Corrigé : ECRICOME Eco 2011

EXERCICE 1

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ carrée d'ordre n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que :

$A^{k-1} \neq 0_n$ et $A^k = 0_n$ où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n.

Soit A une matrice carrée d'ordre n, on dit que le couple (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifions que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.
   - $\Delta + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$
   - $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   - $\Delta N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = N\Delta$

   donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A .

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   a) Déterminons les valeurs propres de A. Des équivalences : $(V \in Ker\,(A - \lambda I)) \iff$

   $$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (3-\lambda)x + y - z &= 0 \\ -2x - \lambda y + 2z &= 0 \\ (1-\lambda)z &= 0 \end{cases} \underset{L_2 \longleftarrow \lambda L_1 + L_2}{\iff}$$

   $$\begin{cases} L_1 \\ (-\lambda^2 + 3\lambda - 2)x + (-\lambda + 2)z = 0 \\ (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda^2 + 3\lambda - 2 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   on déduit que

   « λ est valeur propre de A » $\iff$ « $A - \lambda I$ est non inversible » $\iff$

   « $0 = -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = (\lambda - 1)(2 - \lambda)$ ou $1 - \lambda = 0$ » $\iff$ « $\lambda \in \{1\,;2\}$ »

   b) Déterminons une base des sous espaces propres de A.

   - $V \in Ker\,(A - I) \iff \begin{cases} y + 2x - z &= 0 \\ z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff V = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

     En notant $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, (V_1) est une base de $Ker\,(A - I)$ donc $\dim(\ker(A - I)) = 1$.

- $(V \in Ker\,(A-2I)) \Longleftrightarrow \begin{cases} y+x-z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -z &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow V = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  En notant $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (V_2) est une base de $\ker(A-2I)$ donc $\dim(\ker(A-2I)) = 1$,

  on en déduit que la somme des dimensions des sous espaces propres de A est égale à 2 et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $2 < 3$, donc (Théorème), la matrice A n' est pas diagonalisable.

Vérification : $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ok.

2. On donne $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculs : $\Delta X_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2X_1$,

$\Delta X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1X_2$,

$\Delta X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1X_3$,

b) La famille (X_1) est une base de $Ker\,(\Delta - 2I)$ donc $\dim(\ker(\Delta-2I)) = 1$, la famille $(X_2\,;X_3)$ est une famille libre de $\ker(\Delta - I)$ donc $3-1 \geq \dim(\ker(\Delta - I)) \geq 2$ c'est la dire que la somme des dimensions des sous espaces propres de Δ est égale à 3, c'est à dire que la matrice Δ est diagonalisable.

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (X_1\; X_2\; X_3)$, P est inversible et

$\Delta P = \Delta\,(X_1\; X_2\; X_3) = (2X_1\; X_2\; X_3) = PD$ c'est à dire que $P^{-1}\Delta P = D$.

c) Calcul de l'inverse de P ;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P \underset{L_2 \longleftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P$$

$$\underset{L_1 \longleftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P \underset{\substack{L_2 \longleftarrow -L_2 \\ L_2 \Longleftrightarrow L_3}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P.$$

On en déduit que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérification $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ok.

d) Montrons que$N$ est une matrice nilpotente. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ donc Nest une matrice nilpotente.

e) Vérifions que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.

- Δ est une matrice diagonalisable ; voir b).
- N est une matice nilpotente ; voir c).
- $\Delta N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N\Delta$.

  c'est à dire $\Delta N = N = N\Delta$, de plus $A = \Delta + N$.

Conclusion (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.

f) On a vu que $\Delta N = N = N\Delta$ donc on peut utiliser la formule du binôme :

pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (N+\Delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k} = \Delta^n + nN\Delta = \Delta^n + nN$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \Delta^n + nN$

g) Pour $k = 0$ on a $\Delta^k N = IN = N = NI = N\Delta^k$.

Si pour un entier naturel k on a $\Delta^k N = N = N\Delta^k$, de (e)) on a $\Delta N = N = N\Delta$ donc $\Delta^{k+1}N = \Delta(\Delta^k N) = \Delta N = N = N\Delta = (N\Delta^k)\Delta = N\Delta^{n+1}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, N\Delta^n = N = \Delta^n N$.

h) On a établit que Δ^n est une matrice diagonale, nN est nilpotente, $A^n = \Delta^n + nN$, et enfin $N\Delta^n = \Delta^n N$ donc $(\Delta^n ; N)$ est une décomposition de Dunford de A^n .

EXERCICE 2

φ est définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$ et f est définie par :
$\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad f(x,y) = xy + \ln(x)\ln(y)$.

PARTIE I. Etude des zéros de φ.

1. On remarque que $\varphi(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} -x^2\ln(x)$ donc $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$, puis que $\dfrac{\varphi(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} -x\ln(x)$ donc $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = -\infty$. On en déduit que la courbe représentative de φ , a une branche parabolique de direction (Oy).
2. Les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \ln(x)$ sont de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$ donc le produit $x \longmapsto x^2\ln(x)$ est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$ ainsi que la différence $x \longmapsto 1 - x^2\ln(x)$ c'est à dire que φ est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$. D'autre part $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$ (cours) donc $\varphi(0) = 1 = \lim_{x \to 0^+} 1 - x.x\ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \varphi(x)$. On en déduit que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. On a vu que φ , est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = -2x\ln(x) - x^2\dfrac{1}{x} = -x(2\ln(x)+1)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = -x\ln(x)$ et donc $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = 0$, c'est à dire que $\varphi'(0) = 0$ donc la représentation graphique de φ a une demi tangente horizontale au point d'abscisse 0.
5. Tableau de variations de φ :

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	1	$\nearrow$	$1 + \dfrac{\ln(2)}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

6. On remarque que pour $x \in \left[0\,;e^{-1/2}\right]$ on a $\varphi(x) > 0$ et sur l'intervalle $\left[e^{-1/2}\,;\,+\infty\right[$ la fonction φ est stritement décroissante et continue, $\varphi\left(e^{-1/2}\right) = 1 + \dfrac{\ln(2)}{e}$, $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$ donc d'après le théorème de la bijection φ réalise une bijection de $\left[e^{-1/2}\,;\,+\infty\right[$ sur $\left]-\infty\,;1+\dfrac{\ln(2)}{e}\right]$ et comme $0 \in \left]-\infty\,;1+\dfrac{\ln(2)}{e}\right]$ on déduit que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α D'autre part $\varphi\left(\sqrt{2}\right) = 1 - \ln(2) > 0 = \varphi(\alpha) > 1 - \ln(8) = 1 - 4\ln(2) = \varphi(2)$ car $2 < e < 3 < 8$ donc $\sqrt{2} < \alpha < 2$ et $\ln(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2}$.
7. La fonction φ étant continue sur $[0\,;+\infty[$ elle admet une primitive sur cet intervalle (Théorèmedu cours) donc l'intégrale$I = \int_0^\alpha \varphi(x)\,dx$ converge. On a : $I = \displaystyle\int_0^\alpha \left(1 - x^2\ln(x)\right)dx = \alpha - \left[\dfrac{x^3}{3}\ln(x)\right]_0^\alpha + \int_0^\alpha \dfrac{x^2}{3}dx$ donc $I = \alpha - \dfrac{\alpha^3}{3}\ln(\alpha) + \dfrac{\alpha^3}{9} = \alpha - \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\alpha^3}{9} = \dfrac{\alpha\left(6+\alpha^2\right)}{9}$ et donc $I = \dfrac{\alpha\left(6+\alpha^2\right)}{9}$.
8. Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par : $a_0 = \sqrt{2}$ et $b_0 = 2$,
$\forall n \geq 0$, si $\varphi(a_n)\,\varphi\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$
$\forall n \geq 0$, si $\varphi(a_n)\,\varphi\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0$ alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$

```
Programme en Pascal calculant a7 et b7 .
program ECRICOME2011;
var a,b,x,y : real ; n: integer ;
Begin
a:=sqrt(2);b:=2;
for k:=1 to 7 do
Begin
x:=(a+b)/2;y:=1-x*x*ln(x) ; if y>0 then a:=x else if y<0 then b:=x  {a=a(k), b=b(k)}
end;
writeln('a(7)=',a,'; b(7)=',b) ; readln
end.
```

PARTIE II. Extrema de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

α est l'unique réel vérifiant $\varphi(\alpha)=0$, $\forall(x,y)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $\quad f(x,y)=xy+\ln(x)\ln(y)$

1. Les fonctions $(x;y)\longmapsto x$ et $(x;y)\longmapsto y$ sont de classes C^∞ sur $]0,+\infty[^2$ à valeurs strictement positives, ln étant de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$les fonctions composées $(x;y)\longmapsto\ln(x)$ et $(x;y)\longmapsto\ln(y)$ sont de classe C^∞ sur $]0,+\infty[^2$ et donc les produits $(x;y)\longmapsto\ln(x)\ln(y)$ et $(x;y)\longmapsto xy$ sont de classe C^∞ sur $]0,+\infty[^2$, finalement la somme f de ces deux produit est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[^2$ donc f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
2. Soit $(x;y)\in]0,+\infty[^2$. Calculons les dérivée partielles de f en $(x;y)$; $p=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y)=y+\dfrac{\ln(y)}{x}$ et $q=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y)=x+\dfrac{\ln(x)}{y}$.
« $(x;y)$ est un point critique de f » $\Longleftrightarrow$ « $p=0=q$ » $\Longleftrightarrow$ « $\ln(x)=-xy=\ln(y)$ » $\Longleftrightarrow$ « $x=y$ et $0=x^2+\ln(x)$ » $\Longleftrightarrow$ « $(x;y)=\left(\dfrac{1}{\alpha};\dfrac{1}{\alpha}\right)$ »
donc $\left(\dfrac{1}{\alpha},\dfrac{1}{\alpha}\right)$ est l'unique point critique de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$
3. Calculons les dérivées partielles secondes en $(x;y)$ avec $(x;y)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
$r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\dfrac{\ln(y)}{x^2}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\ln\left(\dfrac{1}{y}\right)=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\dfrac{1}{y^2}\ln\left(\dfrac{1}{y}\right)=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\left(1-\varphi\left(\dfrac{1}{y}\right)\right)$.
$s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=1+\dfrac{1}{xy}$.
$t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-\dfrac{\ln(x)}{y^2}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^2\left(1-\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.
4. Pour $(x;y)=\left(\dfrac{1}{\alpha};\dfrac{1}{\alpha}\right)$ on a $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)=\varphi\left(\dfrac{1}{y}\right)=\varphi(\alpha)=0$ donc $r=1=t$ et $s=1+\alpha^2$, $s^2-rt=\left(1+\alpha^2\right)^2-1=\alpha^4+2\alpha^2>0$ donc (Théorème) la fonction f ne présente pas d'extremum local sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

EXERCICE 3

PARTIE I. Un jeu en ligne.

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

– H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
– V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
– D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
– N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Il y a 9 cases dans lesquelles on peut choisir les 3 cases occupées par les trois jetons, cela fait $\binom{9}{3}$ possibilités, or $\binom{9}{3} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{2 \times 3} = 3 \times 4 \times 7 = 84$.
Conclusion : il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
2. Calcul de probabilités $\mathrm{P}(H) = \dfrac{3}{84} = \dfrac{1}{28} = \mathrm{P}(V)$, $\mathrm{P}(D) = \dfrac{2}{84} = \dfrac{1}{42}$.
3. $(H; V; D; N)$ étant un système complet d'événements, on déduit que $\mathrm{P}(N) = 1 - \mathrm{P}(H) - \mathrm{P}(V) - \mathrm{P}(D) = 1 - \dfrac{3}{84} - \dfrac{3}{84} - \dfrac{2}{84} = 1 - \dfrac{8}{84} = 1 - \dfrac{2}{21} = \dfrac{19}{21} \simeq 0.9048$.
4. Il y a 10 000 relances par jour de ce jeu. Pour $i \in [1; 10\,000]$, X_i est la variable de Bernouilli qui vaut 1 si le joueur a perdu la partie à la i^{e} relance et 0 sinon.
On a donc $E(X_i) = P(N) = \dfrac{19}{21}$, et $V(X_i) = P(N)(1 - P(N)) = \dfrac{19}{21} = \dfrac{38}{441}$.
Z_i est le gain de la société à la i^{e} relance, c'est à dire que $Z_i = 2 - 20(1 - X_i) = 20X_i - 18$, et
Z le gain journalier de la société, vérifie $Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Z_i$ où $n = 10\,000$.

   a) Espérance de Z_i ; $E(Z_i) = E(20X_i - 18) = 20E(X_i) - 18 = 20\dfrac{19}{21} - 18 = \dfrac{2}{21}$
   b) Le gain journalier, en euros, que la société peut espérer est $E(Z) = \dfrac{20\,000}{21} \simeq 952,38$.

PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un Joueur décide de jouer 100 parties consécutives, que l'on suppose indépendantes. On note G_i la variable aléatoire valant 1 si le joueur gagne la $i^{\,e}$ partie et 0 sinon
Le nombre de parties gagnées X vérifie $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{100} G_i$.

   a) X est la somme de 100 variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $1 - P(N)$ soit $\dfrac{2}{21}$ donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{2}{21}; 100\right)$ c'est à dire que : $\forall i \in [0; 100]$, $P(X = i) = \binom{100}{i}\left(\dfrac{2}{21}\right)^{i}\left(\dfrac{19}{21}\right)^{100-i}$.
   b) Espérance et la variance de X ; $E(X) = 100 \times \dfrac{2}{21} = \dfrac{200}{21} \simeq 9,52$.
   c) La perte T du joueur vérifie : $T = 200 - 20 \times X$.

2. Le nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% vérifie
$0,5 \leqslant P\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant 1\right) = 1 - P\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\right) = 1 - P\left(\cap_{i=1}^{n}(X_i = 0)\right) = 1 - \displaystyle\prod_{i=1}^{n} P(X_i = 0) = 1 - \left(\dfrac{19}{21}\right)^{n}$ c'est à dire $\left(\dfrac{19}{21}\right)^{n} \leqslant 0,5$ soit encore $n \ln\left(\dfrac{19}{21}\right) \leqslant -\ln(2)$ c'est à dire que $n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{ln(21/19)} \simeq 6,9$. On en déduit que le nombre minimum de parties à jouer pour en gagner une au moins avec une probabilité d'au moins 50% est 7.
3. Un joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée, Y est le nombre de parties jouées pour gagner la première fois.

   a) Loi de Y , on répète une épreuve de Bernoulli de façons indépendantes jusqu'à la réussite de l'événement « les trois jetons sont alignés » donc
$Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{2}{21}\right)$, c'est à dire que $\forall n \in \mathbb{N}^{*}, P(Y = n) = \frac{2}{21}\left(\frac{19}{21}\right)^{n-1}$.
   b) Espérance et la variance de Y, $E(Y) = \dfrac{21}{2} = 10,5$ et $V(Y) = \left(\dfrac{21}{2}\right)^{2}\dfrac{19}{21} = 199,5$.

c) Pour k entier naturel la probabilité p_k que le joueur joue au plus k parties avant de gagner pour la première fois, est donnée par :

$$p_k = P(Y \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{2}{21}\left(\frac{19}{21}\right)^{j-1} = \frac{2}{21}\,\frac{1-\left(\frac{19}{21}\right)^k}{1-\frac{19}{21}} = 1-\left(\frac{19}{21}\right)^k.$$

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

La fonction aléatoire est parfois déréglée, dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A,1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes.
On note Δ l'événement «la fonction aléatoire est déréglée»et on pose $P(\Delta) = x$ avec $x \in]0,1[$ et N est l'événement « les trois jetons sont alignés ».

1. Calculer de probabilités $P_\Delta(H) = \frac{1}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{28} = P_\Delta(V) = P_\Delta(D)$ et donc $P_\Delta(N) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$. On rappelle que $P_{\overline{\Delta}}(N) = \frac{19}{21}$.
2. On remarque que $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ est un système complet d'événements, donc
$P(N) = P\left(N \cap \overline{\Delta}\right) + P(N \cap \triangle) = P\left(\bar{\Delta}\right) P_{\overline{\triangle}}(N) + P(\Delta) P_\Delta(N)$
$P(N) = (1-x)\frac{19}{21} + x\frac{25}{28} = \left(\frac{25}{28} - \frac{19}{21}\right)x + \frac{19}{21} = \frac{75-76}{84}x + \frac{19}{21} = -\frac{1}{84}x + \frac{19}{21}.$
Conclusion : $P(N) = -\frac{1}{84}x + \frac{19}{21}$.
3. On note J la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la partie, 0 sinon. J est une variable de Bernuoilli de paramètre $1 - P(N)$, la variable aléatoire G « gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée » vérifie $G = 2 - 20J$ donc l'espérance du gain est
$E(G) = 2 - 20\left(1 - \left(-\frac{1}{84}x + \frac{19}{21}\right)\right) = \frac{2 \times 84 - 20 \times 2}{84} - \frac{1}{84}x = \frac{128 - x}{84}$
et la valeur maximale de x pour que cette espérance de gain soit positive est 128.
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés la probabilité que la fonction aléatoire soit été déréglée est
$P_{\overline{N}}(\Delta) = \frac{P\left(\overline{N} \cap \Delta\right)}{P\left(\overline{N}\right)} = \frac{P(\Delta) - P(N \cap \Delta)}{1 - P(N)} = \frac{x - x\frac{25}{28}}{1 - \left(-\frac{1}{84}x + \frac{19}{21}\right)} = \frac{3x \times 84}{28 \times (x+8)} = \frac{9x}{x+8}.$