

Em Lyon 2014

Exercice 1

On considère l'application $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie I : Etude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0; +\infty[$, calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$.
2. Etudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ' , et montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) \geq e$.
3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
4. Déterminer la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3; +\infty[, \varphi(x) \geq ex$.
On note \mathcal{C} la courbe représentative de φ .
6. Montrer que \mathcal{C} admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.
7. Dresser le tableau de variations de φ , avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de \mathcal{C} et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

Partie II : Etude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles - Pour les cubes.

On note $U = \mathbb{R} \times]0; +\infty[$ et on considère l'application : $f : U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy - e^x \ln y$.

8. Représenter graphiquement l'ensemble U .
9. Montrer que f est de classe C^2 sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x, y) de U , les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x, y) .
10. Etablir que, pour tout (x, y) de U , (x, y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 0 \text{ et } y = e^{\frac{1}{x}} \text{ et } \varphi(x) = 0$$

11. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1, e)$.
12. Est-ce que f admet un extremum local en $(1, e)$?
13. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Partie III : Etude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , u_n existe et $u_n \geq 3e^n$. (On pourra utiliser les résultats de la partie I).
15. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
16. Écrire un programme en Python qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geq 10^3$.
17. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$?

Exercice 2

On considère l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que ε est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de ε .
2. Etablir que ε est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M, N) \in \varepsilon^2, MN \in \varepsilon$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de ε , si M est inversible alors $M^{-1} \in \varepsilon$.

Pour toute matrice de ε , on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de ε .
5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de ε .
6. (*) Est-ce que T est diagonalisable?
On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de ε .
7. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F .

8. (*) Montrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci, puis déterminer une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.
9. (*) Est-ce que f est diagonalisable?
10. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \varepsilon$.
On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
11. Calculer H^2 , puis pour tout a de \mathbb{R} et tout n de \mathbb{N} , $(I + aH)^n$.
12. Calculer, pour tout n de \mathbb{N} , F^n .
13. Trouver une matrice G de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$. Existe-t-il un endomorphisme g de ε tel que $g \circ g \circ g = f$?

Exercice 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue une succession de $(n + 1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage oé, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variables X_n prend ses valeurs dans $\llbracket 2; n + 1 \rrbracket$. Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5,3,2,2,6,3, alors $X_5 = 4$. Pour tout k de $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k -ième tirage.

Partie I : Etude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. (a) Exprimer l'évènement $(X_3 = 4)$ à l'aide d'évènements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3 . En déduire $P(X_3 = 4)$.
(b) Montrer que $P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$, et en déduire $P(X_3 = 3)$.
2. Calculer l'espérance de X_3 .

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

4. Calculer $P(X_n = n + 1)$.
5. Montrer, pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$: $P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n - i + 1}{n}$.
6. En déduire une expression simple de $P(X_n = 2)$.
7. Soit $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$. Justifier l'égalité d'évènements suivante : $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \dots > N_k)$.
En déduire que $P(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$.
Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
8. Exprimer, pour tout $k \in \llbracket 2; n + 1 \rrbracket$, $P(X_n = k)$ à l'aide de $P(X_n > k - 1)$ et de $P(X_n > k)$.
9. En déduire : $E(X_n) = \sum_{k=0}^n P(X_n > k)$. Calculer ensuite $E(X_n)$.
10. Montrer : $\forall k \in \llbracket 2; n + 1 \rrbracket$, $P(X_n = k) = \frac{k - 1}{n^k} \binom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{k - 1}{k!}$.
12. Montrer que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{k - 1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $\llbracket 2; +\infty \llbracket$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, P(Z = k) = \frac{k - 1}{k!}$$

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $E(Z)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n)$.