 \underset{0}{=} o\left(x\right)$.
- $\dfrac{x^3}{x-1} \underset{0}{=} o\left(x^2\right)$.
- $\dfrac{x^3}{x-1} \underset{\infty}{=} o\left(x^3\right)$.
- $x^2 + \ln x = x^2 + o\left(x^2\right)$ au voisinage de $+\infty$.
- $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ au voisinage de 0.

Attention:

- La négligeabilité en un point n'entraîne pas la négligeabilité ailleurs :

- Il faut **TOUJOURS** préciser le voisinage concerné.

Proposition 1.3 — Limites usuelles

Soient $0 < \alpha < \beta$ des paramètres fixés. Alors

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} =$ donc et
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} =$ donc et
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{e^{\beta x}} =$ donc et

Théorème 1.4 — Théorème des croissances comparées

Réécrire les limites classiques suivantes sous forme de o.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$.
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ donc
3. Pour $\alpha > 0$ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$ donc
4. Pour $\alpha > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ donc
5. Pour $\alpha > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ donc

Exercice 1

1. Comparer, au voisinage de $+\infty$, les quantités $f(x) = 4^x$, $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = \ln(x)^{1/4}$.
2. Comparer, au voisinage de 0, les quantités $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, et $\dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 2

Démontrer les propriétés suivantes

1. $f \underset{a}{=} o(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
2. Montrer que si $f \underset{a}{=} o(g)$ et que l'application α est un réel , alors $\alpha f \underset{a}{=} o(g)$.
3. La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\text{Si } f \underset{a}{=} o(g) \text{ et } h \underset{a}{=} o(k) \text{ alors } f + h \underset{a}{=} o(g + k).$$

Attention:

La relation de négligeabilité n'est pas compatible avec l'addition.

Proposition 1.5 — Propriétés de la relation de négligeabilité.

f, g, h et k étant des applications définies sur un intervalle I.

- **Multiplication par une constante** :
  Si $\beta \in \mathbb{R}^*$, et $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$, alors

- **Multiplication par une fonction** :
  Si $f(x) \underset{a}{=} o(h(x))$, alors

- **Multiplication par une fonction bis** :
  Si $f(x) \underset{a}{=} o(h(x))$, et $g(x) \underset{a}{=} o(k(x))$ alors

- **Transitivité** :
  Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors

- **Combinaison linéaire** :
  Soient $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(g)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors

- **Passage à l'inverse** :

  Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a, alors

Remarques :

R1 – D'après l'exercice précédent, dire que f admet une limite ℓ en a peut se réécrire

R2 – La multiplication par une constante permet d'ignorer les constantes dans un petit-$\circ$. *Par exemple, on n'écrira jamais $o(3x)$ ou $o(-x)$ mais $o(x)$.*

R3 – La multiplication par une fonction permet de faire rentrer les fonctions dans un petit-o ou bien de simplifier. Par exemple,

$$x.\, o(x^2) = \qquad\qquad \frac{o(x^2)}{x^2} =$$

R4 – ATTENTION !! Garder en tête que $o(...)$ est une notation, qui peut désigner des quantités différentes. Il n'est donc pas possible décrire $o(x) - o(x) = 0$. On écrira plutôt :

Exercice 3

On considère deux quantités $f(x)$ et $g(x)$ vérifiant, au voisinage de 0 :

$$f(x) = x^2 + o(x^2), \qquad\qquad g(x) = -x^2 + x^3 + o(x^3)$$

1. Que dire de $f(x) + g(x)$?
2. Ecrire, le plus simplement possible, $g(x) - 2xf(x)$ et $f(x/2) - g(x)$.

I. 2 Equivalence

Définition 1.6 — équivalence entre deux fonctions

On dit que f est *équivalente* à g au voisinage de a si et seulement si il existe une application $\varepsilon(x)$ définie au voisinage de a telle que :

-
-

On note alors : $\boxed{f \underset{a}{\sim} g}$ ou $\boxed{f \sim g \quad \text{au voisinage de } a}$.

Remarque :

Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \underset{a}{\sim} \ell \Leftrightarrow$.

En pratique, pour montrer que deux applications sont équivalentes au voisinage d'un point on utilisera une des deux définitions équivalentes suivantes

Théorème 1.7 — Caractérisation de la relation d'équivalence

- Si f et g sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que le quotient $\dfrac{f}{g}$ est défini au voisinage de a (sans être forcément défini en a).

$$f \underset{a}{\sim} g \quad \text{si et seulement si}$$

- $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si $f - g = \underset{a}{o}(g)$.

Exemple :

- $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$:
- $x^2 + \ln x \underset{+\infty}{\sim} x^2$:
- $x^2 + x \underset{0}{\sim} x$:
- $x^2 + \ln x \underset{0}{\sim} \ln x$:

Attention:

- Une fonction (non nulle) au voisinage de a n'est jamais équivalente à 0 au voisinage de a !
- Ecrire qu'une quantité est équivalente à 0 **N'A AUCUN SENS ! !**

Remarques :

R1 – Le deuxième point peut s'énoncer également :

Autrement dit, on peut négliger les termes négligeables dans un somme.

R2 – Si deux quantités sont équivalentes au voisinage de a, cela ne veut pas dire que leur différence tend vers 0 en a. Par exemple

$$e^x + \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x + x \qquad \text{en revanche} \qquad \ln(x) - x \text{ n'est pas équivalent à } 0$$

Exercice 4

Donner un équivalent de $\mathrm{e}^x - x^3 - \ln(x)$ en $+\infty$.

Proposition 1.8

- Tout polynôme est équivalent, en $\pm\infty$, à son monôme de plus haut degré.
- Tout polynôme est équivalent, en 0, à son monôme de plus bas degré.

Exemple :

- $3x^8 - 7x^6 + 2x^2 - 3x \underset{+\infty}{\sim}$
- $3x^8 - 7x^6 + 2x^2 - 3x \underset{0}{\sim}$

Retenir

Un équivalent permet de donner une limite, mais **SURTOUT** de préciser la vitesse de convergence vers cette limite.

Proposition 1.9 — Propriétés de la relation d'équivalence

f, g, h et k étant des applications définies sur un intervalle I, on a les résultats suivants.

- **Symétrie** :
- **Reflexivité** :
- **Transitivité** :
- **Multiplication.** :
- **Quotient** :
- **Puissance** :
- **Valeur absolue** :

Interdit:

Il est interdit de sommer des équivalents :

Attention:

On ne peut pas toujours **composer** les équivalents :

$$x + 1 \underset{+\infty}{\sim} \qquad \text{mais} \qquad \mathrm{e}^{x+1}$$

On a cependant le résultat suivant :

Proposition 1.10

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, et f, g, h trois fonctions telles que

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x), \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to b} h(x) = a$$

alors

Exercice 5

1. Déduire de la proposition précédente un équivalent en 1 de $\ln(x)$ et en $+\infty$ de $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.
2. Montrer que $t^{\frac{1}{t}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$

Proposition 1.11

Si $f \underset{a}{\sim} h$ et si $\lim\limits_{a} f = \ell$ (réel ou infinie) alors $\lim\limits_{a} h = \ell$.

Proposition 1.12

Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable en a, telle que $f'(a) \neq 0$. Alors

Ceci permet d'obtenir les équivalents suivants :

Proposition 1.13 — Equivalents usuels

- Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} =$, alors
- Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$, alors
- Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} =$, alors
- Pour $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1$

Exercice 6

Calculer, à l'aide d'équivalents usuels, la limite de $\frac{\ln(1+x)}{(e^x-1)^2}$ en 0^+.

Exercice 7

1. Déterminer un équivalent de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x}}{x^4+4x^2}$ en $+\infty$ puis en 0^+.
2. Déterminer un équivalent de $g(x) = \ln(x)(2x^2 + e^{-x})^2$ en $+\infty$.

II. Développements limités

II. 1 Définitions

Définition 2.1

- On dit que f **admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de** x_0 si :

  En particulier, f **admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de** 0 si :

- On dit que f **admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de** x_0 si :

  En particulier, f **admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de** 0 si :

Remarques :

R1 – Les égalités dans les développements limités ne sont valables que localement, au voisinage du point considéré.
R2 – Une fonction admettant un DL à l'ordre 1 est localement proche d'une fonction
R3 – Une fonction admettant un DL à l'ordre 2 est localement proche d'une fonction
R4 – On peut aussi écrire les DL en x_0 sous la forme :

R5 – On peut étendre la définition à celle d'un développement limité d'ordre n en x_0 :

Théorème 2.2

Si f admet un développement limité au voisinage de x_0, alors celui-ci est unique.

Exercice 8

1. Donner un $DL_1(0)$ de la fonction exp.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \circ_{x\to 0}(x^n)$.
3. Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{1-x}$. En déduire que la fonction ln admet un $DL_1(1)$.

II. 2 Formule de Taylor-Young

Théorème 2.3 — Formule de Taylor-Young

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0, donné par :

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre 2 en x_0, donné par :

Retenir

Le plus souvent, on utilise la formule de Taylor-Young dans le cas $x_0 = 0$, ce qui donne

Exercice 9

1. Donner les DL aux ordres 1 et 2 en 0 de la fonction exp.
2. Créer un programme Python qui permet d'obtenir les représentations graphiques de la fonction exp ainsi que des deux définies par $x \mapsto 1 + x$ et $x \mapsto 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, sur l'intervalle $[-1; 2]$.

Exercice 10

Déterminer un réel α non nul tel que : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, et y préciser son développement limité à l'ordre 2.

Proposition 2.4

- **Réduction d'ordre :** Si $f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$ au voisinage de 0, alors $f(x) = a + bx + o(x)$ au voisinage de 0.
- **D'un DL à un équivalent :** Si $f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$ au voisinage de 0, alors
  1. Si $a \neq 0$ alors $f(x) \underset{0}{\sim}$
  2. Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $f(x) \underset{0}{\sim}$
  3. Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$ alors $f(x) \underset{0}{\sim}$

II. 3 Développements limités usuels

Les développements limités suivants doivent être connus.

Théorème 2.5 — Au voisinage de 0

1. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
2. $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$
3. Si α est un réel non nul $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

Les développements limités suivants peuvent être retrouvés avec les formules précédentes mais il vaut mieux les connaître

Théorème 2.6 — Au voisinage de 0.

1. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$
2. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$
3. $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

Type Concours

Montrer que la fonction f ci-dessous est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Remarques :

R1 – Les développements limités sont de puissants outils pour déterminer des limites.

R2 – En particulier, les opérations d'additions et de composition, interdites pour les équivalents, sont possibles avec les développements limités.

R3 – Lorsque la recherche d'un équivalent ou un calcul de limite n'aboutit pas, il faut penser aux développements limités.

Exemple :

- $$\ln(1+x) - \ln(1-x) =$$
  $$=$$
- $$\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} =$$
  $$=$$
  $$=$$

Exercice 12

Déterminer les DL à l'ordre 2 en 0 de

1. $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$
2. $e^x \ln(1+x)$.
3. $\ln(1+\ln(1+x))$.

Exercice 13

1. Déterminer un équivalent,au voisinage de 0, de la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x$.
2. Déterminer la limite en 0 de la fonction $g(x) = \dfrac{e^x - xe^x - 1}{2x^2}$.

III. Applications des développements limités.

III. 1 Recherche de limites et d'équivalents.

Proposition 3.1 — CNS d'EXISTENCE DES $\mathrm{DL}_0(a)$ ET $\mathrm{DL}_1(a)$

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a.

1. f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ si, et seulement si, f est continue en a ; et le cas échéant :
2. Si f n'est pas définie en a, alors : f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ si, et seulement si, f admet une limite finie en a ; et le cas échéant
3. f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ si, et seulement si, f est dérivable en a ; et le cas échéant :

Remarque :

Il n'existe pas CNS simple d'existence du $\mathrm{DL}_2(a)$. Une condition suffisante est donnée par la formule de Taylor-Young.

Exercice 14

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-1}{x^2}$.
2. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0.

Proposition 3.2 — Lien entre DL et équivalent

Si une fonction admet un développement limité en x_0, alors elle est équivalente en x_0 au premier terme non nul de ce développement limité.

Exercice 15

Donner un équivalent simple de $\dfrac{e^x - 1}{x\ln(1+x) - x^2}$ en 0.

III. 2 Interprétation graphique : Position d'une courbe par rapport à une tangente

Une façon d'étudier la position d'une courbe avec sa tangente en a, au voisinage de a est :

- Déterminer si possible le $\mathrm{DL}_2(a)$ de f.
- Si $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^2\right)$, alors

  - l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est : $y = a_0 + a_1(x-a)$,
  - si $a_2 \neq 0$, alors : $f(x) - (a_0 + a_1(x-a)) \underset{x\to a}{\sim} a_2(x-a)^2$
  - et le signe de $f(x) - (a_0 + a_1(x-a))$ au voisinage de a est alors le signe de a_2.

Attention:

La position obtenue n'est valable que localement, au voisinage de a.

Exercice 16

On considère la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sqrt{1+x}$, définie sur $[-1;+\infty[$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
Calculer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f puis donner l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au points d'abscisse 0 et préciser la position relative de $\mathcal{C}$ f par rapport à cette tangente au voisinage de 0 .

Remarque :

Une méthode qui peut fonctionner également est bien sûr d'étudier le signe de $f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$.