MATHÉMATIQUES II - ESSEC E 2021

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Première partie : Comportement asymptotique des temps de panne

1. a) i. Soit r un entier naturel tel que $1 \leqslant r \leqslant 4$: on sait que X_1 est à valeurs positives, et on va distinguer deux cas :
      - Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $0 \leqslant X_1(\omega) \leqslant 1$, on a $X_1^r(\omega) \leqslant 1 \leqslant 1 + X_1^4(\omega)$.
      - Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X_1(\omega) \geqslant 1$, on a $X_1^r(\omega) \leqslant X_1^4(\omega)$ puisque $r \leqslant 4$, donc $X_1^r(\omega) \leqslant 1 + X_1^4(\omega)$.

      Ainsi : $\forall \omega \in \Omega,\ X_1^r(\omega) \leqslant 1 + X_1^4(\omega)$, ce qui signifie que $X_1^r \leqslant 1 + X_1^4$.

   ii. Puisque d'après l'énoncé X_1 admet un moment d'ordre 4, alors $\mathbb{E}(X_1^4 + 1)$ existe et vaut $\mathbb{E}(X_1^4) + 1$ par linéarité de l'espérance.

      L'énoncé admet lui-même la propriété qui permet d'en déduire, au vu de l'inégalité précédente, que $\mathbb{E}(X_1^r)$ existe pour tout $r \in \{1, 2, 3\}$.

      Tout au long du problème, $\mu = \mathbb{E}(X_1)$.

   iii. La variable aléatoire X_1 est à valeurs positives, donc $\mu \geqslant 0$ par positivité de l'espérance. De plus, supposer $\mu = 0$ impliquerait que X_1 soit presque-sûrement nulle, ce qui n'est pas le cas : l'énoncé précise bien que $\mathbb{P}(X_1 = 0) < 1$. On en déduit que $\mu > 0$.

   iv. Si on développe avec la formule du binôme de Newton :

$$(X_1 - \mu)^4 = X_1^4 - 4\mu X_1^3 + 6\mu^2 X_1^2 - 4\mu^3 X_1 + \mu^4,$$

      donc $(X_1 - \mu)^4$ est une combinaison linéaire des puissances X_1^r pour $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dont on vient de voir qu'elles admettent toutes une espérance : on en déduit, par linéarité de l'espérance, que $\mathbb{E}\big((X_1 - \mu)^4\big)$ existe, c'est-à-dire que $X_1 - \mu$ admet un moment d'ordre 4.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements telle que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge.

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k \right) \iff B_n = A_n \cup B_{n+1}$. L'union de deux parties contient toujours chacune des deux parties, donc en effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_{n+1} \subset B_n$.

   On pose $B = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.

   b) Montrons l'équivalence demandée par double implication :
   - Soit $\omega \in B$ quelconque ; par définition de l'intersection infinie, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \omega \in B_n$. Et par définition de B_n : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geqslant n$ tel que $\omega \in A_k$.

     Si ω appartenait à A_k pour un nombre seulement fini de valeurs de k : alors on pourrait noter $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ces valeurs dans l'ordre strictement croissant (avec $m \in \mathbb{N}^*$ fixé). Dans ce cas,

© Major-Prépa

pour $N = k_m + 1 > k_m$, ω n'appartient à aucun des A_k pour $k \geqslant N$, donc ω n'appartient à pas à B_N, ce qui est contradictoire avec son appartenance à B.

Donc : $\omega \in B$ implique le fait que ω appartient à une infinité de valeurs de k.

- Réciproquement, si ω appartient à A_k pour une infinité de valeurs de k, alors : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \geqslant n$ tel que $\omega \in A_k$. En effet, si pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, ω n'appartenait à aucun des A_k pour $k \geqslant n$, cela signifierait que ω n'appartient qu'à des événements A_k d'indices compris entre 1 et $n-1$, ce qui représenterait un nombre fini seulement d'événements.

  Donc, si ω appartient à A_k pour une infinité de valeur de k : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \geqslant n$ tel que $\omega \in A_k$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in B_n$, et par conséquent $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$.

On a bien démontré l'équivalence par double implication.

c) On a vu à la question a) que pour tout $n \geqslant 1$, $B_{n+1} \subset B_n$, ce qui signifie que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion.
La propriété de limite monotone pour les probabilités s'applique donc, qui donne :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\Big) = \mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

d) Si C et D sont deux événements, alors on sait d'après la formule du crible pour deux parties, que : $\mathbb{P}(C \cup D) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(C \cap D)$. Puisque $\mathbb{P}(C \cap D) \geqslant 0$ étant donné qu'il s'agit d'une probabilité, on en déduit bien que $\mathbb{P}(C \cup D) \leqslant \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D)$.

e) Par une récurrence classique, le résultat précédent se généralise de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour toute famille finie $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ de n événements du même espace probabilisé, on a $\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k\Big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C_k)$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $N > n$, $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{k=n}^{N} A_k) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)$.

Comme $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\big(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k\big) = \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{k=n}^{N} A_k\Big)$ et puisque la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge, alors on peut passer à la limite dans l'expression précédente lorsque N tend vers $+\infty$, ce qui donne bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

f) Toujours parce que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge, alors le *reste* de la série, à savoir $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$, tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Pour s'en convaincre, il suffit d'écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_k)$: la somme partielle tend vers la somme totale quand n tend vers $+\infty$, donc la différence tend vers 0.

Par ailleurs une probabilité est toujours positive : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \mathbb{P}(B) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$, donc par encadrement, lorsque n tend vers $+\infty$: $\mathbb{P}(B) = 0$.

3. Soit $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, centrées et de même loi.
Attention ! L'énoncé disait aussi que les variables aléatoires étaient positives, mais cette hypothèse non nécessaire vide de leur sens les questions suivantes : une variable positive et centrée est presque sûrement nulle, ce qui rend triviales toutes les questions qui viennent !

© Major-Prépa

a) La forme de la probabilité concernée par cette question, ressemble à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : au vu des hypothèses faites sur les variables $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, la variable aléatoire $\dfrac{\Sigma_n}{n}$ admet une espérance et une variance :

$$\mathbb{E}\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(Y_k) \qquad \text{par linéarité de l'espérance, et parce que les } (Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ sont centrées.}$$

$$\mathbb{V}\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{par indépendance mutuelle des } (Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{\Sigma_n}{n}-0\Big|>\varepsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2} \iff \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{\Sigma_n}{n}\Big|>\varepsilon\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Comme une probabilité est toujours positive, et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}=0$, le théorème d'encadrement donne bien : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{\Sigma_n}{n}\Big|>\varepsilon\Big)=0.$

b) Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.

i. La variable aléatoire $\Big|\dfrac{\Sigma_n}{n}\Big|$ est positive, donc par stricte croissance et bijectivité de la fonction puissance quatrième, de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, on a bien :

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{\Sigma_n}{n}\Big|>\varepsilon\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{\Sigma_n}{n}\Big|^4>\varepsilon^4\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big)^4>\varepsilon^4\Big).$$

ii. On utilise alors ici l'inégalité de Markov (Qui n'est pas officiellement au programme de ECE2, mais fait partie des grands classiques à connaître pour les épreuves parisiennes) : pour toute variable aléatoire positive X, d'espérance non nulle, on a pour tout $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\mathbb{P}(X>\alpha)\leqslant\frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}.$$

Cette inégalité s'applique ici avec $X=\Big(\dfrac{\Sigma_n}{n}\Big)^4$ qui est bien positive, et $\alpha=\varepsilon^4>0$, pour donner directement :

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{\Sigma_n}{n}\Big|>\varepsilon\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big)^4>\varepsilon^4\Big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^4}\cdot\mathbb{E}\Big(\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big)^4\Big).$$

iii. Question calculatoire très difficile (et hors-programme) : on peut commencer par se rappeler qu'en généralisant l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (où a et b sont deux réels), on peut écrire :

$$\Sigma_n^2 = (Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)^2 = \sum_{k=1}^{n}Y_k^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}Y_kY_j.$$

Le carré de la somme est la somme des carrés, auxquels s'ajoutent tous les doubles produits. Ainsi :

$$\Sigma_n^4 = \Sigma_n^2\times\Sigma_n^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n}Y_k^2+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}Y_kY_j\Big)\times\Big(\sum_{i=1}^{n}Y_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\\ell\neq i}}^{n}Y_iY_\ell\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}Y_k^2Y_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}Y_i^2Y_kY_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\\ell\neq i}}^{n}Y_kY_jY_iY_\ell,$$

© Major Prépa

où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} Y_k^2 Y_i^2 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^4 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} Y_k^2 Y_j^2$,

puis $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} Y_i^2 Y_k Y_j = \sum_{k=1}^{n} Y_k\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} Y_i^3\Big) + \sum_{k=1}^{n} Y_k\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} Y_i^2 Y_j\Big)$ est de la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k W_k$,
où W_k est une fonction des variables $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, à l'exclusion de Y_k.

Enfin : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n} Y_k Y_j Y_i Y_\ell = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} Y_k^2 Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{n} Y_k Y_j Y_i Y_\ell$,
donc la somme des trois termes est bien de la forme :

$$(\Sigma_n)^4 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^4 + 3\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} Y_k^2 Y_j^2 + \sum_{k=1}^{n} Y_k W_k,$$

où W_n dépend des $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à l'exception de Y_k.

iv. Les données de l'énoncé, la linéarité de l'espérance et la mutuelle indépendance des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ assurent alors que $\mathbb{E}\big((\Sigma_n)^4\big)$ existe et vaut :

$$\mathbb{E}\big((\Sigma_n)^4\big) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(Y_k^4) + 3\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\mathbb{E}(Y_k^2)\mathbb{E}(Y_j^2) + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(Y_k)\mathbb{E}(W_k).$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires Y_k et $W_k$sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. Comme de plus, Y_k est centrée, alors $\mathbb{E}(Y_k) = 0$ et $\mathbb{E}(Y_k^2) = \mathbb{V}(Y_k)$ puisque $\mathbb{E}(Y_k) = 0$. On en déduit, avec les notations de l'énoncé :

$$\mathbb{E}\big((\Sigma_n)^4\big) = n\rho^4 + 3\cdot n\cdot(n-1)\cdot(\sigma^2)^2 + 0 = n\rho^4 + 3n(n-1)\sigma^4.$$

En effet, la première somme comprend n termes tous égaux à ρ^4, et les double somme qui suit contient $n(n-1)$ termes tous égaux à σ^4 : le premier indice k prend n valeurs distinctes, et le second j ne prend que $(n-1)$ valeurs distinctes seulement, puisque $j\neq k$.

v. Au vu du résultat précédent, et par linéarité de l'espérance encore :

$$n^2\mathbb{E}\Big(\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big)^4\Big) = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}((\Sigma_n)^4) = \frac{\rho^4}{n} + 3\big(1-\frac{1}{n}\big)\sigma^4.$$

Il est donc clair que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2\mathbb{E}\Big(\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big)^4\Big) = 3\sigma^2$, la suite est convergente, de limite strictement positive : toute suite convergente est bornée, donc il existe bien $C>0$ tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n^2\mathbb{E}\Big(\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big)^4\Big)\leqslant C \iff \mathbb{E}\Big(\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big)^4\Big)\leqslant\frac{C}{n^2}.$$

Remarque : on aurait aussi pu directement trouver un majorant, puisque pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle n^2\mathbb{E}\Big(\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big)^4\Big) = \frac{\rho^4}{n} + 3\big(1-\frac{1}{n}\big)\sigma^4 \leqslant \rho^4 + 3\sigma^4$: $C = \rho^4 + 3\sigma^4 > 0$ convient.

vi. Avec $\varepsilon = \dfrac{1}{n^{1/8}} > 0$, les résultats de ii. et de v. se combinent pour donner :

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{\Sigma_n}{n}\Big| > \varepsilon\Big) \leqslant \frac{1}{(1/n^{1/8})^4}\cdot\mathbb{E}\Big(\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big)^4\Big) = n^{1/2}\cdot\mathbb{E}\Big(\Big(\frac{\Sigma_n}{n}\Big)^4\Big) \leqslant n^{1/2}\cdot\frac{C}{n^2} = \frac{C}{n^{3/2}}.$$

© Major-Prépa

4. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $A_n = \left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| > \frac{1}{n^{1/8}}\right]$.

   a) Le résultat de la question précédente se réécrit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(A_n) \leqslant \frac{C}{n^{3/2}}$.

   Or une probabilité est toujours positive, et $\frac{C}{n^{3/2}}$ est, à un facteur constant positif près, le terme général d'une série de Riemann convergente puisque $\frac{3}{2} > 1$. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure alors que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ est convergente.

   b) On vient donc de vérifier la seule hypothèse de départ faite au début de la question 2. : la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge, qui a conduit à prouver que l'événement B, qui peut se formuler : « A_n se produit pour une infinité de valeurs », est de probabilité nulle.

   c) D'après ce qui précède, il est donc presque certain que seul un nombre fini d'événements A_n se produisent. Ainsi : $\mathbb{P}\Big(\exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geqslant N, \overline{A_n} = \left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^{1/8}}\right] \text{ est réalisé}\Big) = 1$.

   Or : $\forall n \geqslant N,\ \left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^{1/8}}\right]$ implique $\left[\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\right]$ (toujours par encadrement), donc :

$$1 = \mathbb{P}\Big(\exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geqslant N, \left[\left|\frac{\Sigma_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n^{1/8}}\right] \text{ est réalisé}\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\Big[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\Big]\Big) \leqslant 1,$$

   donc $\mathbb{P}\Big(\Big[\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\Big]\Big) = 1$.

   d) En revenant aux variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$: si on pose $Y_k = X_k - \mu$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors la suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifient toutes les hypothèses nécessaires pour que le raisonnement précédent s'applique : variables centrées ($\mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(X_k - \mu) = \mathbb{E}(X_k) - \mu = \mu - \mu = 0$), mutuellement indépendantes admettant un moment d'ordre 4 (voir 1.a) iv.) , et donc la conclusion de la question précédente reste valable avec ces variables.

   En remarquant que dans ce cas, pour tout $n\mathbb{N}^*$, $\frac{\Sigma_n}{n} = \frac{S_n - n\cdot\mu}{n} = \frac{S_n}{n} - \mu$, on peut alors écrire :

$$\mathbb{P}\Big(\Big[\lim_{n\to+\infty} \frac{\Sigma_n}{n} = 0\Big]\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big[\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\Big]\Big) = 1.$$

5. a) Pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1}(\omega) = S_n(\omega) + X_{n+1}(\omega) \geqslant S_n(\omega)$ puisque X_{n+1} est à valeurs positives. La suite $\big(S_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bien croissante'.

   D'après le théorème de limite monotone, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\omega)$ existe donc pour tout $\omega \in \Omega$, est est soit finie, soit égale à $+\infty$. Dans les deux cas, on note $S_\infty(\omega) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\omega)$.

   b) Il est clair que si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(\omega) = S_\infty(\omega)$ est finie (et dans ce cas appartient à $\mathbb{R}_+$), alors par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$.

   c) Or on a vu à la question 4.d), que $\mathbb{P}\Big(\Big[\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\Big]\Big) = 1$, avec $\mu > 0$: on en déduit que $\mathbb{P}\Big(\Big[\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0\Big]\Big) = 0$, et comme $0 \leqslant \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega |\ S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+\}\big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\Big[\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0\Big]\Big)$ à cause de la relation d'implication précédente, alors l'événement $\{\omega \in \Omega |\ S_\infty(\omega) \in \mathbb{R}_+\}$ est négligeable (de probabilité nulle), et au contraire :

$$\mathbb{P}(S_\infty = +\infty) = 1.$$

Deuxième partie : le processus de renouvellement

6. a) Soient s et t deux réels tels que $0 \leqslant s \leqslant t$. Pour presque-tout $\omega \in \Omega$, $k = N_s(\omega)$ vérifie $S_k(\omega) \leqslant s$, donc $S_k(\omega) \leqslant t$ par transitivité de l'inégalité. Par conséquent, $N_t(\omega) = \max\{k \in \mathbb{N}\,;\ S_k(\omega) \leqslant t\}$ est supérieur ou égal à $k = N_s(\omega)$, ce qui assure bien que presque sûrement, $N_s \leqslant N_t$.

© Major-Prépa

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. L'événement $[N_t \geqslant n]$ est réalisé si et seulement si le plus grand entier k tel que $S_k \leqslant t$, est supérieur ou égal à n. C'est donc vrai si et seulement si au rang n, S_n est encore inférieur ou égal à t.

L'équivalence obtenue signifie bien l'égalité des événements $[N_t \geqslant n]$ et $[S_n \leqslant t]$.

c) Pour $\omega \in \Omega$ donné : on a vu à la question a) que pour tous réels s et t tels que $s \leqslant t$, on a $N_s(\omega) \leqslant N_t(\omega)$, c'est-à-dire que la fonction $t \mapsto N_t(\omega)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de limite monotone, $\lim\limits_{t \to +\infty} N_t(\omega)$ existe (et est éventuellement infinie).

On note $N_\infty(\omega)$ cette limite.

d) Soient $\omega \in \Omega$ et $K \in \mathbb{N}$. On suppose que $N_\infty(\omega) = K$.

i. Il ne faut pas oublier ici que $N_t(\omega)$ est toujours un entier naturel. Ainsi, en reprenant la définition de $\lim\limits_{t \to +\infty} N_t(\omega) = K$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, T \in \mathbb{R}_+ \,;\ \forall t \geqslant T,\ K - \varepsilon \leqslant N_t(\omega) \leqslant K + \varepsilon.$$

Il suffit alors de prendre par exemple, $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$: il existe $T_\omega > 0$ tel que

$$\forall t \geqslant T_\omega,\ K - \tfrac{1}{2} \leqslant N_t(\omega) \leqslant K + \tfrac{1}{2}.$$

Comme $N_t(\omega)$ et K sont tous deux des entiers qui sont à une distance inférieure à $\frac{1}{2}$, la seule possibilité est :

$$\forall t \geqslant T_\omega,\ N_t(\omega) = K.$$

ii. Ainsi pour $t = T_\omega$, $K = N_t(\omega)$ est le plus grand entier tel que $S_K(\omega) \leqslant t$: on a donc $S_K(\omega) \leqslant T_\omega$, tandis que pour tout $t \geqslant T_\omega$, $K+1$ est le premier entier tel que $S_{K+1}(\omega)$ n'est plus inférieur à t, donc : $S_{K+1}(\omega) > t$.

iii. En en déduit que pour tout $t \geqslant T_\omega$, $-S_K(\omega) \geqslant T_\omega$ et $S_{K+1}(\omega) - S_K(\omega) > t - T_\omega$ pour tout $t \geqslant T_\omega$, ce qui revient à dire que $S_{K+1}(\omega) - S_K(\omega) = X_{K+1}(\omega) > t$ pour tout réel t positif (en effet, $t \geqslant T_\omega \iff t - T_\omega \geqslant 0$).

Cela signifierait que $X_{K+1}(\omega)$ est supérieur à tout réel positif t, ce qui voudrait dire que X_{K+1} est presque-sûrement infinie, ce qui est absurde pour une variable aléatoire !

iv. Il est donc impossible que $N_\infty(\omega)$ soit égale à un entier K : comme il s'agit de la limite d'une fonction croissante à valeurs entières, la seule possibilité est que $N_\infty(\omega) = +\infty$, et ce presque-sûrement :

$$\mathbb{P}(N_\infty = +\infty) = 1.$$

7. Le script suivant doit simplement, pour une valeur positive donnée de `t`, additionner des valeurs simulées successives de la variable aléatoire X, tant que cette somme reste inférieure à `t`, tout en comptant le nombre de ces simulation : c'est ce nombre que renvoie la fonction.

```
function N = Renouvellement(t)
    N = 0;
    S = 0;
    while S <= t
        S = S + X()
        N = N+1
    end
endfunction
```

8. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'égalité d'événements évidente :
$[N_t \geqslant n] = [N_t = n] \cup [N_t > n]$ se réécrit aussi : $[N_t \geqslant n] = [N_t = n] \cup [N_t \geqslant n+1]$ puisque N_t est à valeur entière. Comme l'union est disjointe, on a donc :

$$\mathbb{P}(N_t \geqslant n) = \mathbb{P}(N_t = n) + \mathbb{P}(N_t \geqslant n+1) \iff \mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \geqslant n) - \mathbb{P}(N_t \geqslant n+1).$$

© Major-Prépa

b) Pour tout réel $t \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n(t) = \mathbb{P}(S_n \leqslant t)$.

i. Pour tout réel $t \geqslant 0$: $F_0(t) = \mathbb{P}(S_0 \leqslant t) = 1$ puisque S_0 est, par convention, la variable certaine nulle.

Pour tout réel $t \geqslant 0$: $F_1(t) = \mathbb{P}(S_1 \leqslant t) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant t) = F(t)$ avec les notations introduites en début d'énoncé.

ii. En reprenant le résultat de la question a), et d'après l'égalité d'événements obtenue à la question 6.b) : pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \geqslant n) - \mathbb{P}(N_t \geqslant n+1) = \mathbb{P}(S_n \leqslant t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant t) = F_n(t) - F_{n+1}(t).$$

9. Soient U, V, U', V' quatre variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que U et U' suivent la même loi et que pour tous entiers naturels k et j tels que $\mathbb{P}(U = k) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}_{[U=k]}(V = j) = \mathbb{P}_{[U'=k]}(V' = j).$$

Pour tout j de $\mathbb{N}$, on calcule alors $\mathbb{P}(V = j)$ avec la formule des probabilités totales et le système complet d'événements $\big([U = k]\big)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\mathbb{P}(V = j) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{[U=k]}(V = j) \cdot \mathbb{P}(U = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{[U'=k]}(V' = j) \cdot \mathbb{P}(V' = j) = \mathbb{P}(V' = j),$$

d'après l'hypothèse faite et puisque $\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(U' = k)$ vu que U et U' suivent la même loi.

10. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
On note $W = \min\{k \in \mathbb{N}^* \,;\ Z_k = 1\}$.

a) On reconnaît dans la définition de W, celle du temps d'attente d'un premier succès (l'événement $[Z_k = 1]$) dans une répétition d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même probabilité de succès p.
Donc W suit la loi géométrique de paramètre p : $\quad \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(W = i) = p(1-p)^{i-1}$.

On pouvait d'ailleurs retrouver directement ce résultat en écrivant :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad [W = i] = [Z_1 = 0] \cap \ldots \cap [Z_{i-1} = 0] \cap [Z_i = 1]$$

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \,;\ \sum_{l=1}^{k} Z_l = n\right\}$.

i. Par définition, W_n est donc le nombre minimal de variables Z_l qu'il faut additionner pour atteindre la valeur n, ou en d'autres termes, c'est le temps d'attente du n-ième succès.

Par conséquent, pour tout $k \geqslant n$, l'événement $[W_n = k]$ est réalisé si et seulement si au cours des k premières épreuves, on a totalisé $n-1$ succès et la k-ième épreuve est un succès.

Ainsi, pour tout $k \geqslant n$: $\quad [W_n = k] = \left[\sum_{l=1}^{k-1} Z_l = n-1\right] \cap [Z_k = 1]$.

Or la variable aléatoire $\sum_{l=1}^{k-1} Z_l$ est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès (soit $[Z_l = 1]$) obtenus en $k-1$ épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes, de même probabilité de succès p ; elle suit donc la loi binômiale de paramètres $(k-1, p)$, et elle est de plus indépendante de Z_k d'après le lemme des coalitions. Ainsi :

$$\forall k \geqslant n, \quad \mathbb{P}(W_n = k) = \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{k-1} Z_l = n-1\right) \times \mathbb{P}(Z_k = 1) = \binom{k-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^{k-1-(n-1)} \cdot p$$
$$= \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

© Major-Prépa

ii. Là encore il faut soigneusement interpréter la probabilité demandée pour pouvoir ensuite la calculer : pour $k \geqslant n$ et $j \geqslant k+1$, $\mathbb{P}_{[W_n=k]}(W_{n+1}=j)$ est la probabilité qu'après avoir attendu k essais pour obtenir n succès, on attende j essais en tout, donc $j-k$ essais supplémentaires pour atteindre $(n+1)$ succès. En clair :

$$\begin{aligned}\forall k \geqslant n,\ \forall j \geqslant k+1, \quad \mathbb{P}_{[W_n=k]}(W_{n+1}=j) &= \mathbb{P}\big([Z_{k+1}=0]\cap\ldots\cap[Z_{j-1}=0]\cap[Z_j=1]\big)\\ &= p(1-p)^{j-1-(k+1)+1} = p(1-p)^{j-k-1},\end{aligned}$$

toujours en utilisant la mutuelle indépendance des variables $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

c) On suppose que la variable aléatoire X_1 (et donc des autres variables X_k) suit la loi géométrique de paramètre p : $\quad \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_1=i)=p(1-p)^{i-1}$.

i. Pour tous entiers j et k tels que $j \geqslant k+1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[S_n=k]}(S_{n+1}=j) &= \mathbb{P}_{[S_n=k]}(S_n+X_{n+1}=j) = \mathbb{P}_{[S_n=k]}(X_{n+1}=j-k) = \mathbb{P}(X_{n+1}=j-k)\\ &= \mathbb{P}(X_1=j-k) = p(1-p)^{j-k-1}.\end{aligned}$$

En effet, $S_n = X_1+\ldots+X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes d'après le lemme des coalitions, et X_{n+1} suit la même loi que X_1.

ii. On rédige ici une récurrence pour montrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "S_n a même loi que W_n", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{I.}}$ $S_1 = X_1$ et $W_1 = \min\left\{k \geqslant 1\,;\ \sum_{l=1}^{k} Z_l = 1\right\} = \min\{k \geqslant 1;\ Z_k=1\} = W$: d'après 10.a) et l'hypothèse faite au début de cette question c), S_1 et W_1 suivent bien la même loi géométrique de paramètre p.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie :

On a supposé (H.R.) que S_n et W_n suivent la même loi, et on vient de voir que pour tous entiers j et k tels que $j \geqslant k+1$, $\mathbb{P}_{[S_n=k]}(S_{n+1}=j) = \mathbb{P}_{[W_n=k]}(W_{n+1}=j) = p(1-p)^{j-k-1}$.
On a aussi, de façon évidente vues les définitions des variables aléatoires concernées :
$\mathbb{P}_{[S_n=k]}(S_{n+1}=j) = 0 = \mathbb{P}_{[W_n=k]}(W_{n+1}=j)$ pour tous entiers j et k tels que $j \leqslant k$,
donc l'égalité $\mathbb{P}_{[S_n=k]}(S_{n+1}=j) = \mathbb{P}_{[W_n=k]}(W_{n+1}=j)$ est vraie pour tous entiers j et k.
Le résultat de la question 9. peut donc s'appliquer aux variables $S_n, W_n, S_{n+1}, W_{n+1}$ qui assure alors que S_{n+1} et W_{n+1} suivent la même loi, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

d) On reprend ici le résultat de la question 8.b)ii., associé au fait qu'on sait désormais que la variable aléatoire S_n suit la même loi que W_n, laquelle est obtenue en 10.b)i. Comme il s'agit d'une variable discrète à valeurs entières, pour tout réel $t \geqslant 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, avec la convention admise par l'énoncé concernant les notations sur les sommes, on peut effectivement écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t=n) &= F_n(t)-F_{n+1}(t) = \mathbb{P}(W_n \leqslant t) - \mathbb{P}(W_{n+1}\leqslant t) = \mathbb{P}(W_n \leqslant \lfloor t\rfloor) - \mathbb{P}(W_{n+1}\leqslant \lfloor t\rfloor)\\ &= \sum_{k=n}^{\lfloor t\rfloor}\mathbb{P}(W_n=k) - \sum_{k=n+1}^{\lfloor t\rfloor}\mathbb{P}(W_{n+1}=k)\\ &= \sum_{k=n}^{\lfloor t\rfloor}\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n} - \sum_{k=n+1}^{\lfloor t\rfloor}\binom{k-1}{n}p^{n+1}(1-p)^{k-n-1}.\end{aligned}$$

© Major-Prépa

Troisième partie : Théorème du renouvellement

11. a) Pour tout $\omega \in \Omega$: par définition même de $N_t(\omega)$, qui est le plus grand entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $S_k(\omega) \leqslant t$: il est clair que $S_{N_t}(\omega) \leqslant t$, et que $S_{N_t+1}(\omega)$ est le premier entier j qui ne vérifie plus $S_j(\omega) \leqslant t$, mais au contraire $S_j(\omega) > t$, donc : $\forall \omega \in \Omega, \quad S_{N_t}(\omega) \leqslant t < S_{N_t+1}(\omega)$, ce qui traduit bien la relation entre variables aléatoires :

$$S_{N_t} \leqslant t < S_{N_t+1}.$$

b) On sait aussi que pour presque-tout $\omega \in \Omega$, $\lim\limits_{t\to+\infty} N_t(\omega) = +\infty$: pour presque-tout $\omega \in \Omega$, il existe $T_\omega > 0$ tel que pour tout $t \geqslant T_\omega$, $N_t(\omega) > 0$ et il suffit alors de diviser par $N_t(\omega)$ tous les membres de la double inégalité précédente pour obtenir, pour tout $t \geqslant T_\omega$:

$$\frac{S_{N_t}(\omega)}{N_t(\omega)} \leqslant \frac{t}{N_t(\omega)} < \frac{S_{N_t+1}(\omega)}{N_t(\omega)}.$$

c) On sait que les événements $A = \left[\lim\limits_{t\to+\infty} N_t = +\infty\right]$ et $B = \left[\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right]$ sont de probabilité 1, et leur intersection implique $C = \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]$ (composition de limites).

On est donc dans la situation de trois événements A, B, C tels que : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$ et $\mathbb{P}(A\cap B) \leqslant \mathbb{P}(C) \leqslant 1$. Comme $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cup B)$ avec $\mathbb{P}(A) = 1 \leqslant \mathbb{P}(A\cup B) \leqslant 1$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 + 1 - 1 = 1$, donc $1 \leqslant \mathbb{P}(C) \leqslant 1 \iff \mathbb{P}(C) = 1$.

L'événement $\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right]$ est bien de probabilité 1.

d) Par le même raisonnement que précédemment, l'événement $A = \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{S_{N_t+1}} = \mu\right]$ est de probabilité 1, tout comme l'événement $B = \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{N_t+1}{N_t} = 1\right]$, toujours parce que $\left[\lim\limits_{t\to+\infty} N_t = +\infty\right]$ est de probabilité 1.

Comme $A \cap B = \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mu\right] \cap \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{N_t+1}{N_t} = 1\right]$ implique l'événement $C = \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \times \frac{N_t+1}{N_t} = \mu\right] = \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]$, alors cet événement C est lui-même de probabilité 1.

e) Le théorème d'encadrement assure enfin que l'intersection d'événements $\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \mu\right] \cap \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t} = \mu\right]$ implique l'événement $\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{N_t} = \mu\right] = \left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}\right]$.
Les mêmes raisons qu'à la question c) assurent alors que l'événement $\left[\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}\right]$ est lui aussi de probabilité 1.

12. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0\,;1]$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } U > 1/n \\ n & \text{si } U \leqslant 1/n \end{cases}$, avec la convention $Y_n(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $U(\omega) = 0$.

a) Soit $\omega \in \Omega$: on sait que $U(\omega) \in [0\,;1]$. Si $U(\omega) > 0$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors pour n assez grand, $\frac{1}{n}$ devient strictement inférieur à $U(\omega)$: il existe $N_\omega \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_\omega$, $U(\omega) > \frac{1}{n}$, ce qui implique $Y_n(\omega) = 0$ par définition de Y_n.
Si $U(\omega) = 0$, on a déjà $Y_n(\omega) = 0$ à partir du rang 0, on peut prendre $N_\omega = 0$ dans ce cas.

© Major-Prépa

b) On vient donc de voir que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $\big(Y_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, nulle à partir d'un certain rang N_ω. Or cela implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n(\omega) = 0$: l'événement $\big[\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = 0\big]$ est bien presque certain.

c) La variable aléatoire Y_n est finie puisqu'elle ne prend que les deux valeurs 0 et n, donc elle admet une espérance qui vaut :

$$\mathbb{E}(Y_n) = 0 \cdot \mathbb{P}(Y_n = 0) + n \cdot \mathbb{P}(Y_n = n) = 0 + n \cdot \mathbb{P}(U \leqslant 1/n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

puisque U suit la loi uniforme sur $[0\,;1]$. On n'a donc pas ici, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\big(\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n\big)$ (le premier nombre vaut 1, le second vaut 0).

13. Soit J une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $S_J = \displaystyle\sum_{k=1}^{J} X_k$.

a) Pour tout $\omega \in \Omega$: $N = J(\omega)$ est un entier fixé de $\mathbb{N}$, et : $\forall k \in [\![1\,;N]\!]$, $\mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega) = 1$, tandis que pour tout $k > N$, $\mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega) = 0$.

On peut donc toujours écrire la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega)$, dont seul un nombre fini de termes sont non nuls, et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega) = \sum_{k=1}^{N} X_k(\omega) \cdot 1 + 0 = \sum_{k=1}^{J(\omega)} X_k(\omega) = S_J(\omega),$$

d'où l'égalité de variables aléatoires : $\quad S_J = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} X_k \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}$.

L'énoncé suppose ensuite que J vérifie la propriété suivante : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable $\mathbb{1}_{[J\leqslant n]}$ est indépendante des variables $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$.

b) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$; on peut toujours écrire $\mathbb{1}_{[J\geqslant k]} = 1 - \mathbb{1}_{[J<k]} = 1 - \mathbb{1}_{[J\leqslant k-1]}$: en effet pour tout $\omega \in \Omega$, $1 - \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}(\omega) = \begin{cases} 1 - 0 = 1 & \text{si } \omega \notin [J \geqslant k] \iff \omega \in [J < k] \\ 1 - 1 = 0 & \text{si } \omega \in [J \geqslant k] \iff \omega \notin [J < k] \end{cases} = \mathbb{1}_{[J<k]}(\omega)$.

D'après l'hypothèse faite par l'énoncé, X_k est indépendante de $\mathbb{1}_{[J\leqslant k-1]}$, donc d'après le lemme des coalitions, X_k est aussi indépendante de $1 - \mathbb{1}_{[J\leqslant k-1]} = \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}$.

c) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Pour tout $\omega \in \Omega$: $U(\omega) = N$ est un entier naturel, donc $\mathbb{1}_{[U\geqslant n]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leqslant N \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$, de sorte qu'on peut toujours écrire la somme, en fait finie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U\geqslant n]}(\omega) = \sum_{n=1}^{N} 1 + 0 = N = U(\omega),$$

ce qui donne bien l'égalité de variables aléatoires : $\quad U = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U\geqslant n]}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire $\mathbb{1}_{[U\geqslant n]}$ a pour univers-image $\{0\,;1\}$ au vu de sa définition : il s'agit donc d'une variable de Bernoulli qui a pour espérance :

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{[U\geqslant n]}\big) = 1 \cdot \mathbb{P}(\mathbb{1}_{[U\geqslant n]} = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(\mathbb{1}_{[U\geqslant n]} = 0) = \mathbb{P}(U \geqslant n).$$

La relation obtenue à la question précédente, et la deuxième hypothèse faite par l'énoncé entre les questions a) et b) permettent d'en déduire, sous réserve de convergence de la série concernée :

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[U\geqslant n]}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[U\geqslant n]}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U \geqslant n).$$

© Major-Prépa

d) De la même façon, en reprenant l'écriture $S_J = \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \mathbb{1}_{[J \geqslant k]}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et comme on l'a vu en 13.b), X_k et $\mathbb{1}_{[J\geqslant k]}$ sont indépendantes, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_k \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}) = \mathbb{E}(X_k)\cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[J\geqslant k]}) = \mathbb{E}(X_1)\cdot \mathbb{P}(J \geqslant k) = \mu \mathbb{P}(J \geqslant k),$$

donc sous réserve de convergence de la série :

$$\mathbb{E}(S_J) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_k \mathbb{1}_{[J\geqslant k]}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu \mathbb{P}(J \geqslant k) = \mu \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(J \geqslant k) \overset{13.c)ii.}{=} \mu \cdot \mathbb{E}(J).$$

14. a) Soient un réel $t > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $J = N_t + 1$.
Par définition de N_t, la variable aléatoire $\mathbb{1}_{[J\leqslant n]}$ prend la valeur 1 si et seulement si $[N_t + 1 \leqslant n] = [N_t \leqslant n-1]$ est réalisé. Or d'après 6.b), $[N_t \leqslant n-1] = \overline{[N_t \geqslant n]} = \overline{[S_n \leqslant t]}$ où $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, et au contraire, $\mathbb{1}_{[J\leqslant n]}$ prend la valeur 0 si et seulement si $[S_n \leqslant t]$ est réalisé.
Comme les $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes, d'après le lemme des coalitions, S_n est indépendante de $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$, et par conséquent, $\mathbb{1}_J$ est bien indépendante de $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$.

b) On peut donc appliquer les formules obtenues à la question 13 avec $J = N_t + 1$, ce qui donne :

$$\mathbb{E}(S_J) = \mu \mathbb{E}(J) \iff \mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mu \mathbb{E}(N_t + 1) = \mu\big(\mathbb{E}(N_t) + 1\big) \iff \frac{\mathbb{E}(S_{N_t+1})}{\mu} = \mathbb{E}(N_t) + 1,$$

Soit en effet : $\quad \mathbb{E}(N_t) = \dfrac{\mathbb{E}(S_{N_t+1})}{\mu} - 1.$

15. Comme on l'a vu à la question 11.a) : $\quad S_{N_t+1} > t$ pour tout $t > 0$, donc par croissance de l'espérance, $\mathbb{E}(S_{N_t+1}) \geqslant t$, et par conséquent :

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{E}(N_t) = \frac{\mathbb{E}(S_{N_t+1})}{\mu} - 1 \geqslant \frac{t}{\mu} - 1 \iff \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \geqslant \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}.$$

16. Soit $b > 0$. On pose $\tilde{X}_i = \min(b, X_i)$.

a) Pour tout $\omega \in \Omega$, $\tilde{X}_i$ est le minimum de deux réels positifs b et $X_i(\omega)$, donc $\tilde{X}_i$ est à valeurs positives. Comme les X_i suivent toutes la même loi, il en est de même des $\tilde{X}_i$ qui sont toutes obtenues par la même fonction de la variable X_i qui leur correspond.
Enfin, les $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes : comme chaque $\tilde{X}_i$ est une fonction de la seule variable aléatoire X_i de même indice, alors d'après le lemme des coalitions, les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes entre elles.

b) On pose $\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i$ et $\tilde{\mu}_b = \mathbb{E}(\tilde{X}_1)$. On considère le processus de renouvellement $\tilde{N}_t$ associé aux $\tilde{X}_i$.

i. Il est clair que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{X}_i = \min(b, X_i) \leqslant X_i$, donc par sommation de cette inégalité : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} X_i \iff \tilde{S}_n \leqslant S_n.$

ii. On sait que N_t est le plus grand entier n tel que $S_n \leqslant t$: mais alors par transitivité de l'inégalité, $\tilde{S}_n \leqslant t$ aussi, donc $\tilde{N}_t = \max\{k \in \mathbb{N}\,;\ \tilde{S}_k \leqslant t\}$ est au moins égal à n, c'est-à-dire :

$$\tilde{N}_t \geqslant N_t.$$

iii. Par définition de $\tilde{N}_t$: $\tilde{S}_{\tilde{N}_t} \leqslant t$, et $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} = \tilde{S}_{\tilde{N}_t} + \tilde{X}_{\tilde{N}_t+1}$ où $\tilde{X}_{\tilde{N}_t+1} = \min(b, X_{\tilde{N}_t+1}) \leqslant b$, donc :

$$\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} = \tilde{S}_{\tilde{N}_t} + \tilde{X}_{\tilde{N}_t+1} \leqslant t + b.$$

© Major Prépa

c) i. À cause de ce qui a été établi à la question 16.a), toutes les formules associées aux variables aléatoires X_i s'appliquent encore aux variables $\tilde{X}_i$, en adaptant les notations. La formule obtenue en 14.b) devient ainsi :

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{E}(\tilde{N}_t) = \frac{\mathbb{E}(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1})}{\tilde{\mu}_b} - 1 \iff \frac{\mathbb{E}(\tilde{N}_t)}{t} = \frac{\mathbb{E}(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1})}{t\tilde{\mu}_b} - \frac{1}{t}.$$

ii. D'après la question 16.b)ii., pour tout $t > 0$, $N_t \leqslant \tilde{N}_t$ donc par croissance de l'espérance, on a $\mathbb{E}(N_t) \leqslant \mathbb{E}(\tilde{N}_t) \iff \dfrac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(\tilde{N}_t)}{t}$.

D'après 16.b)iii., $\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} \leqslant t+b$, donc $\mathbb{E}(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}) \leqslant t+b \iff \dfrac{\mathbb{E}(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1})}{t\tilde{\mu}_b} \leqslant \dfrac{t+b}{t\tilde{\mu}_b}$,

et donc : $\dfrac{E(\tilde{N}_t)}{t} = \dfrac{\mathbb{E}(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1})}{t\tilde{\mu}_b} - \dfrac{1}{t} < \dfrac{\mathbb{E}(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1})}{t\tilde{\mu}_b} \leqslant \dfrac{t+b}{t\tilde{\mu}_b}$, ce qui donne bien, par transitivité de l'inégalité :

$$\forall t > 0, \quad \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \frac{\mathbb{E}(\tilde{N}_t)}{t} \leqslant \frac{t+b}{t\tilde{\mu}_b}.$$

d) On choisit $b = \sqrt{t}$.

i. Dans ce cas, $\tilde{\mu}_b = \mathbb{E}(\tilde{X}_1) = \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big)$, et le résultat de 16.c)ii. donne bien, par transitivité :

$$\frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \frac{t+b}{t\tilde{\mu}_b} \iff \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \frac{t+\sqrt{t}}{t \cdot \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big)}.$$

ii. On a toujours $\min(\sqrt{t}, X_1) \leqslant X_1$, donc $0 \leqslant X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1)$.
Ensuite, pour tout $\omega \in \Omega$:

- Soit $X_1(\omega) > \sqrt{(t)}$, et dans ce cas :

$$X_1(\omega) - \min\big(\sqrt{t}, X_1(\omega)\big) = X_1(\omega) - \sqrt{t} \leqslant X_1(\omega) = X_1(\omega) \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}(\omega)}_{=1}.$$

- Soit $X_1(\omega) \leqslant \sqrt{t}$, et dans ce cas :

$$X_1(\omega) - \min\big(\sqrt{t}, X_1(\omega)\big) = X_1(\omega) - X_1(\omega) = 0 \leqslant 0 = X_1(\omega) \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}(\omega)}_{=0}.$$

La deuxième inégalité est bien vraie dans tous les cas, donc :

$$0 \leqslant X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1) \leqslant X_1 \mathbb{1}_{[X_1 > t]}.$$

iii. La propriété de croissance de l'espérance (admise dans le cas général au début de l'énoncé) donne :

$$0 \leqslant \mathbb{E}\big(X_1 - \min(\sqrt{t}, X_1)\big) \leqslant \mathbb{E}(X_1 \mathbb{1}_{[X_1 > t]}) \iff 0 \leqslant \mu - \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big) \leqslant \mathbb{E}(X_1 \mathbb{1}_{[X_1 > t]}).$$

Au passage, les inégalités $0 \leqslant \min(\sqrt{t}, X_1) \leqslant X_1$ et aussi $0 \leqslant X_1 \mathbb{1}_{[X_1 > t]} \leqslant X_1$ assurent que ces deux variables aléatoires inférieures à X_1, admettent des espérances.

Il resterait donc à montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbb{E}(X_1 \mathbb{1}_{[X_1 > \sqrt{t}]}) = 0$, ce que l'énoncé semble considérer évident, alors que ce n'est pas vraiment le cas si en l'absence d'information sur la nature de la variable aléatoire X_1 !

Tout au plus peut-on le justifier dans les deux cas usuels du programme de ECE2, à savoir le cas où X_1 est une variable discrète, et le cas où c'est une variable à densité :

© Major-Prépa

- Si X_1 est discrète, à valeurs positives, alors d'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X_1 \mathbb{1}_{[X_1>t]}) = \sum_{x \in X_1(\omega)} x \cdot \mathbb{1}[x > t] \cdot \mathbb{P}(X_1 = x) = \sum_{\substack{x \in X_1(\Omega) \\ x \geqslant \sqrt{t}}} x \cdot \mathbb{P}(X_1 = x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

puisque c'est le reste d'une série convergente (celle qui donne l'espérance de X_1).

- Si X_1 est une variable à densité, et f une densité de X_1 :

$$\mathbb{E}(X_1 \mathbb{1}_{[X_1>t]}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathbb{1}_{[x>\sqrt{t}]} \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0,$$

là encore puisqu'il s'agit du reste d'une intégrale absolument convergente.

Dans ces deux cas, le théorème d'encadrement assure alors que :

$$\lim_{t \to +\infty} \mu - \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big) = 0 \iff \lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big) = \mu.$$

iv. Il suffit alors de reprendre des inégalités obtenues aux questions 15. et 16.d)i. :

$$\forall t > 0, \quad \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} \leqslant \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leqslant \frac{t + \sqrt{t}}{t \cdot \mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{t}}}{\mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big)},$$

où d'après ce qui précède : $\displaystyle \lim_{t \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{t}}}{\mathbb{E}\big(\min(\sqrt{t}, X_1)\big)} = \frac{1}{\mu}.$

Comme également, $\displaystyle \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} = \frac{1}{\mu}$, le théorème d'encadrement s'applique une dernière fois pour donner :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

★ ★ ★ FIN DU SUJET ★ ★ ★

© Major-Prépa