Correction du DL n° 1

Le 19/09/24

On définit les fonctions ch et sh par

$$\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

1. Exprimer la dérivées des fonctions ch et sh en fonction de ch et sh. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x)>0$. Calculer $\mathrm{sh}(0)$ et déterminer le signe de $\mathrm{sh}(x)$.

RÉPONSE:

Les fonctions ch et sh sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{ch'(x)=sh(x) \quad et\ sh'(x)=ch(x)}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive, on a directement que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ ch(x)>0}$.
On en déduit que la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
et comme $\boxed{sh(0)=0,\ sh \text{ est positive sur } \mathbb{R}_+ \text{ et négative sur } R_-.}$

* * *

2. Soit u_0 un réel fixé strictement supérieur à 1 . Déduire de la question précédente qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $\mathrm{ch}(\alpha)=u_0$.

RÉPONSE:

Comme sh est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule qu'en 0 , la fonction ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $[ch(0); \lim_{x\to\infty} ch(x)[=[1,+\infty[$. Comme elle également continue sur cet intervalle, et $u_0 \in [1,+\infty[$, d'après le théorème de la bijection $\boxed{\text{il existe un unique réel } \alpha \geq 0 \text{ tel que } \mathrm{ch}(\alpha)=u_0.}$

* * *

3. On considère le programme Python suivant

RÉPONSE:

```python
import numpy as np

u0=3/2

def ch(x):
        return((np.exp(x)+np.exp(-x))/2)

a=0
b=2
c=(a+b)/2
while b-a>10**(-3):
        if (ch(a)-u0)*(ch(c)-u0)<0:
                b=c
        else:
                a=c
        c=(a+b)/2
print(c)
```

$* * *$

(a) Que fait ce programme ? Comment s'appelle ce type de programme ?

RÉPONSE:

Ce type de programme fait une recherche d'une valeur approchée de α à 10^{-3} près par un algorithme de dichotomie.

$* * *$

(b) Pourquoi a-t-on pris $b = 2$?

RÉPONSE:

On voit au début du programme que $u_0 = \frac{3}{2}$, et comme $\mathrm{ch}(2) > \frac{e^2}{2} > u_0$ (car $e > 2$), le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que la solution se trouve dans l'intervalle $[0, 2]$.

$* * *$

On considère la suite (u_n) de premier terme u_0 et définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}}.$$

4. (a) Vérifier que (u_n) est bien définie.

RÉPONSE:

La suite est bien définie si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + 1 \geq 0$. Ceci se démontre facilement par récurrence.

$* * *$

(b) Étudier les variations de $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

RÉPONSE:

- *La fonction $x \mapsto \frac{1+x}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1; +\infty$.*
- *La fonction racine est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+*$*
- *Pour tout $x > -1$, $\frac{1+x}{2} \in \mathbb{R}_+^*$.*

Par composition f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} > 0$$

$\boxed{\textit{donc } f \textit{ est strictement croissante sur }]-1, +\infty[.}$

$* * *$

(c) Résoudre

$$\sqrt{\frac{1+x}{2}} = x, \quad \sqrt{\frac{1+x}{2}} > x$$

RÉPONSE:

On résout $\sqrt{\frac{1+x}{2}} > x$. Si $x \in]-1,0]$, l'égalité n'est pas définie et l'inégalité est évidente car la racine est positive. Soit $x > 0$:

$$\sqrt{\frac{1+x}{2}} > x \Leftrightarrow \frac{1+x}{2} > x^2 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 > 0$$

Le trinôme a pour racine 1 et $-\frac{1}{2}$. Il est négatif à l'extérieur des racines.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \{1\} \text{ et celui de l'inéquation est }]-1,1[.}$

* * *

(d) En déduire le sens de variations de (u_n).

RÉPONSE:

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1} > 1$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on sait que $u_0 > 1$. D'après la question précédente, on en déduit que $f(u_0) < u_0$ et la croissance de f donne $f(u_0) > f(1)$, donc $u_1 > 1$. donc $u_0 > u_1 > 1$, ce qui conclut l'initialisation.
- **Hérédité :**
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \geq u_{n+1} > 1$. Montrons que $u_{n+1} \geq u_{n+2} > 1$.
  D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \geq u_{n+1} > 1$. Comme la fonction f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$, $f(u_{n+1}) > f(1)$ donc $u_{n+2} > 1$. De plus, d'après la question précédente,

$$f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \quad \text{et donc} \quad u_{n+1} \geq u_{n+2} > 1$$

- **Conclusion :**
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1} > 1$.

* * *

(e) Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

RÉPONSE:

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc d'après le TLM elle converge vers un réel $\ell \geq 1$. La fonction f étant continue sur $[1,+\infty[$, le théorème du point fixe nous assure que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$, et donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers 1}}$.

* * *

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 = \operatorname{ch}(x)$$

RÉPONSE:

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$2\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 = 2\frac{((e^{x/2})^2 + 2e^{x/2}e^{-x/2} + (e^{-x/2})^2)}{4} - 1 = \frac{e^x + 2 + e^{-x}}{2} - 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \boxed{ch(x)}$$

* * *

6. En déduire, par récurrence, que pour tout entier n

$$u_n = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

RÉPONSE:

- **Initialisation :**
  Pour $n=0$, on sait que $u_0 = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^0}=\right) = \operatorname{ch}(\alpha)$ par définition.
- **Hérédité :**
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$. Montrons que $u_{n+1} = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$.
  D'après l'hypothèse de récurrence,$u_n = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$, et d'après la question précédente $u_n = 2\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\right)^2 - 1$.Donc $\frac{u_n+1}{2} = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)^2$. Ainsi

$$u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} = \sqrt{\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)^2} = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)^2$$

- **Conclusion :**
  Pour tout entier n, $u_n = \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$.

* * *

7. Montrer que

$$\operatorname{ch}(x) - 1 = 2\left(\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

RÉPONSE:

Calcul similaire à la question 5.

* * *

8. Calculer $\operatorname{sh}'(0)$.

RÉPONSE:

$\boxed{sh'(0) = ch(0) = 1}$

* * *

9. En déduire les équivalences suivantes

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

RÉPONSE:

Comme sh et ch sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser la formule de Taylor à l'ordre 1 et 2 au voisinage de 1 et :

$$sh(x) = sh(0) + sh'(0)x + o(x) \qquad ch(x) = ch(0) + ch'(0)x + \frac{ch^2(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

ce qui donne

$$sh(x) = x + o(x) \qquad ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On trouve dès lors

$$\boxed{\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \qquad et \qquad \operatorname{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.}$$

* * *

10. En déduire un équivalent de $(u_n - 1)$ quand n tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

En utilisant les questions précédentes, on trouve

$$u_n - 1 = \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \boxed{\frac{\alpha^{2n}}{2^{2n+1}}}$$

$* * *$

Problème - Oral HEC 2016

On suppose que toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Pour tout réel x on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

   (a) Soit un réel x fixé. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{n} = x$.

RÉPONSE:

Par définition de la partie entière, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1$$

donc

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$$

Comme n est positif

$$x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty} x - \frac{1}{n} = x = \lim_{n\to+\infty} x - \frac{1}{n}$$

En utilisant le théorème des encadrements

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x}$$

$* * *$

   (b) Pour tout réels x et y , établir l'équivalence $\lfloor y \rfloor \leqslant x siseulementsi y < \lfloor x \rfloor + 1$.

RÉPONSE:

On utilise

$$(*) \qquad n = \lfloor x \rfloor siseulementsi \begin{cases} n \leqslant x < n+1 \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Et la partie entière de x est le plus grand entier inférieur à x $(**)$.

- *supposons que $\lfloor y \rfloor \leqslant x$, $\lfloor y \rfloor$ est donc un entier inférieur à x donc d'après $(**)$:*

  $$\lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor$$

  donc

  $$\lfloor y \rfloor + 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$$

  et donc en utilisant $(*)$.

  $$y < \lfloor y \rfloor + 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$$

  On vient de démontrer

$$\lfloor y \rfloor \leqslant x \Rightarrow y < \lfloor x \rfloor + 1$$

- *On suppose maintenant que $y < \lfloor x \rfloor + 1$.*
  Donc $\lfloor x \rfloor + 1$ est un entier plus grand que y, donc ce n'est pas la partie entière de y ni un entier plus petit que la partie entière $(**)$. Donc
  $$\lfloor y \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1$$
  Comme ces quantités sont des entiers
  $$\lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor$$
  et en utilisant $(*)$
  $$\lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$$
  On vient de montrer
  $$y < \lfloor x \rfloor + 1 \Rightarrow \lfloor y \rfloor \leqslant x$$

$$\boxed{\lfloor y \rfloor \leqslant x si seulement si y < \lfloor x \rfloor + 1.}$$

$* * *$

(c) Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.
On note $N_n(\alpha, \beta)$ le nombre d'entiers k qui vérifient $\alpha < \dfrac{k}{n} \leqslant \beta$. Exprimer $N_n(\alpha, \beta)$ en fonction de $\lfloor n\alpha \rfloor$ et de$\lfloor n\beta \rfloor$

RÉPONSE:

Commencons par remarquer que
$$\{k \in \mathbb{N} / k \leqslant x\} = [\![0,\ \lfloor x \rfloor]\!]$$
donc le nombre d'entiers naturels plus petit que x est $\lfloor x \rfloor - 0 + 1$
Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ ***fixés***.
Soit $k \in \mathbb{N}$, comme n est positif
$$\alpha < \frac{k}{n} \leqslant \beta si seulement si n\alpha < k \leqslant n\beta$$
Donc
$$\begin{aligned}\left\{k \in \mathbb{N} \middle/ \alpha < \frac{k}{n} \leqslant \beta\right\} &= \{k \in \mathbb{N} / n\alpha < k \leqslant n\beta\} \\ &= \{k \in \mathbb{N} / k \leqslant n\beta\} \setminus \{k \in \mathbb{N} / k \leqslant n\alpha\}\end{aligned}$$
Le nombre recherché est donc le nombre d'entiers plus petits que $n\beta$ (qui vaut $\lfloor n\beta \rfloor + 1$) moins le nombre d'entiers plus petit que $n\alpha$ (qui vaut $\lfloor n\alpha \rfloor + 1$)

$$\boxed{\text{On a } N_n(\alpha, \beta) = \lfloor n\beta \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor}$$

$* * *$

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note Y_n la variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par
$$\forall k \in [\![0,\ n-1]\!] \qquad P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}$$
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;\ 1]$. On définit Z_n par
$$Z_n = \frac{\lfloor nZ \rfloor}{n}$$
Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$

(a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(\alpha < Y_n \leqslant \beta) = \beta - \alpha$.

RÉPONSE:

Y_n suit une loi uniforme dont le support n'est pas habituel. Elle ne prend que des valeurs de la forme $\dfrac{k}{n}$
Soit n fixé

$$[\alpha < Y_n \leqslant \beta] = \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ \alpha<\frac{k}{n}\leqslant\beta}} \left[Y_n = \frac{k}{n}\right]$$

donc, l'union étant disjointe

$$\begin{aligned}
P(\alpha < Y_n \leqslant \beta) &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ \alpha<\frac{k}{n}\leqslant\beta}} P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ \alpha<\frac{k}{n}\leqslant\beta}} \frac{1}{n} && \textit{définition de la loi de } Y_n \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ \alpha<\frac{k}{n}\leqslant\beta}} && \textit{l'indice est } k \\
&= \frac{1}{n} \cdot (\lfloor n\beta \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor) && \textit{question précédente}
\end{aligned}$$

D'après la première question

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n} = \beta \qquad \textit{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(\alpha < Y_n \leqslant \beta) = \beta - \alpha}$$

$* * *$

(b) Comparer les fonctions de répartition respective de Y_n et Z_n. Conclusion

RÉPONSE:

$\square$

$* * *$