## Exercice 1

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

— $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

## Exercice 2

Pour les ensembles suivants indiquer s'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie, et si oui en donner une base.

— $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - 4y + z = 0\}$

— $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0\}$

— $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y^2\}$

— $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y = 0\}$

— $E_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y - z - 3t = 0 \text{ et } 2y + 3z + t = 0\}$

— $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_6 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = 0\}$

— $E_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a + 3b & a - b \\ a + b & -a + 2b \end{pmatrix} /(a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

— $E_8$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b & a + b \\ b & c & a \\ c & a & a + c \end{pmatrix}$ où $a, b, c$ sont des réels quelconques.

— $E_9 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(0) = P'(0) = 0\}$

— $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ XP'(X) - P(X + 1) = 0\}$

— $E_{11} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ u_{n+2} - 7u_{n+1} + 12u_n = 0\}$

— $E_{12} = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P(1) = 0\}$. Montrer que $E$ est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner une base de $E$.

— Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $E_{13} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = 0\}$.

— $E_{14} = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ P(x) + P(-x) = 0\}$

— $E_{15} = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ xP'(x) - P(x + 1) = 0\}$

— $E_{16} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0\}$

— $E_{17} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \left\{ f \in E \ / \ \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R} \ \ f(x) = \ln\left( \dfrac{(1 + x^2)^\alpha}{(\sqrt{1 + x^4})^\beta} \right) \right\}$

— $E_{18} = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ \displaystyle\int_0^1 P(x)dx = 0 \right\}$

## Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ (A - \lambda I)X = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles ce sous-espace vectoriel n'est pas réduit à $\{0\}$.
3. Pour chacune de ces valeurs de $\lambda$ déterminer une base du sous-espace vectoriel correspondant.

## Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ (A - \lambda I)X = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles ce sous-espace vectoriel n'est pas réduit à $\{0\}$.
3. Pour chacune de ces valeurs de $\lambda$ déterminer une base du sous-espace vectoriel correspondant.

## Exercice 5

Soit les suites $u, v, w$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n, v_n = 3^n, w_n = 4^n$. La famille $(u, v, w)$ est-elle une famille libre ?

## Exercice 6

Pour quelles valeurs de $m$ la famille $((3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, -4, m))$ est-elle liée ? Lorsqu'elle est libre est-ce une base de $\mathbb{R}^4$ ?

## Exercice 7

Soit $u_1 = (2, 1, -1), u_2 = (2, -1, 2), u_3 = (3, 0, 1)$. Montrer que $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées $(4, 8, -3)$ dans cette base.

### Exercice 8

Soit $u_1 = (0,1,2), u_2 = (2,1,3), u_3 = (2,1,1)$. La famille $(u_1,u_2,u_3)$ est-elle libre ? Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$ ?

### Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que que $(A,B,C,D)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées dans cette base de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

### Exercice 10

Soit $u_1 = (1,m,m^2), u_2 = (m,m^2,1), u_3 = (m^2,1,m)$.

1. Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles $(u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Dans ce cas déterminer les coordonnées de $(1,1,1)$ dans cette base.

### Exercice 11

Dans $\mathbb{R}[X]$, $P_0 = (X-1)(X+1), P_1 = (X+1)(X-2), P_2 = (X-1)(X-2)$. Montrer que $(P_0,P_1,P_2)$ est une famille libre. Caractériser l'espace vectoriel engendré par cette famille.

### Exercice 12

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, et $F = Vect(I,A,B)$.

1. La famille $(I,A,B)$ est-elle une base de $F$ ?
2. Les matrices suivantes appartiennent-elles à $F$ ? Si oui donner leurs coordonnées dans la base $B_1 = (I,A,B)$.
3. Soit $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $(A,M_2,M_3)$ est une base de $F$, et écrire la matrice de passage de $(I,A,B)$ vers $(A,M_2,M_3)$.

### Exercice 13

Soit $Q_1 = X^3$, $Q_2 = X^2(X-1)$, $Q_3 = X(X-1)^2$, $Q_4 = (X-1)^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$. Quelles sont les coordonnées de $P$ dans la base $\mathcal{B}$ ?

### Exercice 14

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $P_0 = (X-1)(X+1), P_1 = (X+1)(X-2), P_2 = (X-1)(X-2)$.

1. Montrer que $(P_0,P_1,P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $(P_0,P_1,P_2)$.
3. Quelles sont les coordonnées dans cette base du polynôme $Q$ défini par $Q(x) = 6 - 2x + x^2 - x^3$ ?

### Exercice 15

Soit les 4 fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x, f_2(x) = e^x, f_3(x) = e^{-x}, f_4(x) = e^{x+2}$. Quel est le rang de la famille $(f_1,f_2,f_3,f_4)$ ? Déterminer une base de $Vect(f_1,f_2,f_3,f_4)$

### Exercice 16

Soit $\mathcal{B}_1 = ((1,1,1),(0,3,2),(1,2,2))$, $\mathcal{B}_2 = ((3,1,2),(3,1,1),(2,1,1))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$
3. Soit un vecteur $u$ de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(x,y,z)$ dans $\mathcal{B}_1$ et de coordonnées $(X,Y,Z)$ dans $\mathcal{B}_2$. Exprimer $X,Y$ et $Z$ en fonction de $x,y,z$.

### Exercice 17

Déterminer le rang des familles suivantes : (a) $((1,2),(-3,-6))$
(b) $((1,2),(3,4),(5,6))$
(c) $((1,3,-3),(4,2,-3),(-1,7,6))$
(d) $((4,-5,3),(2,3,-2),(4,-16,10),(8,1,-1))$
(e) $(2, 3+X, 7-6X^2)$

### Exercice 18

Soit un espace vectoriel $E$ et une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soit $\mathcal{B}' = (\vec{i}, \vec{j} + 2\vec{k}, 2\vec{j} + \vec{k})$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $E$.
2. Quelles sont les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ du vecteur de coordonnées $(-1, 3, 5)$ dans $\mathcal{B}$ ?

### Exercice 19

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. Montrer que $F$ est un espace vectoriel, en donner une base ainsi que sa dimension.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in F$.
   (b) Après avoir vérifie que la famille ci-dessous forme une base de $F$, déterminer les coordonnées de $A^n$ dans celle-ci :
$$\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
3. Soit $G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tAM = M^tA\}$.
   (a) Montrer que $M \in G \Leftrightarrow^t M \in F$.
   (b) En déduire une base de $G$ ainsi que sa dimension.

### Exercice 20

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$. Le but de l'exercice est de démontrer que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Quel est le terme de plus bas degré de $P_k$ ?
2. On suppose que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est liée.
   (a) Justifier qu'il existe $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(X) = 0$$
   (b) Justifier que l'ensemble $A = \{k \in [\![0, n]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}$ est non vide.
   (c) On pose alors $k_0 = \min\{k \in A\}$. Quel est le terme de degré $k_0$ dans $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(X)$.
   (d) Conclure

### Exercice 21

Soit $E$ un espace vectoriel et $A$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que $0 \in A$

### Exercice 22

Soit $E$ un espace vectoriel et $A$, $B$ deux sous espaces vectoriels de $E$. Montrer que $A \cap B$ est un sous espace vectoriel de $E$. Est ce vrai pour $A \cup B$ ?

### Exercice 23

On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. la famille $(x \mapsto x, x \mapsto x^2, x \mapsto x^3)$ est elle libre ? Est elle une famille génératrice de $E$ ?
2. Montrer que la famille $\left(x \mapsto e^{kx}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre (pensez au théroème des croissances comparées ) . Est ce une famille génératrice de $E$ ?

### Exercice 24

1. Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \alpha x$$
2. Étudier la réciproque.
3. Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = \alpha x + \beta y$$
4. Étudier la réciproque.

### Exercice 25

Soit $E$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E / f'' = 2f' - f\}$

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$
2. Montrer que $F \neq E$.
3. Soient les fonctions définies pour $x$ réel par
$$f_1(x) = e^x \qquad f_2(x) = xe^x$$
   Montrer que $f_1$ $f_2$ forment une famille libre de $F$.

## Exercice 26

À tout couple $(a,b)$ de deux réels, on associe la matrice $M(a,b)$ définie par

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par $E$ l'ensemble des matrices $M(a,b)$ où $a$ et $b$ décrivent $\mathbb{R}$.
On note $I$ la matrice identité $M(1,0)$, et $A$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base ainsi que sa dimension

## Exercice 27

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $E$ l'ensemble des matrices $M$ carrées d'ordre 2 telles que $AM = MD$.

1. Vérifier que $E$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $M$ appartient à $E$ si et seulement si $z = 0$ et $y = t$.
3. Etablir que $(U, A)$ est une base de $E$.
4. Calculer le produit $UA$. Est-ce que $UA$ est un élément de $E$ ?

## Exercice 28

On considère les trois matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $E$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $I, J$ et $K$.
Pour toute matrice $M$ de $E$, on note $M^0 = I$, et si $M$ est inversible, on note, pour tout entier naturel $k$, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors $M^k$ est inversible, d'inverse $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de $E$.
2. Calculer $J^2$, $JK$, $KJ$, et $K^2$.
3. Soit la matrice $L = I + J$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $L^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K$.
   (b) Vérifier que $L$ est inversible et montrer que, pour tout entier relatif $n$, $L^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K$.
   (c) Exprimer, pour tout entier relatif $n$, $L^n$ à l'aide de $I$, $L$, $L^2$ et $n$.

## Exercice 29

On associe à tout triplet $(x,y,z)$ de nombres réels, la matrice :

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

La matrice $M(1,0,0)$ n'est autre que $I_3$ et la matrice $M(0,1,0)$ est notée $J$.

1. (a) Calculer les matrices $J^2$ et $J^3$.
   (b) Etablir que l'ensemble $E$ des matrices de la forme $M(x,y,z)$, où $(x,y,z)$ décrit $\mathbb{R}^3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (c) Etablir que $(I_3, J, J^2)$ forme une base de $E$.
2. Calculer le produit $M(x,y,z) \times M(x',y',z')$ et montrer que celui-ci est un élément de $E$. Les matrices $M(x,y,z)$ et $M(x',y',z')$ commutent-elles ?
3. En déduire l'égalité suivante
$$M(x,y,z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y_z)^2 + (z-x)^2]I_3$$
4. Etablir qu'une condition suffisante pour que $M(x,y,z)$ soit inversible est que $x, y, z$ soient tels que $x + y + z \neq 0$ et pas tous égaux. Quelle est alors la matrice inverse de $M(x,y,z)$ ?
5. Etablir enfin que cette condition suffisante d'inversibilité est également nécessaire.

## Exercice 30

On considère la matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $E = Vect(I, J, K, L)$.

1. (a) Montrer que $(I, J, K, L)$ est libre.
   (b) Donner la dimension de $E$.
2. (a) Montrer, en les calculant explicitement, que $J^2$, $K^2$, $L^2$, $J^3$, et $L^3$ appartiennent à $E$.
   (b) En déduire, sans aucun calcul matriciel, que $JK$, $KJ$, $KL$, $LK$, $JL$ et $LJ$ appartiennent aussi à $E$ ?
   (c) Etablir enfin que le produit de deux matrices de $E$ est encore une matrice de $E$.

## Exercice 31

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note $E$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $MK = KM = M$.

1. (a) Montrer que $E$ est un espace vectoriel.
   (b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de $E$ n'est inversible.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de $E$.
   (a) Montrer que $k = g = c = a$, $h = b$, et $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de $E$.
   (b) Donner une base de $E$ et vérifier que $\text{Dim}\ (E) = 4$.