Correction de l' épreuve n°2

E C G

CONCOURS BLANC N°1

Option Économique

MATHÉMATIQUES

5 Septembre 2024

Exercice n°1

On définit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on introduit les deux sous-ensembles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définis par :

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : MK = KM = M\}, \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : {}^tM = M\right\}$$

1. Étude de K.

(a) Calculer K^2. En déduire, sans calcul supplémentaire, que K est inversible et expliciter K^{-1}.

RÉPONSE:

Il est immédiat que $K^2 = I$. Ainsi, $K \cdot K = I$ donne que $\boxed{K \text{ est inversible et } K^{-1} = K.}$

* * *

(b) $(*)$ Justifier que K est diagonalisable. En déduire, sans calcul, le spectre de K.

RÉPONSE:

La matrice K est symétrique, donc $\boxed{\text{diagonalisable}}$*. De plus, $K^2 = I$ dans le calcul précédent nous donne un polynôme annulateur de K avec $X^2 - 1$ dont les racines sont 1 et -1 . Si K n'admettait qu'une seule valeur propre, étant diagonalisable, elle serait déjà diagonale, donc K admet au moins deux valeurs propres et donc exactement 2*

$$\boxed{\mathrm{Sp}(K) = \{-1; 1\}}$$

Par contre, on ne peut pas sans calcul répondre à propos de la dimension des sous-espaces propres (et donc de la multiplicité de chaque valeur propre).

* * *

(c) Déterminer une base de $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : KX = \lambda X\}$ pour $\lambda = 1$ puis $\lambda = -1$.
Que vaut $\dim(E_1) + \dim(E_{-1})$?

RÉPONSE:

Il faut résoudre.

- *Pour $\lambda = 1$.*

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_1 \iff KX=X \iff \begin{cases} -x+z=0\\ x-z=0\end{cases}$$
$$\iff X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ -x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$E_1=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

La famille formée des deux vecteurs ci-dessus est génératrice de E_1. De plus ces deux vecteurs sont (clairement) non colinéaires, ils en forment donc une base.

- *Pour $\lambda=-1$.*

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_{-1} \iff KX=-X \iff \begin{cases} x+z=0\\ 2y=0\\ x+z=0\end{cases}$$
$$\iff X=\begin{pmatrix} x\\ 0\\ -x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$E_{-1}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

La famille formée du vecteur non nul ci-dessus est libre et génératrice de E_{-1}, elle en forme donc une base.
On a (sans surprise d'après la question précédente)

$$\dim(E_1)+\dim(E_{-1})=3$$

* * *

2. (a) Montrer que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$ sont des espaces vectoriels .

RÉPONSE:

On montre que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel en montrant que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- *Il est clair que 0_3 est dans $\mathcal{E}$: $0_3\cdot K=0_3=K\cdot 0_3$.*
- *Soient M et N deux matrices de $\mathcal{E}$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ deux réels. Alors*

$$(\lambda M+\mu N)\cdot K=\lambda MK+\mu NK=\lambda KM+\mu KN=K(\lambda M+\mu N)=\lambda M+\mu N$$

donc $\lambda M+\mu N\in\mathcal{E}$. Ainsi, $\mathcal{E}$ est stable par combinaison linéaire et non vide donc $\boxed{\textit{c'est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(}$
On procède de la même manière pour $\mathcal{S}$.

- *${}^t0_3=0_3$ donc $0_3\in\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ est non vide.*
- *Soient $M,N\in\mathcal{S}$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Alors*

$$ {}^t(\lambda M+\mu N)=\lambda {}^tM+\mu {}^tN=\lambda M+\mu N $$

donc $\lambda M+\mu N\in\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ est stable par combinaison linéaire. $\boxed{\textit{C'est lui aussi un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \textit{ et donc u}}$

$* * *$

(b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de $\mathcal{E}$ n'est inversible.

RÉPONSE:

Soit $M\in\mathcal{E}$. Supposons que M soit inversible, alors il existe une matrice inverse M^{-1}. Mais alors,

$$ K=M^{-1}\cdot(MK)=M^{-1}M=I $$

ce qui est absurde. $\boxed{\textit{Donc } M \textit{ n'est pas inversible.}}$

$* * *$

(c) Montrer que si $M\in\mathcal{E}$, alors $M^n\in\mathcal{E}$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.

RÉPONSE:

Considérons $M\in\mathcal{E}$ et montrons par récurrence que M^n est encore un élément de $\mathcal{E}$ pour tout $n\geq 1$.

- **Initialisation :**
  Pour $n=1$, il n'y a rien a montré puisque par hypothèse $M\in\mathcal{E}$.
- **Hérédité**
  Supposons $M^n\in\mathcal{E}$ pour un certain $n\geq 1$. Alors, comme $M^n\in\mathcal{E}$, on a notamment $M^nK=K=kM^n$ et, en utilisant aussi que $M\in\mathcal{E}$,
  $M^{n+1}K=M\cdot M^nK=M\cdot K=K=K\cdot M=KM^n\cdot M=KM^{n+1}$
  donc M^{n+1} est dans $\mathcal{E}$ et la récurrence est terminée.
- **Conclusion :** $\boxed{\textit{Pour tout } n\geq 1,\ M^n\in\mathcal{E}}$

$* * *$

(d) Montrer que si $M\in\mathcal{S}$, alors $M^n\in\mathcal{S}$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.

RÉPONSE:

On raisonne de la même manière pour cette question. Utilisant le fait que ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$. Supposons que $M\in\mathcal{S}$.

- **Initialisation**
  Pour $n=1$, il n'y a rien a montré puisque par hypothèse $M\in\mathcal{S}$.
- **Hérédité**
  . Supposons $M^n\in\mathcal{S}$ pour un certain $n\geq 1$.

$$ {}^tM^{n+1}={}^t(M\cdot M^n)={}^t(M^n)\cdot{}^tM=M^n\cdot M=M^{n+1} $$

  donc M^{n+1} est dans $\mathcal{S}$ **Conclusion :**
  $\boxed{\textit{Pour tout } n\geq 1,\ M^n\in\mathcal{E}}$

$* * *$

3. Montrer que la famille (A,B,C,D) formée des matrices définies ci-dessous est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où

$$ A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \text{et}\quad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} $$

RÉPONSE:

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. *On a*

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0_3 \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\textit{Donc la famille } (A, B, C, D) \textit{ est libre.}}$

* * *

4. Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{E}$. Cette famille en forme-t-elle une base ? Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

RÉPONSE:

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ *une matrice de* $\mathcal{E}$. *On revient à la définition de* $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{E} &\iff MK = KM = M \\
&\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} k = g = c = a \\ h = b \\ f = d \end{cases} \\
&\iff M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} \\
&\iff M = aA + bB + dC + eD
\end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(A, B, C, D)}$$

et la famille (A, B, C, D) *est génératrice de* $\mathcal{E}$ *mais c'est aussi (d'après la question précédente) une famille libre. Ainsi, c'est une base de* $\mathcal{E}$ *qui est donc de dimension 4 :*

$$\boxed{\dim(\mathcal{E}) = 4}$$

* * *

5. Déterminer une base, et la dimension, de $\mathcal{S}$.

RÉPONSE:

On procède de la même manière.

$$M=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{pmatrix}\in\mathcal{S}\Longleftrightarrow {}^tM=M\Longleftrightarrow\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & k\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{cases} a=a\\ b=c\\ \cdots\\ \cdots\\ \cdots\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow M=\begin{pmatrix} a & b & c\\ b & e & f\\ c & f & k\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow M=a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

La famille formée des 6 matrices ci-dessus est donc génératrice de $\mathcal{S}$. On montre que c'est aussi une famille libre (le système qui découle de l'équation de liaison est trivial) et ainsi la famille forme une base de $\mathcal{S}$ et on peut conclure que

$$\boxed{\dim(\mathcal{S})=6}$$

* * *

6. On considère l'ensemble $\mathcal{K}=\mathcal{E}\cap\mathcal{S}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel et que $(A, B+C, D)$ en forme une base.

RÉPONSE:

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est encore un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel. On en trouve une famille génératrice comme suit :

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{K} &\Longleftrightarrow M\in\mathcal{E} \text{ et } \quad M\in\mathcal{S}\\ &\Longleftrightarrow M=\begin{pmatrix} a & b & a\\ d & e & d\\ a & b & a\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad {}^tM=M\\ &\Longleftrightarrow M=\begin{pmatrix} a & b & a\\ d & e & d\\ a & b & a\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad b=d\\ &\Longleftrightarrow M=\begin{pmatrix} a & b & a\\ b & e & b\\ a & b & a\end{pmatrix}=aA+b(B+C)+eD\end{aligned}$$

et la famille $(A, B+C, D)$ est bien génératrice de $\mathcal{K}$. Cette famille étant libre (le système est encore immédiat), elle en forme une base.

* * *

   (b) Montrer que, pour toute matrice $M\in\mathcal{K}$, il existe trois suites $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}, (z_n)_{n\geq 1}$ telles que,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad M^n=x_nA+y_n(B+C)+z_nD$$

RÉPONSE:

Soit $M \in \mathcal{K}$. D'après la Question (2c), $M^n \in \mathcal{E}$ et $M^n \in \mathcal{S}$ donc $M^n \in \mathcal{K}$. Les suites cherchées dont alors les suites des coordonnées de M^n dans la base $(A, B+C, D)$.

* * *

7. On introduit alors la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que $T \in \mathcal{K}$ et donner ses coordonnées dans la base $(A, B+C, D)$.

RÉPONSE:

On observe que $T = 3A + 2D \in \mathcal{K}$ et les coordonnées dans la base $(A, B+C, D)$ sont alors $(3, 0, 2)$.

* * *

   (b) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T^n = x_n A + z_n D$$

   où $x_{n+1} = 6x_n$ et $z_{n+1} = 2z_n$.

RÉPONSE:

On procède comme suggéré par récurrence.

- **Initialisation.** *Pour $n = 1$, la question précédente donne $x_1 = 3$ et $z_1 = 2$.*
- *Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait*

$$T^n = x_n A + z_n D$$

Alors

$$T^{n+1} = T \cdot T_n = (3A + 2D)(x_n A + z_n D) = 3x_n A^2 + 2z_n AD + 2x_n DA + 2z_n D^2$$

Or, $D^2 = D$, $A^2 = 2A$ et $AD = DA = 0$. On obtient alors

$$T^{n+1} = 6x_n A + 2z_n D$$

En posant $x_{n+1} = 6x_n$ et $z_{n+1} = 2z_n$, on a bien la propriété au rang $n+1$ et la récurrence est terminée.

* * *

   (c) En déduire l'expression du terme général de (x_n), de (z_n) puis l'expression de T^n.

RÉPONSE:

Les suites (x_n), de (z_n) sont géométriques de raisons respectives 6 et 2. D'après le cours, on déduit que

$$x_n = 6^{n-1} x_1 = 3 \cdot 6^{n-1}, \quad \text{et} \quad z_n = 2^{n-1} z_1 = 2^n$$

Il suit que

$$T^n = 3 \times 6^{n-1} A + 2^n D = \begin{pmatrix} 9 \times 6^{n-1} & 0 & 9 \times 6^{n-1} \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 9 \times 6^{n-1} & 0 & 9 \times 6^{n-1} \end{pmatrix}$$

* * *

8. Une suite de matrices colonnes : On introduit les matrices colonnes $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et on considère la suite de matrices colonnes (U_n) définie par son premier terme U_1 et la relation de récurrence, pour $n \geq 1$,

$$U_{n+1} = TU_n + V$$

(a) Montrer que $I - T$ est inversible et calculer son inverse avec un pivot de Gauss.

RÉPONSE:

On commence par expliciter la matrice $I - T$.

$$I - T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

puis on entame un Pivot de Gauss simultané.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leadsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$
$$\leadsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} -10 & 0 & 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Donc $I - T$ est inversible et

$$(I - T)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

* * *

(b) Déterminer une matrice colonne L telle que $L = TL + V$.

RÉPONSE:

On résout

$$\begin{aligned} L = TL + V &\iff L - TL = V \\ &\iff (I - T)L = V \\ &\iff L = (I - T)^{-1} V \end{aligned}$$

Donc

$$L = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

* * *

(c) Vérifier que $U_{n+1} - L = T(U_n - L)$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$U_n - L = T^{n-1}(U_1 - L)$$

RÉPONSE:

La vérification ne pose pas de problème (tout ça nous rappelle les suites arithméticogéométriques, ou même le sujet ECRICOME 2012).

$$U_{n+1} - L = TU_n + V - (TL + V) = T(U_n - L)$$

Une récurrence super facile permet ensuite d'obtenir la formule souhaitée :

- **Initialisation** *Pour $n = 1$, on a évidemment*

$$U_1 - L = T^0 (U_1 - L)$$

- **Hérédité**. *Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait*

$$U_n - L = T^{n-1} (U_1 - L)$$

Alors, par ce qui précède

$$U_{n+1} - L = T(U_n - L) \underset{\text{H.R}}{=} T \cdot T^{n-1} (U_1 - L) = T^n (U_1 - L)$$

et la formule est vraie au rang $n+1$ ce qui termine la récurrence.

* * *

(d) En déduire l'expression de U_n, pour $n \geq 1$.

RÉPONSE:

En combinant tout ce qui précède, on a

$$U_n = L + T^{n-1}(U_1 - L) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \times 6^{n-2} & 0 & 9 \times 6^{n-2} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 9 \times 6^{n-2} & 0 & 9 \times 6^{n-2} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \times 6^{n-2} & 0 & 9 \times 6^{n-2} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 9 \times 6^{n-2} & 0 & 9 \times 6^{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 + 9 \times 6^n \\ 5 \\ -3 + 9 \times 6^n \end{pmatrix}}$$

* * *

Exercice n°2

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. (a) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

RÉPONSE:

Le discriminant de la fonction $x \longmapsto x^2 + x + 1$ est strictement négatif ; par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \neq 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

$* * *$

(b) Étudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement les limites obtenues.

RÉPONSE:

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(x) = \frac{1}{x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

D'où on déduit, par opérations

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$$

La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 + x + 1 - x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{1 - x^2}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

$\boxed{\textit{La droite d'équation } y = 0 \textit{ est asymptote à } \mathscr{C}, \textit{ aux voisinages de } -\infty \textit{ et } +\infty.}$

$* * *$

(c) Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 , notée $\mathscr{T}_0$

RÉPONSE:

L'équation de la tangente est 0 est

$$\boxed{T_0 : y = f'(0)x + f(0) = x}$$

$* * *$

(d) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{T}_0$.

RÉPONSE:

Pour cela étudions, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f(x) - x$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
f(x)-x &= \frac{x}{x^2+x+1}-x \\
&= \frac{x-x\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1} \\
&= \frac{-x^3-x^2}{x^2+x+1} \\
&= \frac{-x^2(x+1)}{x^2+x+1}
\end{aligned}$$

On obtient le tableau de signes suivant :

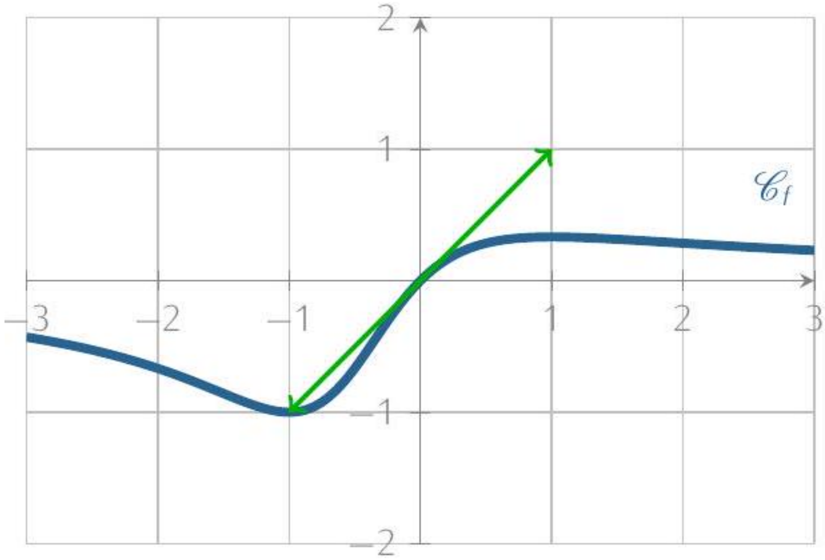
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)-x$		+	0	-	0	-	

Conclusion : $\boxed{\text{$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{T}_0$ sur $]-\infty\,;-1\,[$, et au-dessous de $\mathscr{T}_0$ sur $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$}}$. *Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}_0$ se rencontrent en les points de coordonnées $(-1;-1)$ et $(0;0)$.*

* * *

(e) En utilisant les résultats précédents, représenter, dans un repère judicieusement choisi, l'allure de $\mathscr{C}_f$

RÉPONSE:



* * *

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = f\left(u_n\right) \end{cases}$

(a) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Montrer que : $f\left(\dfrac{1}{p}\right)\leq\dfrac{1}{p+1}$.

RÉPONSE:

On calcule

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{p}\right) &= \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+1} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{p}+1+p}
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} > 0 &\implies p+1+\frac{1}{p} > p+1\\ &\implies f\left(\frac{1}{p}\right) < \frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

$* * *$

(b) En déduire par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

RÉPONSE:

- ***Initialisation :*** *Tout d'abord, on a bien* $u_0 = 1$ *et donc* $0 < u_0 \leq \dfrac{1}{0+1}$. *L'initialisation est vérifiée.*
- ***Hérédité :*** *On suppose que* $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ *pour un certain* $n \geq 0$. *Montrons que* $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$.

  D'après l'hypothèse de récurrence, et comme la fonction f *est croissante sur* $[0;1]$

$$\begin{aligned}0 < u_n \leq \frac{1}{n+1} &\implies 0 < f(u_n) < f\left(\frac{1}{n+1}\right)\\ &\implies 0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+1+1}\\ &\implies 0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

- ***Conclusion :***

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

$* * *$

(c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

RÉPONSE:

D'après la question précédente

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{par théorème d'encadrement, la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 0 .}}$

$* * *$

(d) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$. *D'après la question 2.b.,* $u_n \neq 0$. *Et ainsi*

$$\frac{1}{u_n} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n}$$
$$= u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}.}$

* * *

(e) En déduire, en utilisant le résultat de la question 2.b. : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

RÉPONSE:

- **Initialisation :** *Pour* $n = 1$

D'une part :

$$u_1 = f(u_0)$$
$$= \frac{1}{3}$$

D'où

$$\frac{1}{u_1} = 3$$

Et

$$1 + 1 + \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 3$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Supposons* $\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *et montrons* $\frac{1}{u_{n+1}} \leq n + 2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

On sait que
◇ *d'après la question 2.b.*

$$u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

◇ *par hypothèse de récurrence*

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

D'où, en sommant

$$u_n + \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{n+1} + 1 + n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Autrement dit, d'après la question précédente

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq n + 2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{u_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$

* * *

(f) i. Justifier que pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$: $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$.

RÉPONSE:

Soit $k \in [\![2;+\infty[\![$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, donc sur $[k-1;k]$ (puisque $k \geq 2$), on a :

$$\forall x \in [k-1;k], \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $k-1 \leq k$ (les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[k-1;k]$) on obtient :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

Autrement dit

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![2;+\infty[\![: \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx}$

* * *

ii. En déduire : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$.

RÉPONSE:

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. D'après la question précédente

$$\forall k \in [\![2;+\infty[\![, \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

D'où, en sommant de 2 à n

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

Et ainsi, d'après la relation de Chasles, licite car $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx &= [\ln(x)]_1^n \\ &= \ln(n)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in [\![2;+\infty[\![, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n).}$

* * *

(g) Déduire des questions précédentes : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![, n+1 \leq \frac{1}{u_n} \leq n+2+\ln(n)$

RÉPONSE:

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$.

- *D'après la question 2.b.*

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$

$$\frac{1}{u_n} \geq n+1$$

- *D'après la question 2.e.*

$$\frac{1}{u_n} \leq n+1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

Et ainsi, d'après la question précédente

$$\frac{1}{u_n} \leq n+2+\ln(n)$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in [\![2;+\infty[\![, n+1 \leq \frac{1}{u_n} \leq n+2+\ln(n).}$

* * *

(h) Conclure en donnant un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$ puis déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

RÉPONSE:

- *D'après la question précédente, on obtient*

$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![, 1+\frac{1}{n} \leq \frac{1}{nu_n} \leq 1+\frac{2}{n}+\frac{\ln(n)}{n}$$

Or, par croissance comparée : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. *D'où, par opérations*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}+\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n} = 1$$

D'où : $\frac{1}{nu_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

Et ainsi :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Lé résultat précédent porte sur

- *On a ainsi*
  $\diamond \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0; \frac{1}{n} > 0,$
  $\diamond u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n},$
  $\diamond$ *La série* $\sum_{n>1} \frac{1}{n}$ *est une série de Riemann divergente.*
  Par critère d'équivalence sur les séries à terme général positif, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ *est divergente*

  Rappel...

Conclusion : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \text{ et la série } \sum_{n>0} u_n \text{ est divergente.}}$

* * *

Exercice n°3

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "pile" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "face" à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X = 1)$.

RÉPONSE:

L'évènement $(X = 1)$ est réalisé lorsqu'on obtient "pile" dès le premier lancer , avec la pièce 0, ou la 1, ou la 2.
La formule des probabilités totales ,écrite avec le système complet d'événements (A_0, A_1, A_2) donne donc :
$P(X = 1) = P(P_1) = P_{A_0}(P_1).P(A_0) + P_{A_1}(P_1).P(A_1) + P_{A_2}(P_1).P(A_2)$

Et comme $P_{A_0}(P_1) = \frac{1}{2}$, $P_{A_1}(P_1) = 0$, $P_{A_2}(P_1) = 1$ *et* $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$,
on obtient : $\boxed{P(X = 1) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{3} + 1.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.\frac{3}{2} = \frac{1}{2}.}$

* * *

(b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, P(X = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

RÉPONSE:

La même formule des probabilités totales donne :

$P(X = n) = P_{A_0}(X = n).P(A_0) + P_{A_1}(X = n).P(A_1) + P_{A_2}(X = n).P(A_2)$

Pour $n \geqslant 2$:

- $P_{A_0}(X=n) = P_{A_0}(F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, *car c'est la probabilité d'avoir* $n-1$ *"face" puis un "pile" avec la pièce* 0*, les lancers étant indépendants une fois la pièce choisie.*
- $P_{A_1}(X=n) = 0$ *car la pièce 1 ne donne jamais "pile" .*
- $P_{A_2}(X=n) = 0$ *car la pièce 2 donne "pile" dès le premier coup.*

On a alors pour $n \geqslant 2$ *:*

$$\boxed{P(X=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{3} + 0.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

* * *

(c) En déduire la valeur de $P(X=0)$

RÉPONSE:

Calculons d'abord :

$$P(X \neq 0) = P(X=1) + \sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On a ici une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$*, convergente mais qui commence à* $n=2$ *.*

Donc $P(X \neq 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}.$

Par conséquent :

$$\boxed{P(X=0) = 1 - P(X \neq 0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.}$$

* * *

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer .

RÉPONSE:

La variable X *admet une espérance* $E(X)$ *si, et seulement si , la série* $\sum n.P(X=n)$ *est (absolument) convergente.*

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n.P(X=n) = 0 + 1.P(X=1) + \sum_{n=2}^{\infty} n.P(X=n) = 0 + 1.\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n.\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

C'est donc une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$*, donc convergente.*

Par suite $E(X)$ *existe et vaut :*

$$E(X) = 0 + 1.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\sum_{n=2}^{\infty} n.\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n.\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\right).$$

$$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1/2}{(1-1/2)^2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Soit $\boxed{E(X) = 1}$

* * *

3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \frac{4}{3}$.

RÉPONSE:

D'après le théorème de transfert, $X(X-1)$ possède une espérance ssi , la série qui définit $E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)$ est (absolument) convergente.

Or $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1).P(X=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

On a affaire à une série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison $\frac{1}{2}$, donc convergente et

$$E(X(X-1)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{(1-1/2)^3} = \frac{4}{3}.$$

On a donc $\frac{4}{3} = E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$

Et puisque $E(X)^2 = 1 = E(X)$ *, on a aussi* $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - E(X) = \frac{4}{3}$.

Soit $\boxed{V(X) = \frac{4}{3}}$

* * *

4. Justifier que Y suit la même loi que X.

RÉPONSE:

Par symétrie de "pile" et "face" dans la pièce 0 et par symétrie des deux pièces 1 et 2 , on pourrait déterminer la loi de Y pour montrer que c'est la même que celle de X.

* * *

5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X=1] \cap [Y=j]) = P([Y=j])$.

RÉPONSE:

Pour tout entier j supérieur ou égal à 2 :
Si $[Y=j]$ est réalisé , "face" n'arrive qu'au j-ième ($j \geqslant 2$) lancer ,alors on a eu "pile" au premier lancer et donc $[X=1]$ est réalisé .
Donc $[Y=j] \subset [X=1]$ et $[X=1] \cap [Y=j] = [Y=j]$.

Par suite : $\boxed{P([X=1] \cap [Y=j]) = P([Y=j]).}$
Si $i \geqslant 2$, on a de la même façon $[X=i] \cap [Y=1] = [X=i]$ (car si "pile" arrive au i-ième coup , le premier lancer est "face"), et donc $\boxed{P([X=i] \cap [Y=1]) = P([X=i]).}$

* * *

(b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X=i] \cap [Y=1]) = P([X=i])$.

RÉPONSE:

* * *

6. Loi de $X+Y$.

(a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

RÉPONSE:

X et Y étant des variables aléatoires entières positives ,$X+Y$ est aussi à valeurs entières positives

- la valeur 0 est impossible pour $X+Y$, car on a $X+Y=0$ ssi $(X=0$ et $Y=0)$, c'est impossible car cela signifie qu'on n'a que des "face" et que des "pile".

- de même, 2 est une valeur impossible pour $X+Y$ car
$[X+Y=2]=([X=0]\cap[Y=2])\cup([X=1]\cap[Y=1])\cup([X=2]\cap[Y=0])$.

Or , on ne peut avoir ni $([X=0]\cap[Y=2])$ (que des "face" et le premier "face" au 2-ième coup), ni $([X=1]\cap[Y=1])$ ("pile" et "face" au premier coup), ni $([X=2]\cap[Y=0])$ (le premier "pile" au 2-ième coup et que des "pile") . Donc $\boxed{[X+Y=2] \text{ est l'ensemble vide .}}$

* * *

(b) Montrer que $P(X+Y=1)=\dfrac{2}{3}$.

RÉPONSE:

On a : $P(X+Y=1)=P([X=0]\cap[Y=1])+P([X=1]\cap[Y=0])$.

Or $([X=0]\cap[Y=1])=[X=0]$ *(puisque "$X=0$" implique "$Y=1$")*
et de même , $([X=1]\cap[Y=0])=[Y=0]$ *("que des pile" implique "pile au premier coup").*

$$\text{Donc :}\quad \boxed{P(X+Y=1)=P([X=0])+P([Y=0])=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.}$$

* * *

(c) Justifier que , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X+Y=n)=([X=1]\cap[Y=n-1])\cup([Y=1]\cap[X=n-1])$$

RÉPONSE:

La famille (P_1,F_1) est un système complet d'événements donc :

$$\begin{aligned}(X+Y=n) &= ((P_1\cap[X+Y=n])\cup(F_1\cap[X+Y=n])\\ &= ([X=1]\cap[Y=n-X=n-1])\cup([Y=1]\cap[X=n-Y=n-1])\end{aligned}$$

On a donc bien , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\boxed{(X+Y=n)=([X=1]\cap[Y=n-1])\cup([Y=1]\cap[X=n-1])}$$

* * *

(d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P(X+Y=n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

RÉPONSE:

Par incompatibilité des événements on a, pour $n\geqslant 3$:
$P(X+Y=n)=P([X=1]\cap[Y=n-1])+P([Y=1]\cap[X=n-1])$.
Et d'après 5a) et 5b) : $P(X+Y=n)=P([Y=n-1])+P([X=n-1])=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

Et ,en conclusion : $\boxed{P(X+Y=n)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$

* * *

7. Informatique

8. Compléter le script `Python` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

RÉPONSE:

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
piece = rd.randint(0,3)
x=1
if piece==0:
        lancer=rd.randint(0,2)
        while lancer==0:
            lancer=rd.randint(0,2)
                x=x+1
elif piece==1:
        x=0
print(x)
```

* * *

9. Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

RÉPONSE:

Le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 n'est pas pris en compte car si `piece` *ne vaut ni 0, ni 1, c'est qu'il vaut 2 et alors on a "pile" du premier coup et X reste égal à 1, ce qui est bien la valeur correcte dans ce cas .*

* * *

Exercice n°4

1. Montrer que l'intégrale $p\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ est définie pour tout réel x.

RÉPONSE:

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$ *(car* $1+t^2>0$ *pour tout* $t\in\mathbb{R}$*). Donc, en particulier, quel que soit* x *réel, elle est définie et continue sur* $[x;2x]$ *(ou* $[2x;x]$ *si* $2x<x$*).*

On en déduit que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$ *est bien définie quel que soit* x *réel.*

* * *

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

2. Etablir que f est impaire.

RÉPONSE:

Pour tout x réel, on a $f(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$. On effectue alors le changement de variable affine $u=-t$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{x}^{2x}\frac{1}{\sqrt{1+(-u)^2}}(-du) \\ &= -\int_{x}^{2x}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{f \text{ est une fonction impaire}}$.

* * *

3. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

RÉPONSE:

La fonction $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive g sur $\mathbb{R}$ (qui est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée est continue). Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x}^{2x}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt \\ &= \Big[g(t)\Big]_x^{2x} \\ &= g(2x)-g(x) \end{aligned}$$

Or, la fonction $x\mapsto g(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Donc, comme différence de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

* * *

(b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

RÉPONSE:

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f(x)=g(2x)-g(x)$, avec g une primitive de $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ (cf question précédente). Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f'(x)=2g'(2x)-g'(x)$, i.e :

$$\boxed{f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

On étudie le signe de $f'(x)$. Pour cela, on met au même dénominateur :

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{4+4x^2}-\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}}$$

Le dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)$ est du signe du numérateur. Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $0\leqslant 1+4x^2<4+4x^2$. Donc, par stricte croissance de la racine carrée sur $[0;+\infty[$: $\sqrt{1+4x^2}<\sqrt{4+4x^2}$. Ce qui implique $\sqrt{4+4x^2}-\sqrt{1+4x^2}>0$ et donc $f'(x)>0$.
On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

* * *

4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$

RÉPONSE:

Pour tout $t>0$, on a :

$$0 < t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$$

Donc, en prenant la racine carrée :

$$0 < t \leqslant \sqrt{t^2+1} \leqslant t+1$$

Puis l'inverse :

$$\frac{1}{t+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leqslant \frac{1}{t}$$

Maintenant, soit $x>0$ quelconque. Alors $0<x<2x$. Donc on peut intégrer l'encadrement ci-dessus sur l'intervalle $[x;2x]$:

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$$

C'est-à-dire :

$$\Big[\ln(t+1)\Big]_x^{2x} \leqslant f(x) \leqslant \Big[\ln(t)\Big]_x^{2x}$$

Et comme $\Big[\ln(t+1)\Big]_x^{2x} = \ln(2x+1) - \ln(x+1)$ et $\Big[\ln(t)\Big]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln(2)$, on en déduit :

$$\boxed{\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)}$$

* * *

(b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

Pour tout $x>0$, on a :

$$\begin{aligned}\ln(2x+1) - \ln(x+1) &= \left(\ln(x) + \ln\left(2+\tfrac{1}{x}\right)\right) - \left(\ln(x) + \ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\right)\\ &= \ln\left(2+\tfrac{1}{x}\right) - \ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

On en déduit que $\ln(2x+1) - \ln(x+1) \underset{x}{\longrightarrow} +\infty \ln(2) - \ln(1)$ (car $\dfrac{1}{x} \underset{x}{\longrightarrow} +\infty 0$), c'est-à-dire : $\ln(2x+1) - \ln(x+1) \underset{x}{\longrightarrow} +\infty \ln(2)$.
D'après la question précédente, on en déduit, par encadrement :

$$\boxed{f(x) \underset{x}{\longrightarrow} +\infty \ln(2)}$$

* * *

(c) Dresser le tableau de variation complet de f.

RÉPONSE:

Comme la fonction f est impaire et vérifie $f(x) \underset{x}{\longrightarrow} +\infty \ln(2)$, on a également $f(x) \underset{x}{\longrightarrow} -\infty - \ln(2)$. On en déduit (avec la question 3.b) le tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-\ln(2) \nearrow \ln(2)$

$* * *$

(d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

RÉPONSE:

La fonction f est continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ et est strictement croissante. Donc, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$, i.e de $\mathbb{R}$ sur $]-\ln(2);\ln(2)[$. Or, 0 appartient à $]-\ln(2);\ln(2)[$. Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, on a immédiatement $f(0) = 0$ (intégrale sur un intervalle réduit à un point).

Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle qui est $x = 0$.

$* * *$

5. (a) Montrer que pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

RÉPONSE:

- *Si $x \geqslant 0$, alors on a immédiatement $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ car $x \geqslant 0$ et $\sqrt{x^2+1} \geqslant 1 > 0$.*
- *Si $x < 0$, alors $0 < x^2 < x^2 + 1$. Donc, en prenant la racine carrée : $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$, c'est-à-dire (puisque $x < 0$) : $-x < \sqrt{x^2+1}$. On en déduit que $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.*

Donc, dans tous les cas, on a bien $\boxed{x + \sqrt{x^2+1} > 0 \text{ quel que soit } x \text{ réel}}$.

$* * *$

(b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

RÉPONSE:

La fonction h est bien définie sur $\mathbb{R}$ (d'après la question précédente), et elle y est dérivable (par opérations sur les fonctions dérivables). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a (d'après la formule $(\ln \circ u)' = \dfrac{u'}{u}$) :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Les $x + \sqrt{x^2+1}$ se simplifient et il reste :

$$\boxed{h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

$* * *$

(c) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.

RÉPONSE:

D'après la question précédente (et la définition de f), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \Big[h(t)\Big]_x^{2x} = h(2x) - h(x)$$

C'est-à-dire, d'après l'expression de h :

$$\boxed{f(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

* * *

6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

   (a) Etablir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = p\displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)} dt$

RÉPONSE:

Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
x - f(x) &= \int_x^{2x} 1\,dt - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\
&= \int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right) dt \\
&= \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\
&= \int_x^{2x} \frac{\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} dt \\
&= \int_x^{2x} \frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} dt
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien :

$$\boxed{x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} dt}$$

* * *

   (b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3$$

RÉPONSE:

Soit $x > 0$ quelconque. Pour tout t réel, on a $\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \geqslant 0$ (tous les termes qui interviennent dans la fraction sont positifs). Donc, en intégrant sur l'intervalle $[x; 2x]$ (on a bien $x \leqslant 2x$ car $x \geqslant 0$) :

$$\int_x^{2x} 0\,dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} dt$$

C'est-à-dire (d'après la question précédente) :

$$\boxed{0 \leqslant x - f(x)}$$

Montrons maintenant l'autre inégalité. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t^2 + 1 \geqslant 1$ et donc $\sqrt{t^2+1} \geqslant 1$. Par conséquent :

$$\sqrt{t^2+1} \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{t^2+1} + 1 \geqslant 2$$

En multipliant ces deux inégalités, on obtient alors :

$$\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right) \geqslant 2$$

Et on en déduit :

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \leqslant \frac{t^2}{2}$$

D'où, en intégrant sur l'intervalle $[x; 2x]$:

$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{t^2}{2} dt$$

C'est-à-dire :

$$x - f(x) \leqslant \left[\frac{t^3}{6}\right]_x^{2x}$$

Ou encore :

$$\boxed{x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3}$$

Conclusion : en combinant les deux inégalités démontrées ci-dessus, on a, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3}$$

* * *

(c) Conclure que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.

RÉPONSE:

D'après l'encadrement ci-dessus, on a, pour tout $x > 0$:

$$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{7}{6}x^3$$

Donc, en divisant par x (qui est strictement positif) :

$$1 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant 1 + \frac{7}{6}x^2$$

On en déduit que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x}{\longrightarrow} 0^+1$, ce qui peut encore s'écrire :

$$\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} x}$$

* * *

(d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.

RÉPONSE:

Pour tout $x < 0$, *on a :*

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{-f(-x)}{x} \quad \textit{par imparité de } f \\ &= \frac{f(-x)}{-x} \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $\dfrac{f(-x)}{-x} \underset{x}{\longrightarrow} 0^{-}1$ *(car* $-x$ *tend vers* 0 *par valeurs positives quand* x *tend vers* 0 *par valeurs négatives). Donc* $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x}{\longrightarrow} 0^{-}1$*, ce qui peut encore s'écrire :*

$$\boxed{f(x) \underset{0^-}{\sim} x}$$

Et on peut éventuellement combiner les deux résultats précédents en écrivant :

$$\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} x}$$

* * *