Épreuve Composite

E C G

DS n°2

Option économique

MATHEMATIQUES

21 Septembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Les questions précédées de (*) sont destinées aux cubes.

Exercice 1

On définit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on introduit les deux sous-ensembles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définis par :

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : MK = KM = M\}, \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : {}^tM = M\right\}$$

1. Étude de K.
   (a) Calculer K^2. En déduire, sans calcul supplémentaire, que K est inversible et expliciter K^{-1}.
   (b) $(*)$ Justifier que K est diagonalisable. En déduire, sans calcul, le spectre de K.
   (c) Déterminer une base de $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : KX = \lambda X\}$ pour $\lambda = 1$ puis $\lambda = -1$.
   Que vaut $\dim(E_1) + \dim(E_{-1})$?
2. (a) Montrer que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$ sont des espaces vectoriels .
   (b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de $\mathcal{E}$ n'est inversible.
   (c) Montrer que si $M \in \mathcal{E}$, alors $M^n \in \mathcal{E}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Montrer que si $M \in \mathcal{S}$, alors $M^n \in \mathcal{S}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la famille (A, B, C, D) formée des matrices définies ci-dessous est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{E}$. Cette famille en forme-t-elle une base ? Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

5. Déterminer une base, et la dimension, de $\mathcal{S}$.
6. On considère l'ensemble $\mathcal{K} = \mathcal{E} \cap \mathcal{S}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel et que $(A, B+C, D)$ en forme une base.
   (b) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{K}$, il existe trois suites $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}, (z_n)_{n\geq 1}$ telles que,
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M^n = x_n A + y_n (B+C) + z_n D$$
7. On introduit alors la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $T \in \mathcal{K}$ et donner ses coordonnées dans la base $(A, B+C, D)$.
   (b) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$T^n = x_n A + z_n D$$
   où $x_{n+1} = 6x_n$ et $z_{n+1} = 2z_n$.
   (c) En déduire l'expression du terme général de (x_n), de (z_n) puis l'expression de T^n.
8. Une suite de matrices colonnes : On introduit les matrices colonnes $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et on considère la suite de matrices colonnes (U_n) définie par son premier terme U_1 et la relation de récurrence, pour $n \geq 1$,
   $$U_{n+1} = TU_n + V$$
   (a) Montrer que $I - T$ est inversible et calculer son inverse avec un pivot de Gauss.
   (b) Déterminer une matrice colonne L telle que $L = TL + V$.
   (c) Vérifier que $U_{n+1} - L = T(U_n - L)$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$U_n - L = T^{n-1}(U_1 - L)$$
   (d) En déduire l'expression de U_n, pour $n \geq 1$.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. (a) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Étudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement les limites obtenues.
   (c) Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 , notée $\mathscr{T}_0$
   (d) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{T}_0$.
   (e) En utilisant les résultats précédents, représenter, dans un repère judicieusement choisi, l'allure de $\mathscr{C}_f$
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $f\left(\dfrac{1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p+1}$.
   (b) En déduire par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

(d) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

(e) En déduire, en utilisant le résultat de la question 2.b. : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(f) i. Justifier que pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$: $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$.

ii. En déduire : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$.

(g) Déduire des questions précédentes : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![, n + 1 \leq \dfrac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$

(h) Conclure en donnant un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$ puis déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exercice 3

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\dfrac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\dfrac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "pile" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "face" à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer, à l'aide des probabilités totales, $P(X = 1)$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, P(X = n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   (c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer .
3. Montrer que $X(X - 1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \dfrac{4}{3}$.
4. Justifier que Y suit la même loi que X.
5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P([Y = j])$.
   (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P([X = i])$.
6. Loi de $X + Y$.
   (a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
   (b) Montrer que $P(X + Y = 1) = \dfrac{2}{3}$.
   (c) Justifier que , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
   $$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$
   (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :
   $$P(X + Y = n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7. **Informatique :** On rappelle que , pour tous entiers naturels a et b, l'instruction `rd.randint(a,b)` renvoie un entier aléatoire compris entre a et $b-1$ (ceci de façon équiprobable).
On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0 .
   (a) Compléter le script `Python` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
piece = rd.randint(...)
x=1
if piece==0:
        lancer=rd.randint(...)
        while lancer==0:
            lancer=...
                x=...
elif piece==1:
        x=...
print(x)
```

   (b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Exercice 4

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ est définie pour tout réel x. On considère désormais la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$$
2. Etablir que f est impaire.
3. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$
   (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de f.
   (d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. (a) Montrer que pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   (b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
   (c) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.
6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.
   (a) Etablir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}dt$
   (b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \dfrac{7}{6}x^3$.
   (c) Conclure que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.
   (d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.