Épreuve Composite

E C G

DS n°3

Option économique

MATHEMATIQUES

5 Octobre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Les questions précédées de (*) sont réservées aux cubes.

Exercice n°1

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.
On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

Partie I : Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ième} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.

RÉPONSE:

On effectue n tirages indépendants (le contenu de l'urne ne change pas) pour lesquels la probabilité d'obtenir blanc est toujours 1/2 (boules équiprobables). Donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2) \text{ et } E(X) = n/2 \text{ et } V(x) = n/4.}$

* * *

2. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.

RÉPONSE:

Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, $(Y = k)$ signifie qu'on obtient B pour la première fois au $k^{ième}$ tirage. Donc que l'on a eu N pour les tirages précédents

$$(Y = k) = \bigcap_{i=1}^{k-1} N_i \cap B_k$$

et les tirages étants indépendants, .

$$P(Y = k) = \prod_{i=1}^{k-1} p(N_i) \cdot p(B_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$(Y = 0)$ *signifie qu'il n'y a eu que des* N *lors des* n *tirages. Et donc* $\boxed{P(Y = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$

* * *

3. Vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1.$$

RÉPONSE:

Pour calculer cette somme, il faut traiter à part la valeur $k = 0$ *:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) &= \sum_{k=1}^{n} P(Y = k) + p(Y = 0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{-\frac{1}{2}} \\
&= \boxed{1}
\end{aligned}$$

* * *

4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

RÉPONSE:

On le démontre par récurrence : Pour $x \neq 1$

- *Pour* $n = 1$ *on a :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{1} kx^k &= x \text{ et} \\
\frac{1x^{1+2} - (1+1)x^{1+1} + x}{(1-x)^2} &= x\frac{x^2 - 2x + 1}{(1-x)^2} = x
\end{aligned}$$

d'où l'égalité.

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} kx^k + (n+1)\,x^{n+1} \\
&= (n+1)\,x^{n+1} + \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{(n+1)\,x^{n+1}(1-x)^2 + nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{(n+1)\,x^{n+1} - 2\,(n+1)\,x^{n+2} + (n+1)\,x^{n+3} + nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{(n+1)\,x^{n+3} + -(n+2)\,x^{n+2} + x}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer

- *Donc la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$*

* * *

5. En déduire $E(Y)$.

RÉPONSE:

On a alors

$$\begin{aligned}
E\,(Y) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot p\,(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P(Y=k) + 0 \cdot p\,(Y=0) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} \\
&= 4\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \boxed{-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}
\end{aligned}$$

* * *

Partie II :Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

6. Que représente la variable Z_p ?

RÉPONSE:

X_i compte le nombre de boule(s) blanches obtenue au $i^{ème}$ tirage (uniquement). $\boxed{Z_p \text{ est donc le nombre total de boules}}$

* * *

7. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.

RÉPONSE:

Au premier tirages, les 2 boules sont équiprobables. Donc $X_1(\Omega) = \{0,1\}$ et $p(X_1 = 1) = P(X_2 = 1) = 1/2$ et $\boxed{X_1 \text{ suit une loi de Bernouilli de paramètre } 1/2. \text{ On a don } E(X) = 1/2 \text{ et } V(X) = 1/4.}$

* * *

8. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.

RÉPONSE:

Il y a ici 4 probabilités à déterminer en décomposant en fonction du résultat de chacun des deux premiers tirages :

- $(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = (N_1 \cap N_2)$ *donc* $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = p(N_1 \cap N_2) = p(N_1)\, p(N_2/N1)$.
  Quand on a N_1 on rajoute alors c boules Noires. Il y a donc 1 blanche et c+1 noirs lors du second tirage. Ces boules étant équiprobables :
  $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c+1}{c+2}$
- *De même* $p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = p(N_1 \cap B_2) = p(N_1)\, p(B_2/N1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c+2}$
- $p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = p(B_1 \cap N_2) = p(B_1)\, p(N_2/B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c+2}$
- *et enfin* $p(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = p(B_1 \cap B_2) = p(B_1)\, p(B_2/B1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c+1}{c+2}$

La loi de X_2 est la loi marginale :

- $p(X_2 = 0) = p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) + p(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c+1}{c+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c+2} = \frac{1}{2}$
- $p(X_2 = 1) = p(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) + p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c+1}{c+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c+2} = \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{La loi de } X_2 \text{ est donc la même que celle de } X_1 \text{ et } E(X_2) = E(X_1) = 1/2.}$

* * *

9. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.

RÉPONSE:

*Ici Z_2 est la somme de deux variables aléatoires suivant des lois binomiales de même paramètre de succès. **Mais** elles ne sont pas indépendantes. On ne peut donc pas conclure que $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2, 1/2)$*

- $Z_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
- $(Z_2 = 0) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 0)$ *et* $p(Z_2 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c+1}{c+2}$ *(d'après la loi du couple)*
- $(Z_2 = 1) = (X_1 = 0 \cap X_2 = 1) \cup (X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$ *et comme ces deux parenthèses sont incompatibles :*
  $p(Z_2 = 1) = p(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + p(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c+2} = \frac{1}{c+2}$

- $(Z_2 = 2) = (X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$ *et* $p(Z_2 = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c+1}{c+2}$.

$* * *$

10. Déterminer le support de Z_p.

RÉPONSE:

On peut avoir en p tirages de 0 à p boules blanches. Donc $\boxed{Z_p(\Omega) = [[0, p]]}$.

$* * *$

11. Soit $p \leqslant n-1$.
    (a) Déterminer $P_{[Z_p=k]}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.

RÉPONSE:

Soit $p \leqslant n-1$. *Quand* $(Z_p = k)$ *on a obtenu* k *boules blanches et* $p-k$ *boules noires. On a donc rajouté lors de ces tirages* $k \cdot c$ *boules blanches et* $(p-k)\,c$ *boules noires.*
Il y a donc $k \cdot c + 1$ *blanches et* $(p-k)\,c + 1$ *noires lors du* $p + 1^{ième}$ *tirages.*
Ces boules étant équiprobables

$$P_{[Z_p=k]}(X_{p+1} = 1) = \boxed{\frac{k \cdot c + 1}{p \cdot c + 2}}$$

$* * *$

    (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$

RÉPONSE:

Les événements $(Z_p = k)_{k \in [[0,p]]}$ *forment un système complet d'événements. Donc d'après la formule des probabilités totales :*

$$\begin{aligned} p(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{p} p(X_{p+1} = 1 / Z_p = k) p(Z_p = k) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{k \cdot c + 1}{p \cdot c + 2} p(Z_p = k) \ldots \end{aligned}$$

Mais on ne connaît pas la loi de $Z_p \ldots$ *Aussi ne fait on apparaître que son espérance :*

$$\begin{aligned} p(X_{p+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{k \cdot c + 1}{p \cdot c + 2} p(Z_p = k) = \frac{1}{pc+2} \sum_{k=0}^{p} (k \cdot c + 1)\, p(Z_p = k) \\ &= \frac{1}{pc+2} \left[c \sum_{k=0}^{p} kp(Z_p = k) + \sum_{k=0}^{p} p(Z_p = k) \right] \\ &= \frac{1}{pc+2} \left[cE(Z_p) + 1 \right] = \boxed{\frac{cE(Z_p) + 1}{2 + pc}} \end{aligned}$$

$* * *$

(c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
(On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

RÉPONSE:

On en déduit par récurrence que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

- *Pour $p = 1$, X_1 suit bien une loi de Bernouilli de paramètre $1/2$*
- *Soit $p \geqslant 1$ tel que pour tout $k \in [[1, p]]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$*

  Alors $E(Z_p) = \sum_{k=1}^{p} E(X_i) = p/2$

  et

$$\begin{aligned} p(X_{p+1} = 1) &= \frac{cE(Z_p) + 1}{2 + pc} = \frac{\frac{cp}{2} + 1}{2 + pc} = \frac{cp + 2}{2(cp + 2)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  et donc $p(X_{p+1} = 0) = 1 - p(X_p = 1) = \dfrac{1}{2}$

  Donc X_{p+1} suit une loi binomiale de paramètre 1/2.
- *Donc pour tout entier $\boxed{p \geq 1 : X_p \text{ suit une loi binomiale de paramètre } 1/2.}$*

* * *

Exercice n°2

Partie A : Étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.

RÉPONSE:

On commence par expliciter la matrice $A - I$ avant de calculer ses puissances :

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Il apparaît alors que

$$\boxed{(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad et \quad (A - I)^3 = 0}$$

* * *

2. La matrice A est-elle inversible ?

RÉPONSE:

En développant $(A-I)^3$ *on obtient (car* A *et* I *commutent)*

$$0=A^3-3A^2+3A-I \Longleftrightarrow A^3-3A^2+3A=I \Longleftrightarrow A\left(A^2-3A+3I\right)=I$$

donc A *est inversible et*

$$\boxed{A^{-1}=A^2-3A+3I}$$

* * *

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x\in]-1,1[, \varphi(x)=\sqrt{1+x}$.

1. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

RÉPONSE:

Pour tout $x\in]-1;1[, 1+x>0$, *or la fonction racine est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *(donc en particulier* $\mathcal{C}^2$ *) sur cet intervalle. Par composition,* φ *est bien de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $]-1;1[$. *Pour tout* x *s'y trouvant, on a*

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad \varphi''(x)=\frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$$

En particulier,

$$\boxed{\varphi'(0)=\frac{1}{2}, \quad \textit{et} \quad \varphi''(0)=-\frac{1}{4}}$$

* * *

2. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2 , déterminer un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\alpha x^2+x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

RÉPONSE:

D'après les formules de Taylor, φ *étant de classe* $\mathcal{C}^2$ *au voisinage de 0 , elle admet un développement limité d'ordre 2 donné par*

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\varphi(0)+\varphi'(0)x+\frac{\varphi''(0)}{2!}x^2+x^2\varepsilon(x)\\&=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\boxed{\alpha=-1/8.}$

* * *

3. On note $P(x)=1+\dfrac{1}{2}x+\alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.

RÉPONSE:

On considère donc la fonction polynomiale P de degré 2 défini par

$$P(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

Un développement trivial donne

$$\left(P(x)^2\right) = \boxed{1 + x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64}}$$

* * *

4. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la Question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$. Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

RÉPONSE:

En notant alors $C = A - I$, la toute première question s'exprime comme $C^3 = 0$ (il en est de même pour toutes les puissances supérieures). Ainsi,

$$P(C)^2 = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 = I + C = A$$

En posant $M = P(C)$, on a clairement $M^2 = A$. Les coefficients explicites de M sont les suivants

$$\begin{aligned} M = P(C) &= I + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

* * *

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1, 0, 1) \\ v = f(w) - w \\ u = f(v) - v \end{cases}$

   (a) Calculer les vecteurs v et u.

RÉPONSE:

On calcule

$$\begin{aligned}
v &= f(w) - w \\
&= Cw \\
&= (1, 1, -3) \\
u &= f(v) - v \\
&= f(f(w) - w) + f(w) - w = f^2(w) - w = C^2 w \\
&= (-6, -6, 0)
\end{aligned}$$

$* * *$

(b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

RÉPONSE:

Pour montrer que la famille $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *forme une base de* $\mathbb{R}^3$*, il suffit de montrer que ces trois vecteurs forment une famille libre. Soient alors* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tels que* $xu + yv + zw = 0$*. Il suffit de montrer que, nécessairement,* $x = y = z = 0$*. On résout donc le système, par pivot de Gauss,*

$$\begin{aligned}
xu + yv + zw = 0 &\iff \begin{cases} -6x + y + z = 0 \\ -6x + y = 0 \\ -3y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -6x + y + z = 0 \\ z = 0 \\ -3y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff x = y = z = 0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{et la famille } \mathcal{B}' \text{ est bien libre et forme donc une base de } \mathbb{R}^3.}$

$* * *$

(c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

RÉPONSE:

Pour connaître la matrice de f *dans la base* $\mathcal{B}'$*, il faut exprimer les images, par* f*, des vecteurs de* $\mathcal{B}'$ *en fonction de ces mêmes vecteurs. La définition des vecteurs donne la décomposition souhaitée*

$$\begin{aligned}
u = f(v) - v &\iff f(v) = u + v \\
v = f(w) - w &\iff f(w) = v + w \\
u = (-6, -6, 0) &\implies f(u) = A \cdot u = (-6, -6, 0) = u
\end{aligned}$$

Il suit alors que,

$$\mathrm{Mat}\left(f, \mathcal{B}'\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T}$$

$* * *$

(d) (*) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1} A P$.

RÉPONSE:

Si on introduit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base canonique, alors P est inversible et ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimées dans la base canonique

$$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}\left(\mathcal{B}', \mathcal{B}\right)$$

(qui est bien inversible comme toute matrice de passage car les colonnes qui la composent forment une base de $\mathbb{R}^3$) on a bien

$$\boxed{T = \mathrm{Mat}\left(f, \mathcal{B}'\right) = \mathrm{Id}\left(\mathcal{B}, \mathcal{B}'\right)\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})\,\mathrm{Id}\left(\mathcal{B}', \mathcal{B}\right) = P^{-1}AP}$$

∗ ∗ ∗

2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

   où a, b et c sont trois réels.

RÉPONSE:

Si on suppose que $N^2 = T$, alors $NT = N^2 \cdot N = N^3 = N \cdot N^2 = NT$. En d'autres termes, N et T commutent. En notant

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

on a

$$NT = TN \iff \begin{cases} a &= a + d \\ a + b &= b + e \\ b + c &= c + f \\ d &= d + g \\ d + e &= e + h \\ e + f &= f + i \\ g &= g \\ g + h &= h \\ h + i &= i \end{cases} \iff \begin{cases} a = e \\ d = 0 \\ b = f \\ g = 0 \\ e = i \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}}$$

∗ ∗ ∗

   (b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.

RÉPONSE:

Il est alors facile de résoudre l'équation cherchée

$$N^2 = T \iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 1/2a \\ c = -1/8 \end{cases}$$

et on a deux solutions :

$$N_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \text{et} \quad N_2 = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & -1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

* * *

3. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

RÉPONSE:

On utilise le fait que $T = P^{-1}AP$ ce qui, étant équivalent à $A = PTP^{-1}$, donne

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff M^2 = PTP^{-1} \\ &\iff P^{-1}M^2P = T \\ &\iff \left(P^{-1}MP\right)^2 = T \\ &\iff P^{-1}MP = N_1 \quad \text{ou} \quad P^{-1}MP = N_2 \\ &\iff M = PN_1P^{-1} \quad \text{ou} \quad M = PN_2P^{-1} \end{aligned}$$

et on a bien exhibé les deux solutions souhaitées.

* * *

4. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

RÉPONSE:

Il est facile de voir que l'ensemble des solutions n'est pas un sous-espace vectoriel (de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). Il existe une multitude de contre-arguments. Le plus simple est de mentionner que la matrice nulle n'en est pas un élément.

* * *

Exercice n°3

Dans tout l'exercice, on considère

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.
- La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
- La fonction F définie sur $]-1; +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

- La fonction g définie sur $[-1;+\infty[$ par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x+1)} & \text{si} \quad x \notin \{0;-1\} \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$

Partie I - Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

RÉPONSE:

En $\pm\infty$, *on a*

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} (x+1)^2 = 0^+$$

il suit que

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} f(x) = -\infty$$

* * *

2. Déterminer les variations de f, présentées sous forme d'un tableau.

RÉPONSE:

En dehors de $-1, f$ *est dérivable comme quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas. On a, pour* $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - x\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)-2x}{(x+1)^3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$$

dont le signe se détermine facilement et permet de dresser le tableau de variations ci-dessous

x	$-\infty$	*-1*			*1*		$+\infty$
$f'(x)$	-			+	*0*	-	
f	*0*		$-\infty$				

* * *

Partie II - Étude de la fonction F

3. Justifier que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > -1$ et que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

RÉPONSE:

La fonction f est continue sur $]-1;+\infty[$. *Par le théorème fondamental de l'analyse, $F(x)$ est alors bien définie (intégrale d'une fonction continue sur un segment) et est la primitive de f qui s'annule en 0 . Ainsi, F et dérivable sur* $]-1;+\infty\,[, F'(x) = f(x)$ *et f étant continue, F' l'est ce qui donne bien F de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.*

* * *

4. À l'aide du changement de variable $u = t + 1$, montrer que, pour tout $x > -1$,

$$F(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

RÉPONSE:

Le changement de variable $u = t+1$ est affine donc licite ; il donne $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ et on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{x+1} \frac{u-1}{u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{x+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_1^x \left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= [\ln(u)]_1^{x+1} + \left[\frac{1}{u}\right]_1^{x+1} \\ &= \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - 1 \\ &= \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

* * *

5. Déterminer les limites de F aux bornes de son ensemble de définition.

RÉPONSE:

Comme $x \sim x+1$ (pour $x \to +\infty$), et que $\ln(x+1) \to +\infty$, il est clair que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$$

Par ailleurs,

$$F(x) = -\frac{1}{x+1}(1 - (x+1)\ln(x+1)) \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} -\infty$$

car $(x+1)\ln(x+1) \to 0$ par croissances comparées.

* * *

6. (a) Étudier la concavité de F. On montrera notamment que F admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

RÉPONSE:

Comme f est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$, F est finalement de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition et sa concavité est caractérisée par le signe de sa dérivée seconde, égale à $f'(x)$, dont on connait le signe par la première partie de l'exercice. Plus précisément,

- *$F''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = 1$ et admet un (unique) point d'inflexion d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée $y = F(1) = \ln(2) - 1/2 \simeq 0,19$;*
- *$F''(x) > 0$ sur $]-1;1[$ donc F y est convexe ;*
- *F est alors concave sur $]1;+\infty[$*

* * *

(b) Montrer que, pour tout $x > -1$ non nul, $F(x) > 0$.

RÉPONSE:

Sur $]-1;1[, F$ *est convexe donc la courbe de* F *est au dessus de ses tangentes (sur ce même intervalle). LA tangente en 0 a pour équation* $y = f(0)x + F(0) = 0$. *Ainsi,* $F(x) \geq 0$ *sur* $]-1;1[$ *mais en fait, le seul point d'égalité est le point de tangence* $(x = 0)$ *donc pour* $x \in]-1;1[, F(x) > 0$.
Sur $[1;+\infty[, F'(x) = f(x) \geq 0$ *donc* F *est croissante et donc* $F(x) \geq F(1) = \ln(2) - 1/2 > 0$. *Au final, pour tout* $x \in]-1;+\infty[$ *non nul, on a bien* $F(X) > 0$.

* * *

7. Rappeler les développements limités d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et de $1/(1+x)$. En déduire le développement limité de $F(x)$ à l'ordre 2 en 0.

RÉPONSE:

On rappelle les DL usuels en 0 à l'ordre 2

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right), \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o\left(x^2\right)$$

Ces DL permettent d'obtenir celui de notre fonction F *en 0 . En effet,*

$$\begin{aligned} F(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+x} &= x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - x\left(1 - x + x^2 + o\left(x^2\right)\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} - x + x^2 + o\left(x^2\right) \\ &= \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \end{aligned}$$

* * *

8. Préciser l'équation de la tangente à la courbe de F en 0 et leurs positions relatives.

RÉPONSE:

La tangente en 0 a pour équation $y = 0$ *(c'est donc l'axe des abscisses). On sait déjà que la courbe de* F *est au dessus.*

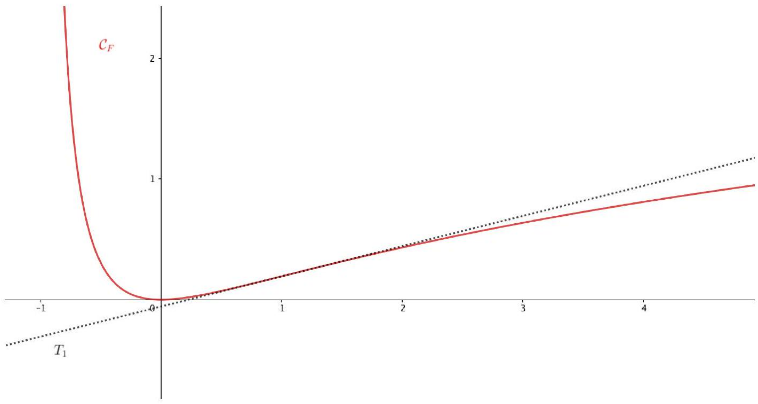
* * *

9. Représenter l'allure de la courbe représentative de F ainsi que, sur le même graphique, la tangente en 0 .

RÉPONSE:

On notera aussi T_1 *la tangente au point d'inflexion, plus intéressante finalement que la tangente en 0 , permettant notamment de visualiser le changement de convexité. On peut commencer par faire apparaître le tableau de variations de* F *même s'il n'est pas explicitement demandé, il permet un tracé plus facile.*

x	-1		0		$+\infty$
$F'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
F	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



$* * *$

Partie III - Étude de la suite (u_n)

10. Calculer u_1 et u_2.

RÉPONSE:

Par définition, $u_1 = f(u_0) = f(1) = 1/(1+1)^2 = 1/4$. *Puis,*

$$u_2 = f(u_1) = f(1/4) = \frac{1/4}{(1+1/4)^2} = \frac{4}{25}$$

$* * *$

11. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$.

RÉPONSE:

On procède donc par récurrence, comme demandé.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, *on a* $u_1 = 0.25 \leq 1$ *et* $u_1 > 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq 1/n$. *Comme* f *est strictement croissante entre* $]-1;1[$ *dont* $0, u_n$ *et* $1/n$ *sont des éléments donc*

$$0 = f(0) < f(u_n) = u_{n+1} < f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{(1+1/n)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

car $n/(n+1) \leq 1$. *Ainsi la récurrence est bien démontrée.*

$* * *$

12. En déduire la convergence de (u_n) vers une limite à préciser.

RÉPONSE:

Par le théorème des gendarmes, il suit de l'encadrement précédent que u_n *converge vers 0 .*

$* * *$

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n}$$

RÉPONSE:

Commençons par voir que

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{(u_n+1)^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n^2 + 2u_n}{u_n} = u_n + 2$$

ce qui donne, d'après l'encadrement de u_n ci-dessus, l'encadrement voulu :

$$2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n}$$

* * *

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

RÉPONSE:

On reconnait une somme télescopique. On somme donc l'encadrement précédent.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1}$$

Mais,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{k} \right) = 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \geq \sum_{k=1}^{n-1} 2 = 2(n-1)$$

Ainsi,

$$2n - 2 \leq \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} \leq 2n - 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

mais comme $1/u_1 = 4$, on obtient bien

$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

* * *

14. (a) Comparer, pour k entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

RÉPONSE:

On a déjà répondu, en classe, à la maison ou ailleurs plusieurs fois à cette question. La fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur l'intervalle $[k-1;k]$, et par positivité de l'intégrale on a

$$\forall t \in [k-1;k], \quad \frac{1}{t} \geq \frac{1}{k} \quad \Longrightarrow \quad \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k} = \frac{1}{k}\int_{k-1}^{k} \mathrm{d}t = \frac{1}{k}$$

* * *

(b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

RÉPONSE:

On somme et on utilise la relation de Chasles

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \ln(n)$$

* * *

15. Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

RÉPONSE:

n combinant (13)(b) et (14)(b), on a

$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + 1 + \ln(n)$$

Ainsi, en multipliant par $1/(2n)$, on a

$$1 + \frac{1}{n} \leq \frac{1/(2n)}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{2n}$$

et le théorème des gendarmes donne alors la limite du quotient égale à 1 , ou encore

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

* * *

16. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

RÉPONSE:

La série de terme général $1/(2n)$ est divergente (c'est le multiple du terme général de la série harmonique, exemple de série de Riemann divergente). Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on peut également conclure à la divergence de la série $\sum u_n$.

* * *

Partie IV - Étude de la fonction g

17. Montrer que g est continue sur son ensemble de définition.

RÉPONSE:

En dehors de 0 et de $-1, g$ est continue comme quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Il faut donc vérifier ce qui se passe en -1 et en 0 .

- *En -1 : le numérateur tend vers -1 , alors que le dénominateur tend vers $-\infty$. Par algèbre des limites, on a*

$$\lim_{x \to -1^+} g(x) = 0 = g(0)$$

donc g est continue en -1 ;

- *En 0 : on retrouve une limite usuelle (obtenue avec un DL à l'ordre 1), on a*

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1 = g(0)$$

donc g est continue en 0 .

* * *

18. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$, puis, pour $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, vérifier que

$$g'(x) = \frac{F(x)}{(\ln(1+x))^2}$$

RÉPONSE:

Sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[, g$ est quotient de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas, ainsi g est bien $\mathcal{C}^1$ sur chacun des ces intervalles. Pour $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, on a

$$g'(x) = \frac{\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}}{(\ln(x+1))^2} = \frac{F(x)}{(\ln(x+1))^2}$$

* * *

19. Montrer que g est dérivable en 0 et préciser la valeur de $g'(0)$. Montrer ensuite que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.

RÉPONSE:

Pour montrer la dérivabilité en 0 , il faut déterminer la limite du taux d'accroissement, à l'aide de DL qui font plaisir

$$\begin{aligned}
\frac{g(x)-g(0)}{x} &= \frac{\frac{x}{\ln(x+1)} - 1}{x} \\
&= \frac{x - \ln(x+1)}{x\ln(x+1)} \\
&= \frac{x - x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}{x(x+o(x))} \\
&= \frac{x^2/2 + o\left(x^2\right)}{x^2 + o\left(x^2\right)} \\
&= \frac{1/2 + o(1)}{1 + o(1)} \\
&\longrightarrow \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ainsi g est dérivable en 0 et $g'(0) = 1/2$. Pour montrer ensuite le caractère $\mathcal{C}^1$ en 0 , il faut montrer que la dérivée g' est continue en 0 , avec l'aide de DL et notamment celui trouvé pour $F(x)$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{F(x)}{\ln(1+x)^2} = \frac{x^2/2 + o\left(x^2\right)}{(x+o(x))^2)} = \frac{x^2/2 + o\left(x^2\right)}{x^2 + o\left(x^2\right)} \\ &\xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2} = g'(0) \end{aligned}$$

donc g' est bien continue en 0 et g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.

* * *

20. Montrer que, pour tout $x > -1, g'(x) > 0$. En déduire les variations de g que l'on fera apparaître dans un tableau contenant aussi la limite, que l'on justifiera, de $g(x)$ en $+\infty$.

RÉPONSE:

Comme $F(x) > 0$ sur $]-1;+\infty[$ en dehors de 0 , que $g'(0) > 0$ et que le dénominateur de $g'(x)$ est strictement positif, on en déduit qu'en effet $g'(x) > 0$ pour tout $x > -1$, ainsi g est strictement croissante sur son ensemble de définition. Par croissance comparée, on a aussi

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

On en déduit le tableau de variations suivant

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	+	
g		

* * *

21. La fonction g est-elle dérivable en -1 ? Interpréter graphiquement.

RÉPONSE:

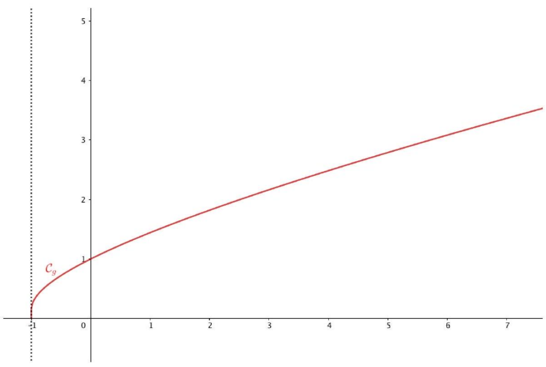
Le taux d'accroissement de g en -1 a une limite infinie. Ainsi, g n'est pas dérivable en -1 et sa courbe y admet une tangente verticale.

* * *

22. Représenter l'allure de la courbe de g.

RÉPONSE:

Les éléments de l'étude précédente permettent de tracer :



* * *