Exercice 1 — Calculs de limites

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2+x+1}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x-3}{e^{-x}-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x-3}{e^{-x}-1}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{1}{(x-2)^2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{1}{(x-2)^2}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)+x}{e^{-x}}$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{x}{x-3}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{x}{x-3}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} x e^{x^3}$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+1}$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{x}+1}$
9. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+x^2+x}{x^2-3x+1}$
10. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>2}} \left(\ln\left(3x^2+1\right)-\ln(x+2)\right)$
11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^{-x}+1}$
12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-1/x^2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{-1/x^2}$

Exercice 2 — Calculs de limites

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln\left(3x^2+1\right)-\ln(x+2)\right)$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{3x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+7}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln\left(3x^2+1\right)-\ln\left(e^x+2\right)\right)$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+5}$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}e^{1/x}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x}e^{1/x}$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{1/x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{1/x}$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(x)-\ln(x+2))$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(e^x+1\right)-x$
11. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-e^x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-e^x}{x}$
12. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
13. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$
14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

Exercice 3 — Equivalent et négligeabilité

Trouver un équivalent avec la propriété $f(x)+o(f(x))\sim f(x)$.

1. $f(x)=\ln(1+x)$ en $+\infty$.
2. $g(x)=x^3+x\sqrt{x}+2$ en $+\infty$.
3. $h(x)=2x^3-x^2\sqrt{x}+2e^x-\ln(x)$ en $+\infty$.

Exercice 4 — Négligeabilité

Comparer les quantités $f(x)$ et $g(x)$ suivantes, au voisinage indiqué

1. En $+\infty$: $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\ln(x)$.
2. En $+\infty$: $f(x)=x^3$ et $g(x)=e^x$.
3. En $+\infty$: $f(x)=(\ln(x))^3$ et $g(x)=x^{1/4}$.
4. En 0 : $f(x)=ln(x)$ et $g(x)=x^{-3/2}$.
5. En $+\infty$: $f(x)=x^4-x^2+2$ et $g(x)=e^{x+1}$.
6. En $+\infty$: $f(x)=x^{3/2}$ et $g(x)=e^{x^2}$.
7. En $+\infty$: $f(x)=x$ et $g(x)=\ln(x^2+x)$.
8. En $+\infty$: $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{(\ln(t))^2}\,dt$ et $g(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}\,dt$.

Exercice 5 — Equivalents usuels

Trouver un équivalent le plus simple possible à l'aide d'opérations usuelles et des équivalents usuels.

1. $a(x)=x^3+4x^2-1$ en ∞ et en 0.
2. $b(x)=\dfrac{5x^2-x+3}{2x^4-x+1}$ en ∞ et en 0.
3. $c(x)=e^{\sqrt{x}}-1$ en 0.
4. $d(x)=\ln(x^2+x+1)$ en 0.
5. $e(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^3}}-1$ en $+\infty$.
6. $f(x)=\ln(1+2x)(e^{\sqrt{x}}-1)$ en 0.
7. $g(x)=\dfrac{e^{-x^2}-1}{x^2+x}$ en 0.
8. $h(x)=\dfrac{\ln(1+2x^2)}{\sqrt{1+3x^2}-1}$ en 0.
9. $i(x)=\ln(1+\dfrac{1}{x^2})$ en $+\infty$.
10. $\dfrac{1}{1+x^2+\sqrt{x}}$ en $+\infty$
11. $\dfrac{1}{1+x^2+\sqrt{x}}$ en 0^+
12. $x+\sqrt{x}+\ln x$ en de $+\infty$
13. $x+\sqrt{x}+\ln x$ en 0^+
14. $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+1+\ln x}$ en $+\infty$
15. $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+1+\ln x}$ en 0^+

Exercice 6 — Equivalent et encadrement

1. On admet que, pour tout réel $x\geqslant 4$, $\dfrac{x\ln(x)}{\sqrt{x}+1}\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{x+2}\ln(x+1)$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.
2. Donner un équivalent en $+\infty$ de la partie entière de x.

Exercice 7 — Prolongement par continuité

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x^2)}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)^2}{x-1}$ est vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_*^+$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ et vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $[-1\,;\,+\infty[$.
4. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 8 — Equivalents - DL - limites

En calculant un équivalent puis les limites suivantes

1. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ en $+\infty$
2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ en $+\infty$
3. $x\left(1 - \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)$ en $+\infty$
4. $\dfrac{x - \ln x}{x - \sqrt{x}}$ en $+\infty$ et en 0^+
5. $\dfrac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{x^2}$ en 0
6. $\ln(2e^x - 1)$ en 0
7. $\ln(1+x^2$ en $+\infty$.
8. $\ln(1+e^x)$ en $+\infty$

Exercice 9 — DL usuels

Trouver un DL en 0 a l'ordre 2 à l'aide des DL usuels et des opérations usuelles sur les DL (**Sans utiliser** la formule de Taylor Young).

1. $x \mapsto \ln(1+2x) - x$
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{e^x}$
3. $x \mapsto e^x \ln(1-x)$
4. $x \mapsto \ln(2+x)$
5. $x \mapsto \sqrt{3+x}$
6. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{(1+x)^2}$
7. $x \mapsto \exp\left(\sqrt{1+x}\right)$
8. $x \mapsto \sqrt{1+\ln(1+x)}$
9. $x \mapsto e^x - \dfrac{1}{1+x}$

Exercice 10 — DL usuels - Plus durs

Trouver un DL en 0 a l'ordre 2 à l'aide des DL usuels et des opérations usuelles sur les DL (**Sans utiliser** la formule de Taylor Young). **Sans utiliser** la formule de Taylor Young calculez les développements limités suivants, en 0 a l'ordre 2

1. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}}{1+e^x}$
2. $x \mapsto \ln(1+e^x)$
3. $\dfrac{1}{1+e^x} - \dfrac{1}{1+\ln(1+x)}$
4. $x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+xe^x}}$
5. $x \mapsto (1+e^x)^\alpha$ où α est une constante.
6. $x \mapsto \ln(1+e^{\sqrt{1+x)}}) - \exp(x)\ln(1+x)$

Exercice 11 — DL et Taylor-Young

Avec la formule de Taylor Young calculer les développements limités suivants, en 0 a l'ordre 2.

1. $x \mapsto e^{-2x}$
2. $x \mapsto \sqrt{3+x}$
3. $x \mapsto x\ln(2+x)$
4. $x \mapsto (1+x)^x$
5. $x \mapsto e^{x^2-1}$

Exercice 12 — Perte d'ordre

Essayez de calculer les DL des fonctions suivantes, à l'ordre 2 En 0. Que se passe t 'il ?

1. $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x} - e^x}$
3. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{xe^x}$

Exercice 13 — DL autre part qu'en 0

Calculer le développement limité des fonctions suivantes àl'ordre 2 au point indiqué

— $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ en 1

— $x \mapsto e^x$ en 1

— $x \mapsto \sqrt{1+x}$ en 1

— $x \mapsto \ln x$ en 2

— ** $x \mapsto \sqrt{1+e^x}$ en 2

— $e^{1-x} + 2\ln(x)$ en 1

Pour aller plus loin

Exercice 14

Soit $f : x \mapsto \ln\left(e^x - e^{-x}\right) - x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition puis calculer sa dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de f, limites comprises.
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\ln\left(x^2\right) - 2x, \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
4. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
5. Dresser le tableau de variations de f, limites comprises puis tracer une allure de sa courbe représentative.

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}}, \text{ si } x \neq 0 \\ 1, \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
4. Montrer que pour tout réel x, on a : $e^{-x} \geqslant 1 - x$.
5. Dresser le tableau de variations de f, limites comprises puis tracer une allure de sa courbe représentative.

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[\setminus\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

1. Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 puis en déduire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 0 .
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 .

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{2x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est continue en 0
3. **Sans utiliser la formule de Taylor-Young** calculer un développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0.
4. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer sa dérivée.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est continue en 0
3. Avec un développement limité, trouver un équivalent en 0 de $f(x) - f(0)$.
4. En déduire la limite en 0 de $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$
5. f est elle dérivable en 0 ?

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)x}{\ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

En utilisant les méthodes vues dans les deux exercices précédents, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 21

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}$$

1. Calculez un développement limité à l'ordre 2 en 0.
2. En déduire une équation de la tangente à la courbe en 0 sous la forme $ax+b$.
3. En utilisant la question 1 calculer un DL de $f(x)-(ax+b)$ en 0. La courbe est elle en dessous ou au dessus de la tangente ?

Exercice 22

On s'intéresse à la fonction définie par

$$f(x) = x\ln(1+\frac{1}{2x})$$

1. En utilisant le DL de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 trouver des constantes a b et c telles qu'au voisinage de $+\infty$
$$f(x) = a + bx + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
2. Trouver une asymptote à la courbe en $+\infty$.
3. Sans nouveau calcul peut on savoir si la courbe est au dessus ou en dessous de l'asymptote ?

Exercice 23

Refaire l'exercice en posant cette fois $f(x) = x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

Exercice 24

Refaire l'exercice en posant cette fois $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$

Exercice 25

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de 0.

1. On suppose qu'au voisinage de 0 on a $f \sim g$ Montrer alors que $|f| \sim |g|$.
2. On suppose qu'au voisinage de 0 on a $f = o(g)$, montrer que l'on a alors $|f| = o(|g|)$, $|f| = o(g)$ et $f = o(|g|)$
3. On suppose que f et g sont deux fonctions positives au voisnage de a et que $f \sim g$. Montrer que l'on a alors $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$.

Exercice 26

1. Montrer que l'on a $x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2+1$. A-t'on $\exp x^2 \underset{+\infty}{\sim} \exp(x^2+1)$?
2. Montrer qu'au voisinage de 0, $1+x \sim 1+x^2$ que se passe t il lorsque l'on compose avec ln ?

Exercice 27

On considère la fonction $\zeta : s \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.
2. Montrer que pour tout $s \in]1;+\infty[$, $\zeta(s) \geqslant 1$.
3. Étudier les variations de la fonction ζ sur $]1;+\infty[$.
4. 4.a. Démontrer : $\forall s \in]1;+\infty\Big[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{(n+1)^s} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leqslant \frac{1}{n^s}$.

   4.b. Établir alors : $\forall s \in]1;+\infty\Big[, \dfrac{1}{s-1} \leqslant \zeta(s) \leqslant 1 + \dfrac{1}{s-1}$.

   4.c. En déduire : $\zeta(s) \underset{s\to 1}{\sim} \dfrac{1}{s-1}$.
5. Déduire des questions précédentes la valeur de $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \zeta(s)$.