# Correction d'exercices

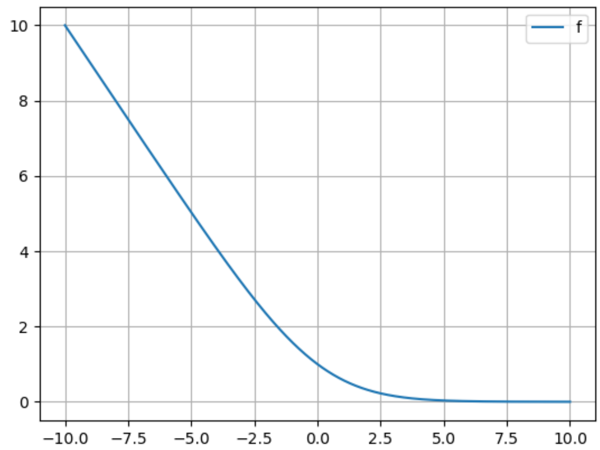
## . Correction de l'exercice n°16

1. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto 1-e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, la dernière ne s'annulant pas sur ces intervalles.
$\boxed{\text{Par produit et quotient, } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_-^* \text{ et } \mathbb{R}_+^*.}$
2. Soit $x \neq 0$. On calcule le taux d'accroissement en 0 :
$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}-1}{x} = \frac{\frac{xe^{-x}-1+e^{-x}}{1-e^{-x}}}{x} = \frac{xe^{-x}-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$$
Comme $e^{-x}-1 \underset{0}{\sim} -x$, le dénominateur donne clairement $x(1-e^{-x}) \underset{0}{\sim} x^2$.
On cherche un équivalent du numérateur. On utilise le développement limité à l'ordre 1 de exp : $e^{-x} = 1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$,
$$xe^{-x}-1+e^{-x} = x(1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))-1+1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2) = -x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3)+\frac{x^2}{2}+o(x^2) = \frac{x^2}{2}+o(x^2)$$
Ainsi $xe^{-x}-1+e^{-x} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $\frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x^2/2}{x^2}$.
$\boxed{\text{Donc } \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{2}, \text{ et la fonction } f \text{ est dérivable en 0 avec } f'(0) = \frac{1}{2}.}$
3. Comme $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, elle y est en particulier dérivable. Pour tout $x \neq 0$,
$$f'(x) = \frac{(e^{-x}-xe^{-x})(1-e^{-x})-xe^{-x}e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}-e^{-2x}-xe^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}(1-x-e^{-x})}{(1-e^{-x})^2}$$
4. On pose la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1-x-e^{-x}$, on va montrer que $g$ est négative sur $\mathbb{R}$. Par somme de fonctions dérivables, $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -1+e^{-x}$. Or $e^{-x}geq1 \Leftrightarrow e^{-x‘} \geq 1 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. Ainsi $g$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$. Elle admet donc un maximum en 0 qui vaut $g(0) = 0$.
$\boxed{\text{Donc } g \text{ est négative sur } \mathbb{R}.}$.
5. On calcule les limites :
$$\lim_{x\to+\infty} 1-e^{-x} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \text{par croissances comparées}$$
Donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$
$$\lim_{x\to-\infty} 1-e^{-x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = +\infty \text{donc on a une forme indéterminée}$$
Mais $1-e^{-x} \underset{-\infty}{\sim} -e^{-x}$, donc $f(x) \underset{-\infty}{\sim} -x$ et
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$
Je laisse le tracé du tableau de variations correspondant aux élèves.
On tape dans Python :

```python
def f(x):
    if x==0:
        y=1
    else:
        y=(x*np.exp(-x))/(1-np.exp(-x))
    return(y)

f=np.vectorize(f)
x=np.linspace(-10,10,10000)
y=f(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
plt.grid()
plt.legend('f')
```

et on obtient la représentation suivante :




## . Correction de l'exercice n°18

1. Les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{2x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $\boxed{\text{Par produit, } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*\text{, donc continue et dérivable.}}$
2. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, donc $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2x}$, c'est à dire
   $$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$$
   Donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.
3. On utilise le DL à l'ordre 2 de $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Ainsi au voisinage de 0 :
   $$f(x) =_0 \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + o(x)}$$
4. On utilise le développement limité de $f$ en 0, donc au voisinage de 0 :
   $$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + o(x) - \frac{1}{2}}{x} = -\frac{1}{4} + o(1)$$
   Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{1}{4}$ et donc $f$ est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = -\dfrac{1}{4}$.