Chapitre 3

Espaces vectoriels de dimension finie

I. Espaces vectoriels.

I. 1 Structure d'espace vectoriel

Définition 1.1

Soit E un ensemble non vide muni de deux opérations

- **une loi de composition interne** sur E :

- **une loi de composition externe** sur E :

On dit que E est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{R}$ si :

1. L'addition vérifie les propriétés suivantes
   (a) **Commutativité :** $\forall (x,y) \in E^2$,
   (b) **Associativité :** $\forall (x,y,z) \in E^3$,
   (c) **Elément neutre :** appelé *vecteur nul,*
   (d) Tout élément de E a un **symétrique**

2. La multiplication par un réel vérifie les propriétés suivantes :
   (a) **Associativité :**
   (b) **Element neutre :**
   (c) **Distributivité :**

Vocabulaire : Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés **vecteurs**, et les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés **scalaires**.

I. 2 Espaces vectoriels de référence

L'ensemble $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.2 — Structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \ldots\}$ muni de l'addition

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

et la multiplication par un réel

$$\lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

est un espace vectoriel dont le vecteur nul est $(0, 0, \ldots, 0)$.

On décide parfois d'identifier les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices lignes à n composantes.

Les ensembles de matrices.

Théorème 1.3 — Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Soit p et n deux entiers naturel non nuls et fixés.
Alors l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations vues l'année dernière.

Le vecteur nul est la matrice qui ne contient que des zéros.

Ensemble de fonctions polynomiales

Remarque :

Nous confondrons polynômes et fonctions polynomiales. Nous écrirons, parfois, cette année les polynômes en suivant la convention suivante :

- X est la fonction d'une variable réelle $x \mapsto x$
- X^2 est la fonction d'une variable réelle $x \mapsto x^2$
- X^n est la fonction d'une variable réelle $x \mapsto x^2$
- $X^0 = 1$ est la fonction constante $x \mapsto 1$

Exemple :

Au lieu d'écrire $P\ : x \mapsto x^2 + 2$ on écrira $P = X^2 + 2$.

Un polynôme s'écrit donc $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.

Exercice 1

Rappeler la définition et les propriétés du degré d'un polynôme.

Définition 1.4 — Ensemble des polynômes à coefficients réels

Soit n un entier naturel(éventuellement nul).

- L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[x]$ ou $\mathbb{R}[X]$ en fonction de la convention utilisée.
- L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est

$$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X]/\deg(P) \leqslant n\}$$

  On note aussi $\mathbb{R}_n[x]$.

Théorème 1.5

Les ensembles $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Ensemble des solutions d'une équation différentielle

Théorème 1.6

- Soit a un réel fixé. $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ est un espace vectoriel.
- Soit a et b deux réels fixés. $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ est un espace vectoriel

II. Sous-espaces vectoriels

II. 1 Définition et généralités

Définition 2.1

Un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

-
-
-

Remarque :

En particulier on a toujours $0_E \in F$. En effet :

Ceci sert notamment à comprendre que F est non vide, et qu'un ensemble qui ne contient pas le vecteur nul 0_E, ne peut pas être un sous-espace vectoriel de E.

Méthode :

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E :

- On vérifie que F est inclus dans E.
- On vérifie que 0_E est dans F.
- On montre que F est stable par combinaison linéaire.

Exercice 2

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 3y - z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 2.2

Un sous-espace vectoriel de E est un espace vectoriel.

Méthode :

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montrera toujours que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Exercice 3

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices symétriques à coefficients réels d'ordre n est un espace vectoriel.
2. Soit $C = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) |\ f - f' = 0\}$. Montrons que C est un espace vectoriel.
3. Montrer que $D = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) |\ AM = MA\}$ est un espace vectoriel.
4. L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}[x] |\ P(1) = 1\}$ est-il un espace vectoriel ?

Proposition 2.3

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors
- Les ensembles $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

III. Familles de vecteurs

Une famille de n vecteurs de E est un n-uplet $(e_1, ..., e_n)$ où chaque e_i est un vecteur de E. Attention, l'ordre des vecteurs dans l'écriture d'une famille est important, comme le verra avec la notion de base.

Dans toute la suite, on considérera un espace vectoriel E, $n \geq 2$, et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille de vecteurs.

III. 1 Combinaisons linéaires.

Théorème 3.1

L'ensemble des combinaisons linéaires de $e_1, e_2, ..., e_n$, noté , est un sous-espace vectoriel de E. Il est appelé

Démonstration. □

Remarque :

La définition donne

$$Vect(e_1, e_2, ..., e_n) =$$

Exemple :

Si $X = (2, -1) \in \mathbb{R}^2$ alors $\text{Vect}(X) =$

Exercice 4

1. Montrer que $A = \{(x, y, -2x + y) \,:\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0 \text{ et } x + 2y = 0\right\}$ est un espace vectoriel.

Proposition 3.2

Soient $e_1, e_2, ..., e_{n+1}$ des vecteurs de E.

- Si $e_{n+1} \in Vect(e_1, e_2, ..., e_n)$ alors $Vect(e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}) =$

  En particulier, $Vect(e_1, e_2, ..., e_n, 0_E) =$

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $Vect(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, ..., \lambda_n e_n) =$

Démonstration. □

Remarques :

R1 – Cette proposition permet de mettre en évidence que $Vect(e_1, e_2, ..., e_n)$ est **le plus petit** espace vectoriel contenant $e_1, e_2, ...$ et e_n.

R2 – Dans un $Vect()$, on peut supprimer les vecteurs qui sont combinaisons linéaires des autres. On peut remplacer un vecteur par un multiple non nul de celui-ci, ou par une combinaison linéaire des autres.

Exercice 5

1. On peut montrer que, dans $\mathbb{R}_1[X]$, $Vect(X-1, X+1, 2X+2) = Vect(1, X)$.
2. Montrer que $Vect((4,0,-2);(1,2,-1);(-3,2,1)) = Vect((2,0,-1);(1,2,-1))$.
3. Montrer que $Vect(e_1+e_2+e_3+e_4; e_2+e_3; 2e_2+2e_3) = Vect(e_1+e_4, e_2+e_3)$.

III. 2 Familles libres

Définition 3.3

- La famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est dite si l'un de ces vecteurs est combinaison linéaire des autres.

  Autrement dit

- La famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est dite lorsqu'elle n'est pas liée. Cela se traduit par :

  Si la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est libre, on dit que les vecteurs $e_1, e_2 ..., e_n$ sont

Remarques :

R1 – Une famille contenant le vecteur nul est
R2 – Une famille contenant deux fois le même vecteur est
R3 – Une famille dont l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des autres est
R4 – Une famille formée d'un seul vecteur est libre si, et seulement si, ce vecteur est
R5 – Une famille formée de deux vecteurs est libre si, et seulement si, ces vecteurs ne sont pas

Méthode :

Pour montrer qu'une famille de vecteurs $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est libre :

- on pose $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$
- on montre qu'alors $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Remarque :

La méthode précédente se ramène parfois à la résolution d'un système linéaire homogène. La famille est libre si ce système est de Cramer, liée sinon.

Exercice 6

1. Montrer que la famille $((1,3,-3),(4,2,-3),(-2,7,-6))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. La famille est $(1+X+X^2, 3+X+5X^2, 2+X+3X^2)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}[X]$?
3. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La famille est (J, J^2) est-elle une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Remarques :

R1 – Si on change l'ordre des vecteurs de la famille, celle-ci reste libre.

R2 – La famille obtenue en retirant un des vecteurs de la famille libre, reste libre.

R3 – Si on remplace, dans une famille libre, un des vecteurs par un multiple non nul de celui-ci, la famille reste libre.

R4 – Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille libre. Si v est un vecteur non nul qui n'est pas combinaison linéaire de vecteurs de la famille, alors $(e_1, e_2, ..., e_n, v)$ est libre.

R5 – Une famille de matrices colonnes dont les coefficients sont échelonnés est toujours libre. Ainsi la famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: $\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}\right)$ est libre.

Proposition 3.4

Soit $(P_1, P_2, ..., P_k)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés, c'est à dire telle que

Alors la famille est libre.

III. 3 Familles génératrices

Définition 3.5

La famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une **famille génératrice de** E lorsque tout vecteur de E est combinaison de linéaire des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$.

Autrement dit, ou encore $E =$

Retenir

Dire qu'une famille $\mathcal{G}$ est génératrice de E revient à dire que la famille engendre l'espace vectoriel E.

Remarques :

R1 – Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille génératrice de E.. La famille obtenue en changeant l'ordre des vecteurs de la famille initiale reste génératrice de E.

R2 – Pour tout $v \in E$, la famille $(e_1, e_2, ..., e_n, v)$ est génératrice de E.

R3 – Si il existe un entier $1 \leq i \leq n$, tel que e_i est combinaison linéaire des e_j $(j \neq i)$, alors la famille $(e_1, ...e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n)$ reste génératrice de E.

Exercice 7

1. Montrer que la famille $((1, 1); (-1, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ n'est pas génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. La famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est-elle génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

III. 4 Bases

Définition 3.6

La famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est **une base de** E lorsque tout vecteur de E peut s'écrire **de manière unique** comme une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$:

Les réels $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ sont appelés **coordonnées de** x **dans la base** $(e_1, e_2, ..., e_n)$**.**

Proposition 3.7

Une famille de vecteurs de E est une base si, et seulement si, elle est libre **et** génératrice.

Exercice 8

1. Montrer que $(1 + X + X^2, 2 + X - X^2, 1 + 2X + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. La famille $(1 + X^2, X, 1 + X + X^2)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$

Bases canoniques de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$

IV. Espaces vectoriels et dimension

IV. 1 Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 4.1

Si un espace vectoriel E admet une base formée de p vecteurs, alors toute autre base possède également p vecteurs.

Définition 4.2

Si E admet une base formée de p vecteurs, alors l'entier naturel p s'appelle de E, et on note

On dit que E est de

Remarques :

R1 – Le programme d'ECG Maths appliquées se limite à l'étude des espaces vectoriels de dimensions finies.

R2 – Par convention, $\dim(\{0_E\}) =$

Exemple :

- $\dim(\mathbb{R}^2) =$,$\dim(\mathbb{R}^3) =$, $\dim(\mathbb{R}^n) =$
- $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) =$, $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) =$
- $\dim(\mathbb{R}_2[X]) =$, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) =$

Proposition 4.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

1. F est de dimension finie et . De plus, $F = E \Leftrightarrow$
2. Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de E, alors
3. Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, alors

Il en découle cette propriété, très utile dans la pratique

Proposition 4.4

Si E est de dimension finie, alors une famille de vecteurs est une base de E si, et seulement si, elle est libre **et** que son cardinal est égal à la dimension de E.

Méthode :

Pour montrer qu'une famille de espace vectoriel de dimension p est une base, deux méthodes sont possibles :

1. Montrer qu'elle est libre et génératrice.
2. Montrer qu'elle est libre et de cardinal p.

Exercice 9

Montrer que la famille $((-1,2,0),(3,-5,-1),(0,1,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

IV. 2 Rang

Définition 4.5

Le rang de la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$, noté   , est la dimension de l'espace vectoriel $Vect(e_1, e_2, ..., e_n)$.

Remarques :

R1 – Cette notion a bien un sens car $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une famille génératrice de $Vect(e_1, e_2, ..., e_n)$.

R2 – Le rang est donc le cardinal de la plus grande famille libre contenue dans $(e_1, e_2, ...e_n)$.

IV. 3 Bijection avec $\mathbb{R}^n$

On considère un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Alors par définition :

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, ...\lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i.$$

On pose φ l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{lcc} E & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (\lambda_1, ..., \lambda_n) \end{array} \right.$$

Cette application est linéaire et bijective. (Bon exercice).

Autrement dit, tout espace vectoriel de dimension finie n est en bijection avec $\mathbb{R}^n$.

On peut montrer, réciproquement, qu'un espace vectoriel E qui est en bijection avec $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie n. Ceci motive la définition donnée dans les nouveaux programmes d'ECG :

Définition 4.6 — espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$

Soit n un entier naturel non nul. Un **espace vectoriel de dimension finie** n est un ensemble E, muni

- une loi interne "+" (la somme)
- une loi externe "·" (la multiplication par un réel)
- une bijection $\varphi\ :\ E \mapsto \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R} \qquad \varphi(\lambda \cdot\ x + \mu \cdot y) = \lambda\varphi(x) + \mu \cdot f(y)$$

Remarques :

R1 – La définition précédente signifie que φ préserve les combinaisons linéaires.

R2 – Lorsqu'elle existe, cette bijection n'est pas unique. Il y en a une infinité, car il suffit d'envoyer une base de E sur une base de $\mathbb{R}^n$.

R3 – Le vecteur nul de E est l'unique antécédent de $0_{\mathbb{R}^n}$.

On retrouve ainsi que $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ou l'ensemble des solutions d'EDL d'ordre 1 et 2 à coefficients constants sont des espaces vectoriels de dimensions finies :

Ce résultat permet également de donner une caractérisation d'une base d'un espace vectoriel E de dimension finie :

Théorème 4.7 — Caractérisation d'une base

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille de vecteurs. Soit $\varphi \ : E \mapsto \mathbb{R}^n$ la bijection introduite dans la définition 4.6. Alors $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E si et seulement si $(\varphi(e_1),\ \varphi(e_2),\ \varphi(e_3), \ldots,\ \varphi(e_n))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

V. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.

V. 1 Matrice colonne des coordonnées

Si on connaît une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, alors tout vecteur est entièrement connu si on donne ses n coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$. Plutôt que de présenter les coordonnées sous forme d'une liste, on va voir qu'il est plus pratique de les manipuler sous la forme d'une matrice colonne, c'est ce que l'on nomme :

Définition 5.1 — Matrice colonne des coordonnées dans une base

Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n)$ une base de E. Pour tout vecteur $x \in E$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne des coordonnées de x, notée $X_{\mathcal{B}}$ est

$$X_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exemple :

- Soit $\mathbb{R}^3$ munit de la base canonique et $x = (1, 2, 3)$. La matrice des coordonnées de x dans la base est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}$ sa base canonique et $P = 2 - X + X^3$, alors la matrice des coordonnées est $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ munit de la base canonique $(E_{1,1},\ E_{1,2},\ E_{2,1},\ E_{2,2})$ alors la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors sa représentation est $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

V. 2 Changement de base pour un vecteur

Définition 5.2

Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\mathcal{B}_2 = (f_1, \ldots, f_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E et v un vecteur de E.
On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$** la matrice :

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{array}{c c} f_1 \;\ldots\ldots\; f_n & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & * & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée du vecteur colonne des coordonnées f_j exprimées dans la base $\mathcal{B}_1$, c'est à dire $P_j = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(f_j)$.
Cette matrice $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ permet de calculer les coordonnées dans $\mathcal{B}_1$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}_2$:

Proposition 5.3 — Formule de changement de base pour un vecteur

On note $X_{\mathcal{B}_1}$ la matrice du vecteur v dans la base $\mathcal{B}_1$ et $X_{\mathcal{B}_2}$ la matrice des coordonnées dans la base alors

$$X_{\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} X_{\mathcal{B}_2}$$

Attention:

$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ est la notation du programme, dans les sujets cette notation est rarement utilisée, on introduit cette matrice à l'aide d'une phrase.

Théorème 5.4 — Inverse d'une matrice de passage .

Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\mathcal{B}_2 = (f_1, \ldots, f_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E et v un vecteur de E.

$$P = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{array}{c c} f_1 \;\ldots\ldots\; f_n & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & * & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

La matrice P est inversible et son inverse P^{-1} est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs e_j exprimées dans la base $\mathcal{B}_2$:

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \begin{array}{c c} e_1 \;\ldots\ldots\; e_n & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & * & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \end{array}$$

Ce qui permet permet de calculer les coordonnée dans la base $\mathcal{B}_2$ en fonction des coordonnées dans la base $\mathcal{B}_1$:

$$X_{\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}.X_{\mathcal{B}_2} \Leftrightarrow$$

Remarque :

On peut noter, selon le programme :

$$P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$$

La réciproque du théorème précedent est aussi juste et beaucoup plus facile.

Proposition 5.5 — Matrice d'une base

Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{F} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E et $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ la matrice dont les colonnes $A_j = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_j)$ sont les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs v_j dans la base $\mathcal{B}$. Alors

La matrice A est inversible si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de E.

Exercice 10

Soient $\mathcal{B}_2 = (1, 1+X, 1+X+X^2)$ et $\mathcal{B}_3 = (X(X-1), (X-1)(X+1), X(X+1))$ deux familles de $\mathbb{R}_2[X]$, et $\mathcal{C}$ sa base canonique.

1. Montrer que $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner les matrices de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}_2$ et de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}_3$.
3. Expliquer comment trouver la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_3$.

Une conséquence du théorème précédent est

Théorème 5.6

Une matrice carrée est inversible si et seulement si ses colonnes forme une famille libre.

Remarque :

On retrouve qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si aucun terme de la diagonale n'est nul.

V. 3 Rang d'une matrice

Définition 5.7

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle rang d'une matrice A le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $rg(A) =$, car

Proposition 5.8

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Une matrice et sa transposée ont même rang :
2. Les opérations utilsées dans le pivot de Gauss ne changent pas le rang.
3. $rg(A) = 0 \Leftrightarrow$
4. Si $n = p$ (matrice carrée), alors : A est inversible si et seulement si