EXERCICE

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à. coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On rappelle qu'un élément A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est colinéaire I s'il existe un réel λ tel que $A = \lambda I$.
On définit les deux applications suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, notées d et t, par : pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le 2}$ de .$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $d(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ et $t(A) = a_{1,1} + a_{2,2}$.

1. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   a) On a $2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $d(2I) = 2\cdot 2 - 0\cdot 0 = 4$ alors que $d(I) = 1$
   Donc $d(2I) \neq 2d(I)$
   Conclusion : d n'est pas linéaire.

   b) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$
   On a alors $A\ B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} d(A)\,d(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} d(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\ &\quad - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ &= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} \\ &\quad - [a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}] \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \\ &= d(A)\,d(B) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{d(AB) = d(A)\,d(B) \text{ pour toutes matrices } A \text{ et } B}$

   c) Si A et B sont semblables, il existe P tel que $A = PBP^{-1}$
   Donc $d(A) = d(PBP^{-1}) = d(P)\,d(B)\,d(P^{-1}) = d(P)\,d(P^{-1})\,d(B) = d(PP^{-1}B) = d(B)$
   On peut aussi remarquer que $d(PP^{-1}) = d(P)\,d(P^{-1})$ d'une part et $d(PP^{-1}) = d(I) = 1$.
   Donc $d(P^{-1}) = d(P)^{-1}$ et $d(A) = d(PBP^{-1}) = d(P)\,d(B)\,d(P^{-1}) = d(B)$
   Conclusion : $\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont semblables, on a : } d(A) = d(B).}$

2. a) t est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
   Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ donc $\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} \\ \alpha a_{21} + \beta b_{21} & \alpha a_{22} + \beta b_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} t(\alpha A + \beta B) &= \alpha a_{11} + \beta b_{11} + \alpha a_{22} + \beta b_{22} \\ &= \alpha(a_{11} + a_{22}) + \beta(b_{11} + b_{22}) \\ &= \alpha t(A+)\,\beta t(B) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{t \text{ est une application linéaire de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathbb{R}}$.

On a $\text{Im}(t) \subset \mathbb{R}$ et elle n'est pas réduite à $\{0\}$ ($t(I) = 2$). $\text{Im}(t)$ étant un sous espace de $\mathbb{R}$ on a donc

Conclusion : $\boxed{\text{Im}(t) = \mathbb{R} \text{ et } \dim(\text{Im}(t)) = 1}$

le théorème du rang donne alors

Conclusion : $\boxed{\dim(\ker(t)) = 4 - 1 = 3}$

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \text{ et} \\ t(AB) &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \text{ et} \\ BA &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\ t(BA) &= a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont deux éléments de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ on a : } t(AB) = t(BA)}$

c) Donc si A et B sont semblables avec$A = PBP^{-1}$ on a $t(A) = t(PBP^{-1}) = t(PP^{-1}B) = t(B)$

Conclusion : $\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont semblables, on a : } t(A) = t(B).}$

3. Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I.

a) Comme A et I sont deux matrices non colinéaires, elles forment une famille libre et α et β sont uniques.

Reste à démontrer l'existence :

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{12}(a_{11} + a_{22}) \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$ et $\alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \beta + \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \beta + \alpha a_{22} \end{pmatrix}$

Donc $A^2 = \alpha A + \beta I \iff \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = \beta + \alpha a_{11} & a_{12}(a_{11} + a_{22}) = \alpha a_{12} \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) = \alpha a_{21} & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = \beta + \alpha a_{22} \end{pmatrix}$

ce qui est vrai si (condition suffisante) $\alpha = a_{11} + a_{22} = t(A)$ et

$$\begin{aligned} \beta &= a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - \alpha a_{11} = a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - a_{11}(a_{11} + a_{22}) \\ &= a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -d(A) \text{ et} \\ \beta &= a_{22}^2 + a_{12}a_{21} - \alpha a_{22} = -d(A) \end{aligned}$$

b) *Conclusion :* $\boxed{\alpha = t(A) \text{ et } \beta = -d(A) \text{ sont les seules solutions de } A^2 = \alpha A + \beta I.}$

4. Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaire à I. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice associée dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ On pose : $w = e_1 + e_2$.

a) Si les trois sont vecteurs propres, il existe alors trois réels tels que $u(e_1) = \alpha_1 e_1$, $u(e_2) = \alpha_2 e_2$ et $u(e_1 + e_2) = \alpha_3(e_1 + e_2)$

et par linéarité : $u(e_1 + e_2) = u(e_1) + u(e_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$.

Donc $\alpha_3(e_1 + e_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ et comme la famille (e_1, e_2) est libre alors $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_2$.

Et pour tout vecteur $v = xe_1 + ye_2$ on a $u(v) = \alpha_1 v$ donc $u = \alpha_1 \text{Id}$ et $A = \alpha I$

La contraposée est alors

Conclusion : $\boxed{\text{les trois vecteurs } e_1, e_2 \text{ et } w \text{ ne peuvent être simultanément vecteurs propres de } u.}$

b) $(x,u(x))$ n'est pas une base si les deux vecteurs mx et $u(x)$ sont liéés.

Donc si x est vecteur propre.

Or, un des trois vecteurs e_1, e_2 et w n'est pas vecteurs propre et donc pour un de ces trois vecteurs (non nul) .$(x,u(x))$ es tlibre donc base ($\dim \mathbb{R}^2 = 2$)

Conclusion : $\boxed{\text{il existe au moins un élément non nul } x \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ tel que la famille } (x,u(x)) \text{ soit une bas}}$

c) On a $u(x) = 0x + 1u(x)$ d'où ses coordonénes dans la base $(x,u(x))$

Et comme $A^2 = \alpha A + \beta I$. on a alors $u^2 = \alpha u + \beta \mathrm{Id}$ et $(u(x)) = \beta x + \alpha u(x)$ donc avec $a = \beta = -d(A)$ et $b = \alpha = t(A)$ (indépendants de x)

Conclusion : $\boxed{\text{la matrice de } u \text{ dans la base } (x,u(x)) \text{ est } \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}}$

d) A est donc semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}$

et ${}^tA$ n'est pas colinéaire à I non plus, ${}^tA$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -d({}^tA) \\ 1 & t({}^tA) \end{pmatrix}$

Enfin, comme $d(A) = d({}^tA)$ et $t(A) = t({}^tA)$ alors

Conclusion : $\boxed{A \text{ est semblable à sa transposée } {}^tA}$

5. Soit A un élément donné de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble défini par $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AB = BA\}$.

a) On vérifie les 3 critères :
- $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- avec 0 la atrice nulle, $A0 = 0A$ donc $0 \in \mathcal{C}(A)$
- Si B et $B' \in \mathcal{C}(A)$ et α et β réels, $A(\alpha B + \beta B') = \alpha AB + \beta AB' = \alpha BA + \beta B'A = (\alpha B + \beta B')A$
  Donc $\alpha B + \beta B' \in \mathcal{C}(A)$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

b) Si A est colinéaire avec I alors toute matrice commute avec A et $\mathcal{C}(A) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{C}(A)) = 4$

Si A n'est pas colinéaire avec I alors il existe P inversible telle que $A = P\begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}P^{-1}$

Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B' = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$AB = BA \iff \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} B' = B' \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}$$

avec $\begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c\,d(A) & -e\,d(A) \\ a + c\,t(A) & b + e\,t(A) \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b\,t(A) - a\,d(A) \\ e & e\,t(A) - c\,d(A) \end{pmatrix}$ donc

$$AB = BA \iff \begin{cases} b = -c\,d(A) & b\,t(A) - a\,d(A) = -e\,d(A) \\ e = a + c\,t(A) & e\,t(A) - c\,d(A) = b + e\,t(A) \end{cases}$$

$$\text{par substitution} \iff \begin{cases} b = -c\,d(A) & -c\,d(A)\,t(A) - a\,d(A) = -[a + c\,t(A)]\,d(A) \\ e = a + c\,t(A) & 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = -c\,d(A) \\ e = a + c\,t(A) \end{cases}$$

Donc $\mathcal{C}(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} a & -c\,d(A) \\ c & a + c\,t(A) \end{pmatrix} P^{-1} \ / \ a, c \in \mathbb{R} \right\}$ et en notant $M = P \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} P^{-1}$ on a

$\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I, M)$ famille qui est libre (si $\alpha I + \beta M = 0$ alors $P^{-1}(\alpha I + \beta M) P = 0$ et $\alpha I + \beta \begin{pmatrix} 0 & -d(A) \\ 1 & t(A) \end{pmatrix} = 0$ d'où $\alpha = \beta = 0$)

Conclusion : $\boxed{(I, M) \text{ est une base de } \mathcal{C}(A) \text{ et donc } \dim(\mathcal{C}(A)) = 2 \text{ si } A \text{ n'est pas colinéaire avec } I}$

Bilan : exercice calculatoire avec une idée pour les propriétés de la semblable. Autonomie indispensable à la dernière question.

PROBLÈME

Dans tout le problème, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
La partie II est indépendante de la partie I et la partie III est indépendante de la partie II.

Partie I. Analyse

1. a) Par récurernce, pour tout n : $u_n \in \mathbb{N}$
   c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$ alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \in \mathbb{N}$ (récurrence à 2 termes)
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n \in \mathbb{N}}$
   et pour tout $n \geq 0$: $u_{n+2} - u_{n+1} = u_n \geq 0$ (car $u_n \in \mathbb{N}$) donc a la suite est croissante à partir de l'indice 1, et comme $u_0 \leq u_1$
   Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite croissante d'entiers naturels.}}$

   b) Si elle est cinvergente vers une limite finie ℓ alors u_n, u_{n+1} et u_{n+2} ont cette même limite et comme $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ alors $\ell = \ell + \ell$ d'où $\ell = 0$.
   Mais comme la suite est croissante et que $u_1 = 1$, c'est impossible.
   Conclusion : $\boxed{\text{La suite n'est pas convergente}}$

Dans toute la suite du problème, a et b ($a > b$) désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante : $x^2 - x - 1 = 0$

2. a) Le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$ d'où $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
   Donc $1 - a = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = b$
   $ab = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1$ donc $b = -\frac{1}{a}$
   Enfin, $1 < 5 < 9$ donc $1 < \sqrt{5} < 3$ donc $1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$
   Conclusion : $\boxed{b = 1 - a = -\frac{1}{a} \text{ et } 1 < a < 2.}$

   b) La suite u est récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants d'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ ayant pour racines a et b.
   Et il existe donc A et B réels tels que, pour tout n : $u_n = Aa^n + Bb^n$ avec $\left\{ \begin{array}{c} u_0 = 0 = A + B \\ u_1 = 1 = aA + bB \end{array} \right. \iff$
   $\left\{ \begin{array}{c} B = -A \\ u_1 = 1 = (a - b) A \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ A = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right.$ car $a - b = \sqrt{5}$
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on a : } u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)}$

c) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n-b^n\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}a^n\left(1-(b/a)^n\right)$ et comme $\frac{b}{a}=-\frac{1}{a^2}$ et $\frac{1}{a^2}<1$ alors $\left|\frac{b}{a}\right|<1$ et

Conclusion : $\boxed{u_n\sim\frac{1}{\sqrt{5}}a^n \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$

3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\beta_n=u_{n+1}-au_n$.

$$\begin{aligned}\beta_n&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^{n+1}-b^{n+1}\right)u_{n+1}-a\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n-b^n\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-b+a\right)b^n \text{ avec } a-b=\sqrt{5}\\&=b^n\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\beta_n=b^n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}}$

4. On rappelle que pour tout réel x, la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x\rfloor$ qui vérifie : $\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$.

a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante : $\lfloor au_{2n}\rfloor=u_{2n+1}-1$
Puisque $u_{2n+1}-1$ et unentier, il suffit pour cela de montrer que $u_{2n+1}-1\leq au_{2n}<u_{2n+1}$:

$$\begin{aligned}u_{2n+1}-au_{2n}&=\beta_{2n}=b^{2n}>0 \text{ et}\\u_{2n+1}-au_{2n}-1&=\beta_{2n}-1\\&=b^{2n}-1\leq 0\end{aligned}$$

car $b=1-a\in\left]-1,0\right[$ du fait que $1<a<2$ et donc $b^n\leq 1$
Donc $u_{2n+1}-1\leq au_{2n}<u_{2n+1}$ et
Conclusion : $\boxed{\lfloor au_{2n}\rfloor=u_{2n+1}-1}$

b) En reprenant les calculs précédents, on a cette fois :

$$\begin{aligned}u_{2n}-au_{2n-1}&=\beta_{2n-1}=b^{2n-1}\leq 0 \text{ et}\\u_{2n}-au_{2n-1}+1&=\beta_{2n-1}+1\\&=b^{2n-1}+1>0\end{aligned}$$

donc $u_{2n}\leq au_{2n-1}<u_{2n}+1$
Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* : \lfloor au_{2n-1}\rfloor=u_{2n}}$

5. Soit y un réel fixé vérifiant $|y|<1$ et k un entier fixé de $\mathbb{N}$.

a) On a : $n^k|y|^n=n^{-2}n^{k+2}|y|^n$ et comme $|y|^n=o\left(n^{-(k+2)}\right)$ car $|y|<1$ alors $n^{k+2}|y|^n=|y|^n/n^{-(k+2)}\to 0$ et $n^k|y|^n=o\left(n^{-2}\right)$
Or la série $\sum_{n\geq 1}n^{-2}$ (de Riemann) est convergente, donc par majoration de termes positif la série $\sum\limits_{n\geq 1}\left|n^ky^n\right|$ converge et
Conclusion : $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geq 1}n^ky^n \text{ est absolument convergente.}}$

b) on a montré que $u_n\sim\dfrac{1}{\sqrt{5}}a^n$ donc $n^k\dfrac{u_n}{2^{n+1}}\sim\dfrac{1}{2\sqrt{5}}n^k\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$
Or la série $\sum\limits_{n\geq 1}n^k\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$ est convergente car $\left|\dfrac{a}{2}\right|<1$ (du fait que $1<a<2$) et par équivalence de termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 1}\left|n^k\dfrac{u_n}{2^{n+1}}\right|$ est convergente

Conclusion : $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} n^k \frac{u_n}{2^{n+1}} \text{ est absolument convergente donc convergente}}$

c) La série étant convergente,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{n+2}-u_{n+1}}{2^{n+1}} \text{ puisqu'il faut l'utiliser} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{n+2}}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} \text{ car chacune converge} \\
&= \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{u_m}{2^{m-1}} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_m}{2^m} \text{ et on fait réapparaitre la première} \\
&= 4\sum_{m=3}^{+\infty} \frac{u_m}{2^{m+1}} - 2\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{u_m}{2^{m+1}} \\
&= 4\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_m}{2^{m+1}} - \frac{u_1}{4} - \frac{u_2}{8}\right) - 2\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_m}{2^{m+1}} - \frac{u_1}{4}\right) \\
&= 2\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_m}{2^{m+1}} - 1 \text{ car } u_0 = 0 \text{ et } u_1 = u_2 = 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} = 1}$

Bilan : des calculs qui demandent à être bien menés.

Partie II. Algèbre et algorithmique

1. Soit A la matrice carrée d'ordre 4 definie par : $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

a) Les deux colonnes du millieu sont égales, donc les colonnes sont liées. Mais A est symétrique
Conclusion : $\boxed{A \text{ n'est pas inversible mais elle est diagonalisable}}$

b) $A^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

et $A^3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Conclusion : $\boxed{\text{on constate que } A^3 = A^2 + A \text{ combinaison linéaire}}$

c) Si α est vlaeur propre de A alors $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha$ donc $\alpha\left(\alpha^2 - \alpha - 1\right) = 0$
$\alpha^2 - \alpha - 1$ a pour discriminnant $\Delta = 1 + 4 = 5$ et pour racines $\frac{-1+\sqrt{5}}{-2} = b$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{-2} = a$.
Donc les seules valeurs propres possibles sont 0, b et a.
A étant non inversible, 0 est bien valeur propre.

Courage et méthode. résoudre avec les écritures en racine va être monstrueux. On reste formel.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}(A-\alpha I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lr} \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}t=0 & L_1-2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)L_2 \\ \frac{1}{2}x-\alpha y+\frac{1}{2}t=0 & L_2 \\ \frac{1}{2}x-\alpha z+\frac{1}{2}t=0 & L_3-L_2 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)t=0 & L_4-L_2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lr} \left[\frac{1}{2}+2\alpha\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\right]y+\frac{1}{2}z+\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\right]t=0 & L_1-2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)L_2 \\ \frac{1}{2}x-\alpha y+\frac{1}{2}t=0 & L_2 \\ \alpha y-\alpha z=0 & L_3-L_2 \\ \left(\frac{1}{2}+\alpha\right)y+\frac{1}{2}z-\alpha t=0 & L_4-L_2 \end{array}\right. \quad \text{et pour } \alpha\neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lr} \left[1+\alpha-2\alpha^2\right]z+\alpha t=0 & L_1+L_4 \\ \frac{1}{2}x-\alpha z+\frac{1}{2}t=0 & L_2 \\ y=z & \\ (1+\alpha)z-\alpha t=0 & \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lr} \left[2+2\alpha-2\alpha^2\right]z=0 & L_1-L_4 \\ \frac{1}{2}x-\alpha z+\frac{1}{2}t=0 & L_2 \\ y=z & \\ (1+\alpha)z-\alpha t=0 & \end{array}\right.$$

Avec $2+2\alpha-2\alpha^2$ qui a pour racines a et b.

Conclusion : $\boxed{0, a \text{ et } b \text{.sont les valeurs propres de } A}$

d) Par récurence :

$A^1 = 1A + 0A^2 n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il existe a_n et b_n avec $A^n = a_nA + b_nA^2$ alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A\left(a_nA + b_nA^2\right) \\ &= a_nA^2 + b_nA^3 \\ &= a_nA^2 + b_n\left(A^2 + A\right) \\ &= b_nA + (a_n + b_n)A^2 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{il existe } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ avec, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : A^n = a_nA + b_nA^2}$

e) On a de plus $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ donc $a_{n+2} = b_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = b_{n+1} + b_n$

Conclusion : $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2 que } u_n.}$

2. Pour calculer u_{n+2} on a besoin de $u_n \to u$ et de $u_{n+1} \to v$

Quand on passe de n à $n+1$ on a les substitutions : $u_n \to u_{n+1}$ et $u_{n+1} \to u_{n+2}$

Il faut donc mettre de coté la valeur de $v = u_{n+1}$ avant de l'écraser par u_{n+2}.

La valeur de k est l'indice du terme contenu dans u (pour $k = 1$, on calcule u_2)

Donc pour $k = n-1$, le terme u_n sera contenu dans v.

```
Function f(n : integer) integer ;
var temp,u,v,k : integer ;
Begin
    u := 0 ; v :=1 ;
    for k :=1 to n-1 do
    Begin
        temp :=v ; v :=u+v ; u :=temp ;
    end ;
f :=v ;
end ;
```

3. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On dit que n admet une Z-décomposition s'il existe un entier r de $\mathbb{N}^*$ tel que l'on puisse écrire $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$, où, pour tout i de $[[1, r]]$ k_i est un entier supérieur ou égal à 2 et où, pour tout i de $[[1, r-1]]$ (avec $r \geq 2$), on a : $k_{i+1} - k_i \geq 2$.

   a) On liste les premières valeurs de u_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
u_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

   En partant du plus gros et en comblant les trous :

   On a $37 - 34 = 3$ donc $37 = u_4 + u_9$ avec $9 - 5 \geq 2$

   et $272 - 233 = 39$

   $39 - 34 = 5$

   Donc $272 = u_5 + u_9 + u_{13}$ avec $9 - 5 \geq 2$ et $13 - 9 \geq 2$

   Conclusion : $\boxed{\text{37 et 272 admettent bien une } Z\text{-décomposition.}}$

b) et c) Soit n un entier admettant une Z-décomposition de la forme $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$.

   Pour $r = 1$ on a $n = u_{k_1}$ donc $n < u_{k_1+1}$

   Soit $r \geq 1$ tel que si n admet une $Z-$décomposition à r temres alors $n < u_{k_r+1}$

   alors si n admet une $Z-$décomposition à $r+1$ termes $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r} + u_{k_{r+1}}$ on se ramène à une décompostion à r termes :

   $n - u_{k_{r+1}} = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r}$ admet une Z-décomposition à r termes donc $n - u_{k_{r+1}} < u_{k_r+1}$ et $n < u_{k_{r+1}} + u_{k_r+1}$

   et comme $k_{r+1} \geq k_r + 2$ donc $k_r + 1 \leq k_{r+1} - 1$

   la suite u étant croissante $u_{k_r+1} \leq u_{k_{r+1}-1}$ donc $n < u_{k_{r+1}} + u_{k_{r+1}-1} = u_{k_{r+1}+1}$ (d'après la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour l'entier $n = k_{r+1} - 1 \geq 0$ car $k_{r+1} \geq k_1 + 2$)

   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } r \geq 1 \text{ si } n \text{ a une } Z\text{-décompostion à } r \text{ termes alors } n < u_{k_r+1}}$

   D'autre part, on a $n = u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_r} \geq u_{k_r}$

   Conclusion : $\boxed{k_r \text{ est donc le plus grand entier } j \text{ pour lequel } u_j \leq n \text{ et } k_r \text{ est donc unique}}$

   Le dernier terme de la décomposition étant unique, par une récurrence décroissante (avec $n - u_{k_r}$) tous les termes de décomposition sont uniques et leur nombre donc également.

   Conclusion : $\boxed{r \text{ est unique et (c) tout entier } n \text{ admet une unique } Z\text{-décomposition}}$

4. On suppose que l'on a défini en Pascal une constante p et un type tab par les instructions suivantes :

   `const p=20 ; type tab=array[2..p] of integer`

   On suppose également que l'on a défini une variable `u` de type `tab` telle que, pour tout k de [[2,p]] la variable u[k] contient la valeur u_k. On se donne un entier n vérifiant : $1 \leq n \leq u_p$

   Rédiger la procédure d'en-tête : procedure Z (n integer ; var Res : tab) de façon que :

$$\text{Res[k]} = \begin{cases} u_{k_1} \text{ si } k = k_1 \\ u_{k_2} \text{ si } k = k_2 \\ \quad\vdots \\ u_{k_r} \text{ si } k = k_r \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   Tant que l'on peut, on retire les u_k de n , du plus gros possible au plus petit.

```
procedure Z (n integer ; var Res : tab) ;
var i :integer ;
begin
    j :=p ;
```

```
    repeat
        if u[i]>n then res[i] :=0
        else
        begin
            res[i] :=u[i] ;n :=n-u[i] ;
        end ;
        i :=i-1 ;
    until i=1 ;
end ;
```

A la fin de cette procédure il pourra rester 0 ou 1 dans `n`, et il faudrait complèter la $Z-$décomposition

Partie III. Probabilités

On effectue dans une urne qui contient des boules numérotées 0 ou 1 une suite illimitée de tirages avec remise d'une boule. À chaque tirage, la probabilité de tirer une boule numérotée 1 est p $(0 < p < 1)$ et la probabilité de tirer une boule numérotée 0 est q, avec $q = 1 - p$, et on suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.
On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. On s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux boules numérotées 1 de suite, c'est-à-dire lors de deux tirages consécutifs. On définit, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, les événements S_i : "le i-ième tirage donne une boule numérotée 1 ", et $B_i = S_i \cap S_{i+1}$.
Si au moins un des événements B_i se réalise au cours de l'expérience, on note Y la valeur de l'entier j correspondant au premier événement B_j réalisé. Sinon, c'est-à-dire si aucun des événements B_i ne se réalise, on attribue à Y la valeur 0. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.
Par exemple, si le résultat de l'expérience est : 0,1,0,0,0, 1,1,0,1,1,1,0, ., alors Y prend la valeur 6.

1. a) $B_i = S_i \cap S_{i+1}$ indépendants donc $\mathrm{P}(B_i) = \mathrm{P}(S_i)\,\mathrm{P}(S_{i+1}) = p^2$
   b) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ (la valeur 0 jouant un rôle particulier)
   en listant les possibles :
   $(Y = 1) = B_1$ et $\mathrm{P}(Y = 1) = p^2$
   $(Y = 2) = \overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3$ et $\mathrm{P}(Y = 2) = qp^2$ par indépendance
   $(Y = 3) = \left(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3 \cap S_4\right) \cup \left(S_1 \cap \overline{S_2} \cap S_3 \cap S_4\right)$ incompatible donc $\mathrm{P}(Y = 3) = (q^2 + qp)\,p^2 = qp^2$ car $p + q = 1$
2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note C_n, l'événement "lors des n premiers tirages il n'apparait jamais deux fois de suite une boule numérotée 1 ". On pose : $C_0 = \Omega$.

   a) En listant les possibles :
   $\mathrm{P}(C_0) = 1$
   $C_1 = S_1 \cup \overline{S_1} = \Omega$ et $\mathrm{P}(C_1) = 1$
   $C_2 = \left(\overline{S_1} \cap \overline{S_2}\right) \cup \left(\overline{S_1} \cap S_2\right) \cup \left(S_1 \cap \overline{S_2}\right)$ et $P(C_2) = q^2 + 2pq = 1 - p^2$
   b) $[Y = n + 2]$ signifie qu'on a pour la prmière fois deux boules 1 en $n + 2$ et $n + 3$ donc
   – que l'on a deux boules 1 en $n + 2$ et en $n + 3$
   – qu'en n c'est une boule 0 (sinon on a S_{n+1} et S_{n+2})
   – qu'avant il n'y a pas eu de double boules 1
   Donc $[Y = n + 2] = C_n \cap \overline{S_{n+1}} \cap S_{n+2} \cap S_{n+3}$, indépendants donc
   Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}([Y = n + 2]) = p^2 q \mathrm{P}(C_n) \text{ pour } n \geq 1 \text{ et pour } n = 0}$
3. a) Pour que C_n soit réalisé :

– soit il y a $\overline{S_1}$ et il faut et suffit alors de ne pas avoir de double 1 dans les $n-1$ tirages suivants. (même probabiltié que C_{n-1})
– soit il y a S_1 et il ne faut S_2 puis acun double 1 dans les $n-2$ tirages restant (même probabiltié que C_{n-2})

$\left(S_1, \overline{S_1}\right)$ étant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(C_n\right) &= \mathrm{P}_{S_1}\left(C_n\right)\mathrm{P}\left(S_1\right) + \mathrm{P}_{\overline{S_1}}\left(C_n\right)\mathrm{P}\left(\overline{S_1}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(C_{n-2}\right)\mathrm{P}\left(S_2\right)\mathrm{P}\left(S_1\right) + \mathrm{P}\left(C_n\right)\mathrm{P}\left(\overline{S_1}\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}\left(C_n\right) = q\mathrm{P}\left(C_{n-1}\right) + pq\mathrm{P}\left(C_{n-2}\right)\text{pour tout } n \geq 2}$

b) et comme $\mathrm{P}\left([Y=n+2]\right) = p^2 q\mathrm{P}\left(C_n\right)$ pour tout $n \geq 0$, on substitue pour écrire $P\left([Y=n+1]\right) = p^2 q\mathrm{P}\left(C_{n-1}\right)$ et $P\left([Y=n]\right) = p^2 q\mathrm{P}\left(C_{n-2}\right)$ pour $n \geq 2$

On avait $\mathrm{P}\left(C_n\right) = qP\left(C_{n-1}\right) + pqP\left(C_{n-2}\right)$pour tout $n \geq 2$ donc (en divisant par $p^2 q \neq 0$)

$$\mathrm{P}\left(Y=n+2\right) = q\mathrm{P}\left(Y=n+1\right) + pq\mathrm{P}\left(Y=n\right) \text{ pour } n \geq 2$$

Et on teste la relation pour $n=1$.

$\mathrm{P}\left(Y=1\right) = p^2$, $\mathrm{P}\left(Y=2\right) = qp^2$; $\mathrm{P}\left(Y=3\right) = \left(q^2+qp\right)p^2 = qp^2$

donc

$$\begin{aligned} q\mathrm{P}\left(Y=2\right) + pq\mathrm{P}\left(Y=1\right) &= qqp^2 + pqp^2 \\ &= qp^2\left(q+p\right) \\ &= \mathrm{P}\left(Y=3\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \mathrm{P}\left(Y=n+2\right) = q\mathrm{P}\left(Y=n+1\right) + pq\mathrm{P}\left(Y=n\right)}$

4. On suppose dans cette question que $p = q = 1/2$.

a) On peut faire une récurrence à deux termes ou éviter la récurrence en vérifiant sur $\dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ les conditions initiales et la relation de récurrence caracérisant $\left(\mathrm{P}\left(Y=n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$\dfrac{u_1}{2^2} = \dfrac{1}{4} = p^2 = \mathrm{P}\left(Y=1\right)$; $\dfrac{u_2}{2^3} = \dfrac{1}{8} = qp^2 = \mathrm{P}\left(Y=2\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} q\frac{u_{n+1}}{2^{n+2}} + pq\frac{u_n}{2^{n+1}} &= \frac{u_{n+1}}{2^{n+3}} + \frac{u_n}{2^{n+3}} \\ &= \frac{1}{2^{n+3}}\left(u_{n+1} + u_n\right) \\ &= \frac{u_{n+2}}{2^{n+3}} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*\text{, on a : } P\left([Y=n]\right) = \dfrac{u_n}{2^{n+1}}}$

b) $\left(Y=n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événement donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}\left(Y=n\right) = 1$ et $\mathrm{P}\left(Y=0\right) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}\left(Y=n\right) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{2^{n+1}}$

Et on a vu au I 5 c) que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{2^{n+1}} = 1$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}\left(Y=0\right) = 0}$

c) On note $E(Y)$ l'espérance de Y.
Si la série est abosument convergente, $E\left(Y\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}n\mathrm{P}\left(Y=n\right)$ ce qui équivaut à sa simple convergence.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}n\mathrm{P}\left(Y=n\right)&=0+\sum_{n=1}^{N}n\frac{u_n}{2^{n+1}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{N}n\left(\left(\frac{a}{2}\right)^n-\left(\frac{b}{2}\right)^n\right)\\&\to\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{a/2}{\left(1-a/2\right)^2}-\frac{b/2}{\left(1-b/2\right)^2}\right]\text{ car }\left|\frac{a}{2}\right|<1\text{ et }\left|\frac{b}{2}\right|<1\end{aligned}$$

Donc la série est abolsument convergente, Y a une espérance et ($b=1-a=-\dfrac{1}{a}$)

$$\begin{aligned}\sqrt{5}E\left(Y\right)&=\frac{a}{\left(2-a\right)^2}-\frac{b}{\left(2-b\right)^2}\\&=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\left(2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}-\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\left(2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}\\&=2\frac{1+\sqrt{5}}{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}-2\frac{1-\sqrt{5}}{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}\\&=2\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(14+6\sqrt{5}\right)-\left(1-\sqrt{5}\right)\left(14-6\sqrt{5}\right)}{\left(9-5\right)^2}\\&=2\frac{44+20\sqrt{5}-\left[44-20\sqrt{5}\right]}{4^2}\\&=2\frac{40\sqrt{5}}{4^2}=5\sqrt{5}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Y\text{ a une espérance et }E(Y)=5}$

d) On calcule l'espéarnce de Y^2 :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}n^2\mathrm{P}\left(Y=n\right)&=\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{N}n^2\left(\left(\frac{a}{2}\right)^n-\left(\frac{b}{2}\right)^n\right)\\&\to\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{a/2\left(1+a/2\right)}{\left(1-a/2\right)^3}-\frac{b/2\left(1+b/2\right)}{\left(1-b/2\right)^3}\right]\end{aligned}$$

Donc Y^2 a une espérance et

$$\begin{aligned}\sqrt{5}E\left(Y^2\right)&=\frac{a\left(2+a\right)}{\left(2-a\right)^3}-\frac{b\left(2+b\right)}{\left(2-b\right)^3}\\&=2\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right)^3}-2\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)^3}\end{aligned}$$

avec $\left(3-\sqrt{5}\right)^3 = 72-32\sqrt{5} = 8\left(9-4\sqrt{5}\right)$ et $\left(3+\sqrt{5}\right)^3 = 8\left(9+4\sqrt{5}\right)$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{5}}{2}E\left(Y^2\right) &= \frac{\left(10+6\sqrt{5}\right)8\left(9+4\sqrt{5}\right)-\left(10-6\sqrt{5}\right)8\left(9-4\sqrt{5}\right)}{4^3} \\
&= 8\cdot 2\frac{\left(5+3\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)-\left(5-3\sqrt{5}\right)\left(9-4\sqrt{5}\right)}{4^3} \\
&= \frac{47}{2}\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Donc $E\left(Y^2\right) = 47$ et $V\left(Y\right) = 47-25 = 22$

5. On revient au cas général : $O < p < 1$ et $q = 1-p$.

   a) L'équation du second degré $Q\left(x\right) = x^2-qx-pq = 0$ a pour discriminant $\Delta = q^2+4pq > 0$
   Elle a donc deux racines distinctes $s = \dfrac{q-\sqrt{\Delta}}{2} < r = \dfrac{q+\sqrt{\Delta}}{2}$

   b) On connait le signe d'un polynôme du second degré par rapport à ses racines :
   $Q\left(0\right) = -pq < 0$ donc $s < 0 < r$
   $Q\left(1\right) = 1-q-pq = p-pq = p\left(1-q\right) = p^2 > 0$ donc 1 est exterieur aux racines et $1 > r$ (puisque 1 n'est pas inférieur à s)
   $Q\left(-1\right) = 1+q-pq = 1+q\left(1-p\right) = 1+q^2 > 0$ donc $-1 < s$
   Comme $s < 0$ on a $|s| = -s$ et $r+s = q > 0$ d'où
   Conclusion : $\boxed{.\ -1 < s < O < r < 1 \text{ et } r > |s|.}$

   c) On pose $\Delta = q+4pq$.
   On avait, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{P}\left(Y=n+2\right) = q\mathrm{P}\left(Y=n+1\right)+pq\mathrm{P}\left(Y=n\right)$
   suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coeefficients constants d'équation caractéristique $x^2-qx-pq = 0$
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{P}\left(Y=n\right) = Ar^n+Bs^n$ avec A et B satisfaisant les conditions pour $n=1$ et pour $n=0$
   On vérifie que c'est le cas pour $A = \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}$ et $B = -\dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}r-\frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}s &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left(r-s\right) = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left(\sqrt{\Delta}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(Y=1\right) \\
\frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}r^2-\frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}s^2 &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left(r-s\right)\left(r+s\right) \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left(\sqrt{\Delta}\right)q \\
&= \mathrm{P}\left(Y=2\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ on a : } P\left(\left[Y=n\right]\right) = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left(r^n-s^n\right)}$

d) On calcule comme précédemment la probabilité du conrtaire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y \geq 1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([Y=n]) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} (r^n - s^n) \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n - \sum_{n=1}^{+\infty} s^n \right) \text{ car chacune converge} \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{1}{1-r} - 1 - \frac{1}{1-s} + 1 \right) \text{ et} \\
(1-r)(1-s) &= \left(\frac{2-q-\sqrt{\Delta}}{2} \right) \left(\frac{2-q+\sqrt{\Delta}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left((2-q)^2 - \Delta \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(4 - 4q + q^2 - q^2 - 4(1-q)q \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(4q^2 - 8q + 4 \right) \\
&= (q-1)^2 = p^2 \text{ donc} \\
\mathrm{P}(Y \geq 1) &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{r-s}{p^2} \right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} = 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Y=0) = 0}$

e) Y admet un monment d'ordre $k \geq 0$ si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} n^k (r^n - s^n)$ converge absolument

Or $|r^n - s^n| \leq r^n + s^n$

Reste à voire la convergence des séries $\sum_{n\geq 0} n^k r^n$ et $\sum_{n\geq 0} n^k s^n$.

$n^k r^n = n^k r^{n/2} r^{n/2}$ avec $r^{n/2} = o(n^{-r})$ donc $n^k r^{n/2} \to 0$ et $n^k r^n = o\left(r^{n/2}\right)$

Or $\sum_{n\geq 0} r^{n/2}$ converge car $|\sqrt{r}| < 1$.

Donc par majoration de termes positifs, $\sum_{n\geq 0} n^k r^n$ converge et de même pour $\sum_{n\geq 0} n^k s^n$

Finalement, par majoration de termes positifs, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} n^k (r^n - s^n)$ est abolsument convergente.

Conclusion : $\boxed{Y \text{ admet des moments de tous ordres}}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} n\left(r^n - s^n\right) &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} n r^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n s^n\right] \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left[\frac{r}{(1-r)^2} - \frac{s}{(1-s)^2}\right] \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left[\frac{\frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{2-q+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2 - \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}\left(\frac{2-q-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2}{p^4}\right] \\
&= \frac{1}{8p^2\sqrt{\Delta}}\left[\left(q+\sqrt{\Delta}\right)\left(2-q+\sqrt{\Delta}\right)^2 - \left(q-\sqrt{\Delta}\right)\left(2-q-\sqrt{\Delta}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{8p^2\sqrt{\Delta}}\left[\begin{array}{c} \left(q+\sqrt{\Delta}\right)\left(4+q^2+\Delta+4\sqrt{\Delta}-2q\sqrt{\Delta}-4q\right)^2 \\ -\left(q-\sqrt{\Delta}\right)\left(4+q^2+\Delta-4q-4\sqrt{\Delta}+2q\sqrt{\Delta}\right) \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{8p^2\sqrt{\Delta}}\left[2\sqrt{\Delta}\left(-q^2+\Delta+4\right)\right] \\
&= \frac{1}{4p^2}\left[4pq+4\right] = \frac{pq+1}{p^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(Y) = \dfrac{pq+1}{p^2}}$ qui coïncide bien dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$

f) Montrer, pour tout réel x vérifiant $|x| < \dfrac{1}{r}$,

On a $|rx| < 1$ et $|sx| < 1$ car $|s| < r$ donc les séries $r^n x^n$ et $r^n s^n$ sont absoluemet convergentes et la série $\sum\limits_{n\geq 1} P([Y=n])\, x^n$ est absolument convergente par majoration de termes positifs.

On pose alors : $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P([Y=n])\, x^n$.

g) Pour tout réel x vérifiant $|x| < \frac{1}{r}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} P([Y=n])\, x^n &= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}(rx)^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(sx)^n\right] \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left[\frac{1}{1-rx} - 1 - \frac{1}{1-sx} + 1\right] \\
&= \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}}\left[\frac{1}{1-rx} - \frac{1}{1-sx}\right] \\
&= \frac{p^2 x}{\sqrt{\Delta}}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{\left(1-\frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}x\right)\left(1-\frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}x\right)}\right] \\
&= \frac{4p^2x}{\left(2-qx+\sqrt{\Delta}x\right)\left(2-qx-\sqrt{\Delta}x\right)} \\
&= \frac{4p^2x}{q^2x^2-4qx-\Delta x^2+4} \\
&= \frac{4p^2x}{q^2x^2-4qx-(q^2+4pq)\,x^2+4} \\
&= \frac{p^2x}{1-qx-pqx^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{g(x) = \dfrac{p^2x}{1-qx-pqx^2}.}$

6. On suppose dans cette question que $p = 2/3$.

   On a donc $g(x) = \dfrac{\frac{4}{9}x}{1-\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}x^2} = \dfrac{4x}{9-3x-2x^2}$

   a) $9-3x-2x^2$,a pour dicsriminant $9+72=81$ et pour racines $\dfrac{3}{2}$ et -3

      Donc g est dérivable C^2 sur $\left]-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right[$ comme quotient de fonctions C^2 de dénominateur non nul.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{4\left(9-3x-2x^2\right)-4x\left(-3-4x\right)}{\left(9-3x-2x^2\right)^2} \\
&= \frac{36+8x^2}{\left(9-3x-2x^2\right)^2} > 0
\end{aligned}$$

      Donc g est strictement croissante sur $\left]-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right[$
      En $\frac{3}{2}^-$: $9-3x-2x^2 = -2\left(x+3\right)\left(x-\frac{3}{2}\right) \to 0^+$ donc $g(x) \to +\infty$
      En $-\frac{3}{2}^+$: $9-3x-2x^2 \to 9-\frac{9}{2}-\frac{9\cdot 9}{2} = -36$ donc $g(x) \to -\frac{1}{6}$Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $I = \left]-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right[$

   b) g est C^2 et

$$g''(x) = -\frac{8}{\left(2x^2+3x-9\right)^3}\left(4x^3+54x+27\right)$$

      Soit $f(x) = 4x^3+54x+27$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 12x^2+54 > 0$$

en $-\frac{1}{2}$: $f(x) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 54\left(-\frac{1}{2}\right) + 27 = -\frac{1}{2}$ et en 0 : $f(x) = 27 > 0$
f étant continue et strictement croissante sur $\left]\frac{-1}{2}, 0\right[$ elle réalise une bijection de $\left]\frac{-1}{2}, 0\right[$ dans $\left]\frac{-1}{2}, 27\right[$
et comme $0 \in \left]\frac{-1}{2}, 27\right[$, l'éqaution $f(x) = 0$ a une unique solution α dans cet intervalle.
Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle n'en a pas d'autres.

x	$-\frac{3}{2}$		α		$\frac{3}{2}$
$f(x)$		$-$		$+$	
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Donc g zqt convcave sur $\left]-\frac{3}{2}, \alpha\right[$ et convexe sur l'intervalle $\left]\alpha, \frac{3}{2}\right[$.
Et il n'y a pas d'autres réels α vérifiant cela.

c) On trace l'asymptote verticale en $\frac{3}{2}$, la tangente en $-\frac{3}{2}$ de pente $g'\left(-\frac{3}{2}\right) = \dfrac{36 + 8\frac{9}{4}}{\left(9 + 3\frac{3}{2} - 2\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{20}{37} \simeq 0,5$
et on part concave (donc sous la tangente) et on redresse pour partir vers l'asymptote

Bilan : des calculs de sommes sécurisés pour la pluspart mais lourds à mener.