Épreuve ESSEC/HEC

E C G

DS n°3

Option économique

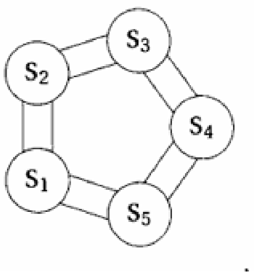
MATHEMATIQUES

5 Octobre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Les questions précédées de (*) sont réservées aux cubes.

Exercice n°1 : Probablités discrètes

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-contre.



Ils arrivent au rendez-vous à I'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.

Ils décident alors de partir à la recherche I'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes : .

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

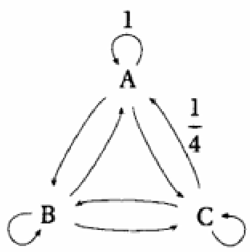
Partie A. Modélisatlon du problème

Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n :

- A_n : " les deux personnes sont sur le même site après le n-ième déplacement".
- B_n : " les deux personnes sont sur des sites adjacents après le n-ième déplacement".
- C_n : " les deux personnes sont à deux routes de distance après le n-ième déplacement".

On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements.
2. Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.
   (b) Justifier $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$
   (c) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues. On représentera les résultats en reproduisant et complétant le schéma ci-contre



4. Etablir les relations suivantes pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}c_n \end{cases}$
5. (a) Exprimer b_{n+2} à l'aide de b_{n+1}, b_n et c_n puis exprimer c_n en fonction de b_{n+1} et b_n pour obtenir enfin une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n
   (b) En déduire une expression de b_n en fonction de n.
   on fera intervenir les nombres $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$.
6. (a) Exprimer a_n en fonction de n, α et β. (on pourra s'intéresser à la somme $a_n + b_n + c_n$).
   (b) Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Quelle est la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais ?

Partie B. Nombre de déplacements avant rencontre

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de déplacements effectués par chacune des personnes avant leur rencontre sur un même site.

1. Déterminer $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Soit $n \in X(\Omega)$, montrer : $P(X = n) = \dfrac{\sqrt{5}}{20}\left(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\right)$
3. Calculer l'espérance de X.
4. Calculer la variance et l'écart-type de X.

Exercice n°2 : Probabilités et analyse

Dans certaines situations (paris sportifs, investissements financiers...), on est amené à miser de l'argent de façon répétée sur des paris à espérance favorable. On se propose de mettre en place une stratégie afin d'optimiser les gains à long terme.

On adopte ici le cadre simplifié suivant : on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.

Un joueur mise une partie M_n de son capital sur la réalisation de l'événement $(X_n = 1)$, pour chaque $n > 1$. La variable M_n est supposée indépendante des variables X_k, $k \in \mathbb{N}^*$

En cas de victoire, il double sa mise (son capital est donc augmenté de M_n), en cas de défaite il perd sa mise (son capital diminue de M_n).

Initialement, le joueur dispose du capital $C_0 > 0$, puis on note C_n la variable aléatoire égale au capital détenu à l'issue du $n^{ième}$ pari.

On a ainsi l'encadrement : $0 \leq M_{n+1} \leq C_n$ pour tout entier n.

Le jeu est supposé favorable, on considérera dans tout le problème : $\dfrac{1}{2} < p < 1$.

Partie I. Quitte ou double

1. Déterminer deux réels a et b vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = C_n + (aX_{n+1} + b)\, M_{n+1}$.
2. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(C_n) = C_0 + (2p-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(M_k)$

   En déduire que pour maximiser $E(C_n)$ il faut miser tout son capital à chaque pari.
3. Montrer que cette stratégie, dite du "quitte ou double", conduit de façon quasi-certaine à la ruine du joueur, et déterminer le nombre moyen de parties conduisant à la ruine (on parle de ruine s'il existe un entier naturel n pour lequel $C_n = 0$.

Partie II. Stratégie à mises proportionnelles

La stratégie précédente étant risquée, le joueur décide d'engager dans chaque pari une fraction du capital dont il dispose : on a ainsi $M_{n+1} = \alpha C_n$, avec $\alpha \in \,]0,1[$ (indépendant de n)

4. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad C_{n+1} = (1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}\, C_n$.
5. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   Que représente la variable aléatoire S_n ? Déterminer la loi de S_n et son espérance.
6. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad C_n = (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}\, C_0$.
7. Montrer que : $E\left[\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{C_n}{C_0}\right)\right] = p\ln(1+\alpha) + (1-p)\ln(1-\alpha)$

Par la suite, on cherche à maximiser cette quantité, ce qui équivaut à maximiser l'espérance du *taux moyen de croissance* du capital.

Partie III. Optimisation : le critère de Kelly

On pose, pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = p\ln(1+x) + (1-p)\ln(1-x)$

8. Étude de f.
   (a) Étudier les variations de f sur $]0,1[$, et montrer que f est concave.
   Montrer que f admet un maximum sur $]0,1[$, atteint en un unique réel α_K que l'on exprimera en fonction de p.
   (b) Déterminer la limite de f en 1 et interpréter le résultat.

(c) Montrer que f s'annule deux fois exactement sur $[0,1[$: en 0 et en un réel α_c vérifiant $\alpha_K < \alpha_c$.

(d) Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[0,1[$

9. Conclusion : le choix $\alpha = \alpha_K$ est celui qui optimise la croissance de gain à long terme. Que donnerait l'expression de α_K dans les cas limites $p = \dfrac{1}{2}$ et $p = 1$?
   Interpréter ces deux résultats.

Partie IV. Étude de la valeur critique α_c

Les choix de α au-delà de la valeur critique α_c conduisent à une perte de capital. On cherche dans cette partie un équivalent de α_c lorsque p est proche de $\dfrac{1}{2}$.

On considèrera dans ce qui suit que α, est une fonction de p (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

10. On définit la fonction φ sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

    (a) Montrer que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$ On notera encore φ ce prolongement.

    (b) Justifier que φ est dérivable sur $]0,1[$, et mettre l'expression de sa dérivée sous la forme
    $$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)\left[\ln(1-x)\right]^2}$$

    (c) Déterminer les variations de h sur $]0,1[$.

    (d) Montrer que φ réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle à préciser.

11. Montrer que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 1$.
    On commencera par donner le développement limité en 1 à l'ordre 2 de la fonction ln.

12. (a) Etablir : $\forall p \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[, \quad \alpha_c(p) = \varphi^{-1}\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$

    (b) En déduire que α_c, est prolongeable par continuité en $\dfrac{1}{2}$, que ce prolongement est dérivable en $\dfrac{1}{2}$ et que :
    $$\alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

    (c) Établir l'équivalence, au voisinage de $\dfrac{1}{2}$:
    $$\alpha_c \sim 2\alpha_K$$

Conclusion : pour des valeurs de p proches de $\dfrac{1}{2}$ (c'est-à-dire des paris "légèrement" favorables, un cas très fréquent), il faut prendre $\alpha < 2\alpha_K$.
Par sécurité (p n'est en pratique connu qu'approximativement), les parieurs choisissent souvent $\alpha = \dfrac{\alpha_K}{2}$, la moitié de la valeur de Kelly.

Partie V Simulation informatique

Le programme `kelly1` qui suit, écrit en language Python, permet d'illustrer ce qui précède :

- le capital initial est fixé à 100 ;
- en entrée, le programme demande la valeur de p, la valeur de α à utiliser et le capital que l'on souhaite atteindre ;
- en sortie, le programme renvoie le nombre de parties jouées pour atteindre l'objectif demandé.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def kelly1:
        p=float(input('Donner la valeur de p:'))
        capobj=float(input('Objectif à atteindre:'))
        alpha=float(input('Donner la valeur de alpha:'))
        cap=100
        n=0
        while ...:
                u=rd.rand()
                if u<p:
                        ...
                else:
                        ...
        ...
        print('Nombre de parties jouées',n)
        print('Capital atteint',cap)
```

13. Compléter les quatre lignes d'instructions manquantes.
14. Afin de vérifier que la stratégie de Kelly est optimale, on modifie le programme `kelly1` de la façon suivante :
    - les entrées restent les mêmes ;
    - le nouveau programme calcule la valeur de Kelly α_K ;
    - en sortie, le nouveau programme renvoie, en plus du nombre de parties jouées pour atteindre l'objectif demandé, le capital que l'on aurait obtenu si on avait choisi la valeur α_K à la place de α pendant ces mêmes parties.

    Écrire le programme `kelly2` qui réalise ces modifications, uniquement en insérant des nouvelles instructions au programme `kelly1`.